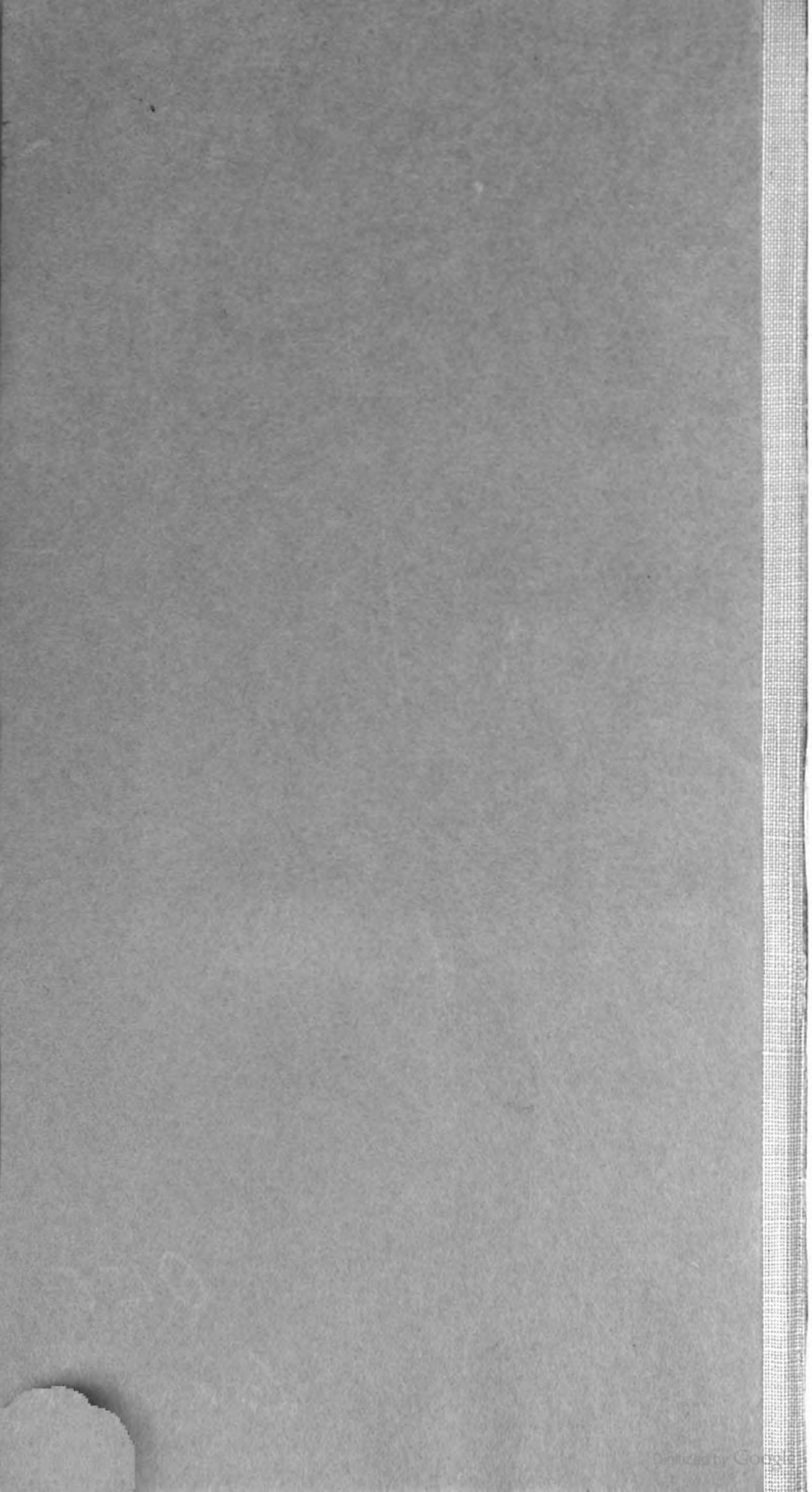
SUPPLEMENTE ZU GEORG SIMON KLÜGEL'S WORTERBUCHE DER REINEN...

Johann August Grunert





Supplemente

zu

Georg Simon Klügel's

Wörterbuche

der

reinen Mathematik.

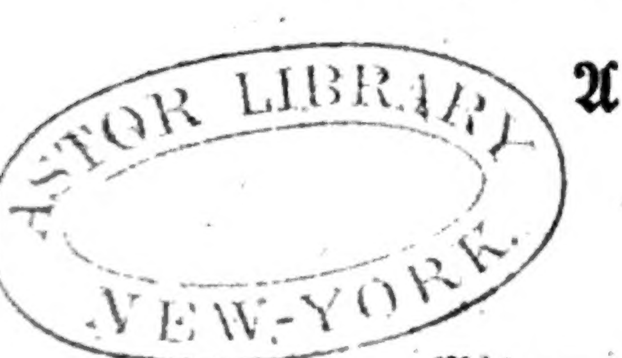
Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung

A bis D.



Mit zwei Kupfertafeln.

Leipzig, 1833.
Bei E. B. Schwickert.

Vorrede.

Die großen Fortschritte, welche die Mathematik seit der Begründung dieses ihr gewidmeten Wörterbuchs gemacht hat, bestehen theils in der Erweiterung und Vervollkommnung der Methoden, in der strengern Begründung mehrerer ihrer wichtigsten Theile, und der dadurch möglich gewordenen gegen früher unendlich verbesserten Darstellung derselben; theils in der Vermehrung des Materials durch neue Methoden und Sätze. Blickt man nur auf die letzten zehn bis zwanzig Jahre zurück, so muß man erstaunen über das, was in dieser verhältnißmäßig nur kurzen Zeit in jeder der beiden so eben angedeuteten Beziehungen geleistet worden ist. Durch diese beiden Richtungen, nach denen hin die Fortschritte der Wissenschaft zu suchen sind, war mir zugleich, wie ich glaube, mit ziemlicher Bestimmtheit der Weg vorgezeichnet, den ich bei der Bearbeitung dieser Supplemente zu einem nun schon vor dreißig Jahren begonnenen Werke zu betreten hatte. Nicht wenige der wichtigsten in ganz veralteter Darstellung dastehende Artikel bedurften einer völlig neuen Ausarbeitung, und mehrere ganz neue Artikel mußten hinzugefügt werden. In beiden Beziehungen liefert schon diese erste Abtheilung Beispiele in hinreichender Anzahl. Indem ich hoffe, daß man z. B. in den Artikeln Bernoullische Zahlen, Binomischer

Lehrsatz, Cyklometrie, Differenzen- und Differentialrechnung Klügels Arbeit auch nicht im entferntesten wieder erkennen wird, bin ich auf der andern Seite überzeugt, daß nachsichtige Beurtheiler mir das Zeugniß nicht versagen werden, in den Artikeln Bestimmtes Integral, Bürmannische Reihe, Convergenz der Reihen, Coordinaten — ein Artikel, der in Klügels Bearbeitung wohl kaum diesen Namen verdient — Cylinder und Dreieck gezeigt zu haben, wie unendlich in neuerer Zeit das Material in einzelnen Theilen der Wissenschaft angewachsen ist. Daß ich weit mehr noch zu geben im Stande gewesen wäre, wird man mir auf mein Wort glauben; daß aber ein Werk dieser Art auch nicht in's Unendliche ausgedehnt werden darf, ist eben so klar. Maaß zu halten, ist hier sehr schwer. In manchen Artikeln, wie z. B. bei dem wichtigen Artikel Barycentrischer Calcul, mußte ich mich leider mit kurzen Notizen begnügen, aus denen aber niemals auf meine Ansicht über die Wichtigkeit des betreffenden Gegenstandes geschlossen werden darf. Ich habe in solchen Fällen mich an den einzelnen Stellen selbst kurz zu rechtfertigen gesucht, und kann dies also hier um so mehr unterlassen. Eben so würde eine Rechtfertigung der von mir in den einzelnen Artikeln gewählten Darstellung die Gränzen einer Vorrede weit überschreiten, und was ich vorzugsweise als mein Eigenthum in Anspruch nehmen darf, werden Kenner von selbst finden. Weil jedoch in einem Werke dieser Art das Eigne unter der unendlichen Masse des Fremden nur zu leicht gänzlich verschwindet, mag es mir erlaubt seyn, auf Mehreres in dem Artikel Bernoullische Zahlen, in dem Artikel Bestimmtes Intregral (22.), Mehreres im Artikel Binomischer Lehrsatz, auf die im Artikel Caustische Flä-

chen und Linien (32.) bis (39.) mitgetheilten analytischen Beweise, auf die ganze Anlage und Ausführung des Artikels Coordinaten, den ganzen Artikel Cylinder, fast den ganzen Artikel Cyklometrie und Mehreres in den Artikeln des Buchstaben D, als mir vielleicht vorzugsweise angehörend, besonders hinzuweisen.

Für die zweite und letzte Abtheilung dieser Supplemente sind nun noch mehrere sehr wichtige und umfangreiche Artikel zurück, namentlich der Artikel Elliptische Functionen und der Artikel Gleichung, in welchem natürlich auf die neuen wichtigen Untersuchungen von Fourier vorzüglich Rücksicht genommen werden wird, so wie in dem ebenfalls einer neuen Bearbeitung bedürfenden Artikel Goniometrie die bekannten Schwierigkeiten bei der Entwickelung der Potenzen der Sinus und Cosinus, auf welche Poisson zuerst aufmerksam machte, besondre Berücksichtigung finden und von mir, wie ich glaube, auf eigenthümliche Weise gehoben werden sollen. Die Zusätze werden natürlich in eben dem Maaße abnehmen, wie die Bände unsers Werkes näher an die jetzige Zeit heranreichen. Mehreres, was auch in die zweite Abtheilung verwiesen werden konnte, ist, als sich hier besser und leichter anschließend, in diese erste aufgenommen, und dadurch in jener Raum für andre Untersuchungen gewonnen worden. Dahin gehört z. B. Bessels treffliche Auflösung des Kepplerschen Problems und Fouriers berühmte Entwickelung der Functionen nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen ihrer veränderlichen Größen mittelst der bestimmten Integrale in dem Artikel Bestimmtes Integral, die Entwickelung der schiefen Kegelfläche im Artikel Cylinder und vielleicht noch einiges Andre. Auf diese Gegenstände wird aber natürlich

in der zweiten Abtheilung an gehörigem Orte verwiesen werden.

Da die zweite Abtheilung dieser Supplemente der ersten ohne Zweifel auf dem Fuße folgen wird, so scheide ich hiermit, um so mehr, da beide Abtheilungen doch eigentlich nur einen Band bilden sollen, mit dem innigsten Danke gegen die Vorsehung, daß sie mich dieses schwierige Werk glücklich zu Ende führen ließ, und mit dem freudigsten Rückblick auf die durch die Arbeit selbst mir gewordene vielfache und reiche Belehrung, für jetzt von demselben, ohne die Hoffnung aufzugeben, auch die angewandte Mathematik in ähnlicher lexicographischer Bearbeitung zu liefern, wenn der meinen bisherigen Leistungen geschenkte Beifall der Kenner mich dazu ermuntert und berechtigt, und der Himmel mir auch fernerhin die zu einem so schwierigen Werke nöthige Kraft und Ausdauer verleihet.

Brandenburg a. d. H., im Februar 1833.

J. A. Grunert.

A.

Absteigende Reihen, sind Reihen von der Form

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + Ex^{n-4} + \ldots\ldots$$

Aehnlichkeitsaxe, s. Anwendung der Analysis auf die Geometrie i. d. Z. (16.).

Aehnlichkeitspunkt, s. Anwendung der Analysis auf die Geometrie i. d. Z. (14.).

Aeußere Glieder einer Proportion, s. Verhältniß (12.).

Algebra. Die neuern Mathematiker beschäftigt vorzüglich die Lehre von den höhern Gleichungen oder von den Gleichungen aller Grade im Allgemeinen, in theoretischer und praktischer Rücksicht. Gauß, Cauchy, Abel und Andere haben in dieser Beziehung schon viel Treffliches geliefert, wie die Commentarien der Göttinger Societät, die Exercices de Mathématiques von Cauchy, Crelles Journal und die übrigen mathematischen Zeitschriften bezeugen. Den Satz von der Zerlegbarkeit jeder ganzen reellen rationalen Function in lauter reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades, welcher eigentlich das Grundprincip der ganzen Theorie der Gleichungen ausmacht, hat vorzüglich Gauß durch mehrere höchst scharfsinnige Beweise bewahrheitet; der Beweis dieses Satzes von Cauchy ist schon im Artikel Unmögliche Größe mitgetheilt worden; Burgs Versuch, einen elementaren Beweis dieses wichtigen Theorems zu geben (Crelles Journal. B. V. S. 182.), ist leider als völlig verfehlt zu betrachten. Ueber die Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösbarkeit der Gleichungen über den vierten Grad hinaus, die schon Ruffini in den Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze, P. I. 1803. zu beweisen versucht hatte, hat der den mathematischen Wissenschaften zu früh entrissene Abel eine schöne Arbeit in Crelles Journal. B. I. S. 63. geliefert. Zu erwähnen ist noch: Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen von Meier Hirsch. Berlin. 1809. Der verdienstvolle Verfasser glaubte die allgemeine Auflösung der Gleichungen gefunden zu haben, hat aber seinen Irrthum nachher selbst eingestanden. Der Artikel Gleichung in diesen Zusätzen

wird von allen diesen Untersuchungen ausführliche Nachricht gegeben. Derselbe Artikel im zweiten Theile dieses Wörterbuchs ist als völlig veraltet zu betrachten.

Alternirende Functionen, eigentlich fonctions alternées nach französischen Schriftstellern, sind Functionen mehrerer veränderlicher Größen, welche, wenn man zwei beliebige veränderliche Größen gegen einander vertauscht, ihr Zeichen ändern, ohne ihren absoluten Werth zu ändern. Functionen dieser Art sind:

$$x-y,\quad xy^2-x^2y,\quad \log\left(\frac{x}{y}\right),\quad \sin x-\sin y,\quad (x-y)(x-z)(y-z)$$

Cauchy hat in seinem trefflichen Cours d'Analyse algebrique Paris. 1821. Chap. III. §. 2. und Note IV. mehrere Sätze über solche Functionen, die zugleich ganze rationale Functionen sind, bewiesen, und aus denselben einen Beweis für die von Bezout und Cramer gegebenen Regeln zur Elimination der unbekannten Größen aus Gleichungen des ersten Grades (s. d. Art. Elimination i. d. Z.) hergeleitet. Einen ganz ähnlichen Beweis hat auch J. E. Drinkwater in dem Philosophical Mag. No. 55. p. 24. gegeben, ohne des von Cauchy gegebenen Beweises zu erwähnen.

Amplitudo arcus. Der analytische Ausdruck für die Amplitudo arcus ist $\int\frac{\partial s}{r}$, wenn s den Bogen, r den Krümmungshalbmesser für den Endpunkt des Bogens bezeichnet.

Anagramm, s. Versetzungen (10.).

Analogie. Ueber Nepers Analogieen s. Trigonometrie (61.).

Analysis, als wissenschaftliches System. Zu den in diesem Artikel aufgeführten einzelnen Theilen der sogenannten Analysis endlicher Größen kann man u. A. noch hinzufügen die analytische Theorie der Kettenbrüche, nämlich vorzüglich die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche und umgekehrt, Untersuchungen über die Convergenz der Kettenbrüche u. s. w.; die Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen, mit welcher vorzüglich in neuerer Zeit die Mathematiker sich sehr viel beschäftigt haben; die Theorie der symmetrischen Functionen, Stetigkeit oder Continuität und Discontinuität der Functionen u. s. w. Einzelne wichtige Theile der höhern Analysis, die vorzüglich in neuerer Zeit sehr cultivirt worden sind, sind die Theorie der bestimmten Integrale in ihrer ganzen Ausdehnung, die Theorie der elliptischen Transcendenten oder der elliptischen Functionen, die Integrallogarithmen, und vorzüglich die Variationsrechnung, welche früher gewöhnlich als ein Theil der Integralrechnung be-

trachtet wurde, nach den neuern Bearbeitungen aber durchaus als eine selbstständige Wissenschaft dasteht.

Ein neueres deutsches Werk, welches für den gegenwärtigen Zustand der Analysis etwa dasselbe zu leisten sucht, wie Eulers Introductio in Analysin infinitorum für den damaligen, sind Eytelweins Grundlehren der höhern Analysis. Berlin. 1824. 2 Bände. 4. Die specielle Literatur s. m. bei den einzelnen Artikeln. Lagrange's mathematische Werke sind trefflich übersetzt von Crelle (Berlin. 1823 — 24.). Zu wünschen ist, daß der Uebersetzer seinen längst vorbereiteten umfassenden Lehrbegriff der gesammten Analysis (s. Journal der r. u. a. Mathematik. B. I. S. 95.) bald herausgebe, weil dies ein Werk ist, welches der europäischen mathematischen Literatur noch gänzlich mangelt. Das Material wächst von Tage zu Tage in's Ungeheure. Die Sichtung und Ordnung desselben ist daher sehr zu wünschen, wenn die Uebersicht, wie es bald nicht anders wird seyn können, nicht ganz verloren gehen soll. Ein solcher vollständiger Lehrbegriff, wie Crelle ihn vorbereitet, ist daher ein höchst dringendes Bedürfniß.

Analysis als Methode. Drobisch Theoriae Analyseos geometricae prolusio. Lips. 1824. Ueber die geometrische Analysis von Deinhart. Wittenb. 1830. O. Schulz über die geometrische Analysis in E. G. Fischers Lehrbuche der Mathematik für Schulen. Eine Schrift von Luca Maresca über die geometrische Analysis, zugleich mit vielen Aufgaben, namentlich über die Berührungen (Neapel. 1825. 4.), wird sehr gerühmt im Bulletin universel. Avril. 1831.

Anfang der Coordinaten, s. Coordinate.

Anwendung der Analysis auf die Geometrie. Die Anwendung der Analysis auf die Geometrie hat durch die Bemühungen der neuern Mathematiker, vorzüglich der französischen, außerordentlich an Eleganz gewonnen. Allen diesen Anwendungen liegen die im Artikel Linie und Ebene (Thl. III. S. 447 — 477.) entwickelten Gleichungen als Principien zum Grunde. Diese Gleichungen sind für die analytische Geometrie ganz dasselbe, was die Elemente des Euclides für die Geometrie der Alten waren. Weil der so eben angeführte Artikel uns keinesweges den Anforderungen zu entsprechen schien, welche die heutige Mathematik zu machen berechtigt ist; so haben wir diese Gleichungen, ihrer großen Wichtigkeit wegen, in diesen Zusätzen in einem eigenen, eben so überschriebenen Artikel von Neuem zusammengestellt, und beziehen uns hier auf diesen Artikel ein für alle Mal, ohne die einzelnen Nummern desselben jederzeit besonders zu citiren, weil die genannten Gleichungen mit den Elementar-Sätzen der euclidischen Geometrie durchaus in eine Kategorie zu setzen sind.

1. Es sey ein Winkel BAC (Fig. 1.) und in seiner Ebene ein Punkt D gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie B′C′ von solcher Lage ziehen, daß das Product der auf den Schenkeln des gegebenen Winkels abgeschnittenen Stücke AB′ und AC′ einem gegebenen Quadrate q^2 gleich sey.

Man nehme AB und AC als die positiven Theile der Axen eines schiefwinkligen Coordinatensystems an, dessen Anfangspunkt A ist. Die Coordinaten des gegebenen Punktes D in Bezug auf dieses System bezeichne man durch α, β. Die Gleichung der gesuchten Linie B′C′ sey

$$y = ax + b.$$

Die Coordinaten des Punktes B′ seyen x', 0, so wie 0, y' die Coordinaten des Punktes C′. Weil die gesuchte gerade Linie durch die Punkte B′, D, C′ geht, so hat man folgende drei Gleichungen:

$$0 = ax' + b,\ \beta = a\alpha + b,\ y' = b.$$

Diese drei Gleichungen enthalten vier unbekannte Größen (a, b, x', y'), welche sich also mittelst derselben nicht bestimmen lassen. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergiebt sich aber auf der Stelle die vierte Gleichung:

$$x'y' = q^2.$$

Eliminirt man zuerst b, so hat man:

$$o = ax' + y',\ \beta = a\alpha + y',\ x'y' = q^2.$$

Durch Elimination von a ergiebt sich:

$$\beta x' = (x' - \alpha)y',\ x'y' = q^2;$$

und, wenn man nun y' eliminirt:

$$\beta x'^2 = (x' - \alpha)q^2.$$

Folglich, durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung:

$$x' = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\frac{q^2}{\beta}\left(\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha\right)}\right\},$$

und, weil $y' = \frac{q^2}{x'}$ ist, nach leichter Rechnung:

$$y' = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{\alpha} \mp \sqrt{\frac{q^2}{\alpha}\left(\frac{q^2}{\alpha} - 4\beta\right)}\right\}.$$

Ist

$$\frac{q^2}{\beta}\left(\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha\right) = \frac{q^4}{\beta^2} - \frac{4\alpha q^2}{\beta} < o;$$

so ist, wie augenblicklich erhellet, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{\beta^2}{q^2}$, welches immer positiv ist, multiplicirt:

$$q^2 - 4\alpha\beta < o,\ q^2 < 4\alpha\beta.$$

Die Aufgabe wird also unmöglich, wenn $q^2 - 4\alpha\beta$ negativ, oder $q^2 < 4\alpha\beta$ ist. Haben α, β entgegengesetzte Zeichen

so ist die Aufgabe jederzeit möglich, weil dann $4\alpha\beta$ negativ, also $q^2 - 4\alpha\beta$ positiv ist.

Will man den Werth von x' construiren, so suche man zu β, q die dritte Proportionallinie. Dadurch erhält man $\frac{q^2}{\beta}$, folglich auch leicht durch bloße Subtraction $\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha$. Sucht man nun ferner zwischen $\frac{q^2}{\beta}$ und $\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha$ die mittlere Proportionallinie, so ergiebt sich

$$\sqrt{\frac{q^2}{\beta}\left(\frac{q^2}{\beta} - 4\alpha\right)},$$

folglich durch bloße Addition und Subtraction auch x', welches im Allgemeinen zwei Werthe hat. Daß man bei der Construction auch auf die Vorzeichen der einzelnen Größen gehörig Rücksicht nehmen muß, versteht sich von selbst.

2. Nimmt man einen beliebigen Durchmesser eines Kreises als Axe, seinen Mittelpunkt als Anfang der Abscissen an; so ist, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, und die Coordinaten rechtwinklig angenommen werden, offenbar

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung des Kreises. Nimmt man nun zwei andere beliebige, den primitiven jedoch parallele, Coordinatenaxen an, und bezeichnet in Bezug auf dieselben die Coordinaten des Mittelpunktes durch a, b; so muß man in obiger Gleichung offenbar $x-a$, $y-b$ für x, y setzen, wodurch dieselbe in

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^3$$

übergeht. Dies ist die allgemeinste Gleichung des Kreises zwischen rechtwinkligen Coordinaten.

3. Sey nun durch einen gegebenen Punkt im Kreise eine Berührende zu ziehen, d. h. eine gerade Linie, welche, außer dem gegebenen Punkte, mit dem Kreise keinen andern Punkt gemein hat. Der Einfachheit wegen nehme man den gegebenen Punkt selbst als Anfang der Coordinaten an; so ist die Gleichung der Berührenden, da dieselbe durch den Anfang der Coordinaten geht,

$$y = Ax.$$

Diese Gleichung sey aber jetzt überhaupt die Gleichung einer durch den Anfang der Coordinaten gehenden geraden Linie. Hat diese gerade Linie, außer dem Anfange der Coordinaten, noch andere Punkte mit dem Kreise gemein; so müssen die Coordinaten dieser Punkte jederzeit den folgenden zwei Gleichungen genügen:

$$y = Ax,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Führt man den Werth von y aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so ergiebt sich nach leichter Rechnung:

$$(1+A^2)x^2 - 2(a+Ab)x + a^2 + b^2 = r^2.$$

Aber, wie sogleich erhellet,

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Also

$$(1+A^2)x - 2(a+Ab) = o,\ x = \frac{2(a+Ab)}{1+A^2}.$$

Die in Rede stehende gerade Linie hat folglich im Allgemeinen, außer dem Anfange der Coordinaten, noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein. Soll diese gerade Linie nun eine Berührende seyn, so muß ihr zweiter Durchschnittspunkt mit dem Kreise mit dem Anfange der Coordinaten zusammenfallen, d. h. es muß

$$\frac{2(a+Ab)}{1+A^2} = o,\ a + Ab = o,\ A = -\frac{a}{b}$$

seyn. Die gesuchte Gleichung der Berührenden ist folglich:

$$y = -\frac{a}{b}x.$$

Zieht man von dem Anfange der Coordinaten, d. i. dem Berührungspunkte, nach dem Mittelpunkte des Kreises einen Radius; so ist dessen Gleichung, weil er durch den Anfang der Coordinaten geht,

$$y = A'x.$$

Weil derselbe aber auch durch den Mittelpunkt des Kreises, dessen Coordinaten a, b sind, geht; so ist

$$b = A'a,\ A' = \frac{b}{a}.$$

Folglich die Gleichung des in Rede stehenden Radius:

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Weil nun

$$1 + \frac{b}{a}\left(-\frac{a}{b}\right) = 1 - \frac{ab}{ab} = 1 - 1 = o$$

ist; so ist die Berührende jederzeit auf dem durch den Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht.

Sey nun überhaupt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

die Gleichung des Kreises in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, und α, β seyen die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Kreise, durch welchen eine Berührende an denselben gezogen werden soll. Die Gleichung dieser Berührenden sey

$$y = Ax + B.$$

Da dieselbe durch den Punkt (α, β) geht; so ist

$$\beta = A\alpha + B.$$

Folglich, mittelst Subtraction,

$$y - \beta = A(x - \alpha)$$

die Gleichung der Berührenden. Die Gleichung des durch den Berührungspunkt gezogenen Radius sey

$$y = A'x + B';$$

so ist, weil dieser Radius durch die Punkte (α, β) und (a, b) geht,

$$b = A'a + B',\ \beta = A'\alpha + B'.$$

Mittelst Subtraction ergiebt sich leicht:

$$y - b = A'(x - a),\ b - \beta = A'(a - \alpha).$$

Folglich ist

$$y - b = \frac{b - \beta}{a - \alpha}(x - a)$$

die Gleichung des in Rede stehenden Radius. Da nun die Berührende auf diesem Radius senkrecht ist; so ist

$$1 + \frac{b - \beta}{a - \alpha}A = 0,\ A = -\frac{a - \alpha}{b - \beta}.$$

Folglich ist

$$y - \beta = -\frac{a - \alpha}{b - \beta}(x - \alpha),$$

oder

$$(a - \alpha)(x - \alpha) + (b - \beta)(y - \beta) = 0$$

die gesuchte Gleichung der Berührenden. Ist der Mittelpunkt des Kreises der Anfang der Coordinaten; so ist $a = b = 0$, also

$$\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) = 0,$$

oder, weil $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ ist,

$$\alpha x + \beta y = r^2$$

die Gleichung der Berührenden.

4. Sey jetzt durch einen ganz beliebigen Punkt (α, β), welcher nicht nothwendig in der Peripherie des Kreises liegt, eine Berührende an den Kreis zu ziehen. Der Mittelpunkt des Kreises sey der Anfang der Coordinaten, also

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung des Kreises. Die Gleichung der gesuchten Berührenden sey, weil dieselbe durch den Punkt (α, β) gehen soll,

$$y - \beta = a(x - \alpha).$$

Sind nun x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes; so ist auch

$$y' - \beta = a(x' - \alpha),$$

und nach (3.) ist

$$x'x + y'y = r^2$$

die Gleichung der Berührenden, so daß also auch

$$\alpha x' + \beta y' = r^2$$

ist. Nimmt man hierzu die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = r^2;$$

so hat man jetzt zur Bestimmung von a, x', y' die drei Gleichungen:

$$x'^2 + y'^2 = r^2,\ \alpha x' + \beta y' = r^2,\ y' - \beta = a(x' - \alpha).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen muß man x', y' bestimmen, aus der dritten ergiebt sich dann sogleich

$$a = \frac{y' - \beta}{x' - \alpha}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen findet man aber:

$$x' = \frac{r(\alpha r \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2})}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y' = \frac{r(\beta r \mp \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2})}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Da es zwei Werthe von x', y' giebt, so giebt es auch im Allgemeinen stets zwei Berührende, welche der Aufgabe genügen, wie schon aus den Elementen der Geometrie bekannt ist. Liegt der gegebene Punkt in der Peripherie des Kreises, so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

also

$$x' = \frac{\alpha r^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha,\ y' = \frac{\beta r^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \beta,$$

wie es seyn muß. In diesem Falle giebt es, wie auch die Rechnung zeigt, nur eine Berührende. Ueberhaupt ist aber offenbar $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ die Entfernung des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte des Kreises, und der gegebene Punkt liegt außer- oder innerhalb des Kreises, jenachdem $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > r$, oder $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < r$ ist. Im letztern Falle ist $\alpha^2 + \beta^2 < r^2$, folglich

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}$$

eine imaginäre Größe, so daß also in diesem Falle die Aufgabe unmöglich ist. Ist aber $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > r$, d. i. liegt der gegebene Punkt außerhalb des Kreises, so ist $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$ positiv, die Aufgabe folglich möglich, und es giebt zwei Berührende, welche ihr genügen.

Nimmt man die Linie, welche den Mittelpunkt des Kreises mit dem gegebenen Punkte, durch welchen die Berührenden gezogen werden sollen, verbindet, als Abscissenaxe an, so ist $\beta = 0$. Folglich

$$x' = \frac{r^2}{\alpha},\ y' = \mp\frac{r}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - r^2}.$$

Also

$$(x' - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 + y'^2 = \left(\frac{r^2}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 + \frac{r^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - r^2),$$

$$\text{d. i. } (x' - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 + y'^2 = (\tfrac{1}{2}\alpha)^2 .$$

Hieraus ergiebt sich augenblicklich, daß die beiden Berührungspunkte in der Peripherie eines Kreises liegen, welcher aus dem Mittelpunkte der das Centrum des gegebenen Kreises mit dem gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie über dieser geraden Linie als Durchmesser beschrieben ist, so daß also die Berührungspunkte die Durchschnittspunkte dieses leicht zu construirenden Kreises mit dem gegebenen Kreise sind.

5. Eine gerade Linie zu ziehen, welche zwei gegebene Kreise zugleich berührt.

Die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise seyen A, A', so wie r, ϱ ihre Halbmesser. Man nehme AA' als Axe, A als Anfang der Abscissen an, und bezeichne die Abscisse von A' durch a. Die Berührungspunkte der gesuchten geraden Linie mit den beiden gegebenen Kreisen seyen (x', y') und (x'', y''); so ist nach (3.) sowohl

$$x'x + y'y = r^2 ,$$

als auch

$$(a - x'')(x - x'') - y''(y - y'') = 0 ,$$

die Gleichung der gesuchten Berührenden. Letztere Gleichung bringt man, weil

$$(x'' - a)^2 + y''^2 = \varrho^2 ,\ x''^2 + y''^2 = 2ax'' - a^2 + \varrho^2$$

ist, leicht auf die Form:

$$(a - x'')x - y''y = a^2 - \varrho^2 - ax'' .$$

Da nun

$$x + \frac{y'}{x'}y = \frac{r^2}{x'},\quad x - \frac{y''}{a - x''}y = \frac{a(a - x'') - \varrho^2}{a - x''}$$

Gleichungen einer geraden Linie sind; so ist

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{y''}{a - x''},\quad \frac{r^2}{x'} = \frac{a(a - x'') - \varrho^2}{a - x''} .$$

Diese beiden Gleichungen reichen, nebst den Gleichungen

$$x'^2 + y'^2 = r^2 ,\ (a - x'')^2 + y''^2 = \varrho^2 ,$$

zur Bestimmung der vier unbekannten Größen x', y', x'', y'' hin. Bezeichnen wir aber die Abscisse des Punktes, in welchem die Berührende die Abscissenaxe schneidet, durch z; so folgt aus der Gleichung

$$x'x + y'y = r^2 ,$$

wenn man in derselben $x = z$, $y = 0$ setzt, auf der Stelle:

$$x'z = r^2 ,\ z = \frac{r^2}{x'} .$$

Also

$$z = \frac{a(a - x'') - \varrho^2}{a - x''},\quad a - x'' = \frac{\varrho^2}{a - z} .$$

Ferner ist

$$\frac{y'^2}{x'^2} = \frac{y''^2}{(a-x'')^2}, \quad \frac{r^2-x'^2}{x'^2} = \frac{\varrho^2-(a-x'')^2}{(a-x'')^2};$$

d. i., weil

$$\frac{r^2-x'^2}{x'^2} = \frac{r^2}{x'^2} - 1 = \frac{z^2}{r^2} - 1 = \frac{z^2-r^2}{r^2}$$

ist:

$$\frac{z^2-r^2}{r^2} = \frac{(a-z)^2-\varrho^2}{\varrho^2}.$$

Folglich

$$\varrho^2 z^2 = r^2(a-z)^2.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$z = \frac{ra}{r \pm \varrho}.$$

Man sieht also, daß z zwei Werthe hat. Auch

$$x' = \frac{r^2}{z} = \frac{r(r \pm \varrho)}{a}$$

hat zwei Werthe. Da aber

$$y'^2 = r^2 - x'^2 = \frac{r^2\{a^2-(r\pm\varrho)^2\}}{a^2}$$

ist; so ist

$$y' = \pm\frac{r}{a}\sqrt{a^2-(r\pm\varrho)^2},$$

wo die obern und untern Zeichen sich nicht auf einander zu beziehen brauchen. Daher hat y' offenbar vier Werthe. Es giebt folglich jederzeit vier gerade Linien, welche der Aufgabe genügen, vorausgesetzt, daß $a^2-(r\pm\varrho)^2$ nicht negativ ist, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich werden würde. Die Werthe von x'' und y'' würden sich mittelst der obigen Gleichungen ebenfalls leicht entwickeln lassen.

Zwei der vier die beiden gegebenen Kreise berührenden geraden Linien liegen außerhalb derselben, die beiden andern zwischen ihnen. Den beiden ersten entspricht offenbar das untere, den beiden letzten das obere Zeichen in dem Ausdrucke von z.

6. Seyen nun C, C′, C″ die Mittelpunkte dreier Kreise, und ϱ, ϱ', ϱ'' die Halbmesser derselben. Die den Spitzen C, C′, C″ des Dreiecks CC′C″ gegenüberstehenden Seiten desselben seyen a, a′, a″, die an C und C′ liegenden Winkel φ und φ'; so ist immer

$$a\sin\varphi' = a'\sin\varphi, \quad a\cos\varphi' + a'\cos\varphi = a''.$$

Man ziehe nun an je zwei der drei gegebenen Kreise die beiden äußern Berührenden (5.), und bezeichne deren Durchschnittspunkte durch A, A′, A″, so daß dieselben nach der Reihe den Kreisen C, C′; C, C″; C′, C″ entsprechen. Die Linie CC′

nehme man als Axe, C als Anfang der Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und bezeichne in Bezug auf dasselbe die Coordinaten von A, A', A'' respective durch x, y; x', y'; x'', y''; so ist, wie leicht erhellen wird, nach (5.):

$$x = \frac{ra''}{r-r'}, \qquad y = o;$$

$$x' = \frac{ra'}{r-r''}\cos\varphi, \qquad y' = \frac{ra'}{r-r''}\sin\varphi;$$

$$x'' = a'' - \frac{r'a}{r'-r''}\cos\varphi', \quad y'' = \frac{r'a}{r'-r''}\sin\varphi'.$$

Die Gleichung der Linie AA' sey

$$Y = AX + B;$$

so ist

$$o = A\frac{ra''}{r-r'} + B,$$

woraus durch Subtraction:

$$Y = A\left\{X - \frac{ra''}{r-r'}\right\}.$$

Aber, weil diese Linie auch durch A' geht:

$$\frac{ra'}{r-r''}\sin\varphi = A\left\{\frac{ra'}{r-r''}\cos\varphi - \frac{ra''}{r-r'}\right\},$$

$$A = \frac{a'(r-r')\sin\varphi}{a'(r-r')\cos\varphi - a''(r-r'')}.$$

Folglich ist

$$Y = \frac{a'(r-r')\sin\varphi}{a'(r-r')\cos\varphi - a''(r-r'')}\left\{X - \frac{ra''}{r-r'}\right\}.$$

Die Gleichung der Linie AA'' ist eben so

$$Y = A'\left\{X - \frac{ra''}{r-r'}\right\};$$

aber, weil diese Linie auch durch A'' geht:

$$\frac{r'a}{r'-r''}\sin\varphi' = A'\left\{a'' - \frac{r'a}{r'-r''}\cos\varphi' - \frac{ra''}{r-r'}\right\},$$

$$A' = -\frac{a(r-r')\sin\varphi'}{a(r-r')\cos\varphi' + a''(r'-r'')};$$

folglich

$$Y = -\frac{a(r-r')\sin\varphi'}{a(r-r')\cos\varphi' + a''(r'-r'')}\left\{X - \frac{ra''}{r-r'}\right\}$$

die Gleichung der Linie AA''. Nach dem Obigen ist aber der Bruch vor der Klammer auf der rechten Seite dieser Gleichung

$$= -\frac{a'(r-r')\sin\varphi}{(r-r')(a''-a'\cos\varphi) + a''(r'-r'')}$$

$$= \frac{a'(r-r')\sin\varphi}{a'(r-r')\cos\varphi - a''(r-r'')},$$

so daß also die Gleichungen der Linien AA', AA'' identisch sind, diese beiden Linien selbst folglich in eine gerade Linie zusammenfallen, d. i. die drei Durchschnittspunkte A, A', A'' der äußern Berührenden dreier Kreise jederzeit in einer geraden Linie liegen, ein sehr merkwürdiger, von Monge gefundener Satz, welcher schon Thl. IV. S. 876. Thl. V. S. 153. Thl. V. S. 181. auf verschiedene Arten bewiesen worden ist.

7. Sey eine gerade Linie und ein Kreis gegeben; man soll an den Kreis eine Berührende ziehen, welche der gegebenen Linie parallel ist.

Man nehme den Mittelpunkt des gegebenen Kreises als Anfang, einen seiner Durchmesser als Axe der Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems an. Die Gleichung der gegebenen Linie sey

$$y = ax + b\ ;$$

die Coordinaten des Berührungspunktes der gesuchten Berührenden seyen x', y'; der Halbmesser des Kreises, welcher gegeben ist, sey $= r$. Die Gleichung der gesuchten Berührenden ist nach (3.)

$$x'x + y'y = r^2,\ y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}.$$

Weil diese Berührende der gegebenen geraden Linie parallel ist; so ist

$$a = -\frac{x'}{y'},\ ay' = -x'.$$

Da ferner der Punkt (x', y') in der Peripherie des gegebenen Kreises liegt; so ist

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Aus den Gleichungen

$$ay' = -x',\ x'^2 + y'^2 = r^2$$

müssen x', y' bestimmt werden. Man findet leicht:

$$x' = \pm\frac{ar}{\sqrt{1+a^2}},\ y' = \mp\frac{r}{\sqrt{1+a^2}};$$

so daß es also jederzeit zwei Auflösungen unserer Aufgabe giebt. Will man die Abscisse des Durchschnittspunktes der Berührenden mit der Abscissenaxe haben; so muß man, wenn wir diese Abscisse durch z bezeichnen, in der Gleichung

$$x'x + y'y = r^2$$

$x = z$, $y = 0$ setzen. Dies giebt

$$x'z = r^2,\ z = \frac{r^2}{x'}.$$

Also, wenn wir für x' seinen vorher gefundenen Ausdruck setzen:

$$z = \pm\frac{r\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

8. C und C' seyen die Mittelpunkte zweier beliebigen Kreise in einer Ebene, deren Halbmesser wir durch r und r' bezeichnen wollen. Man soll den geometrischen Ort aller der Punkte finden, von denen sich zwei gleiche berührende Linien an die beiden gegebenen Kreise ziehen lassen, so daß nämlich die zwischen den Berührungspunkten und dem Durchschnittspunkte zweier einander entsprechenden Berührenden liegenden Stücke derselben jederzeit einander gleich sind.

Man nehme CC' als Axe, C als Anfang der Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und bezeichne die Coordinaten des Durchschnittspunktes A zweier beliebigen einander gleichen Berührenden, deren jede wir = t setzen wollen, in Bezug auf dieses System durch x, y, die Abscisse von C' aber durch a. Die Entfernungen des Punktes A von den Mittelpunkten C und C' der beiden gegebenen Kreise seyen p und p'; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$p^2 - r^2 = p'^2 - r'^2 = t^2 .$$

Ferner ist auch

$$p^2 - x^2 = p'^2 - (a-x)^2 = y^2 .$$

Folglich

$$p^2 - p'^2 = r^2 - r'^2, \; p^2 - p'^2 = x^2 - (a-x)^2 ;$$
$$r^2 - r'^2 = x^2 - (a-x)^2 .$$

Also

$$x = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} .$$

Es ist also x eine constante Größe, d. h. der gesuchte geometrische Ort ist eine auf der Linie CC' senkrechte gerade Linie, deren Entfernung von C durch den obigen Werth von x bestimmt wird. Die Entfernung dieses Perpendikels von C' ist =

$$a - x = \frac{a^2 + r'^2 - r^2}{2a} .$$

Das so eben seiner Lage nach bestimmte Perpendikel nennen französische Schriftsteller die Radical-Axe der beiden Kreise, indem wir es hier vorziehen, den französischen Ausdruck axe radical beizubehalten, ohne eine Uebersetzung desselben, wie z. B. durch Wurzelaxe, Uraxe u. dgl., zu versuchen.

Berühren die beiden Kreise einander, so ist a = r + r', woraus man leicht x = r findet, d. h. die Radical-Axe zweier sich berührenden Kreise ist ihre gemeinschaftliche Berührende.

Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist ihre gemeinschaftliche Sehne ihre Radical-Axe. Ist nämlich EE' die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise, und D der Durchschnittspunkt derselben mit der Centrallinie CC'; so ist offenbar

$$CD^2 = CE^2 - DE^2 = r^2 - DE^2 = r^2 - (r'^2 - C'D^2)$$
$$= r^2 - r'^2 + C'D^2 = r^2 - r'^2 + (a - CD)^2 ,$$

woraus leicht

$$CD = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a}$$

folgt, wie erfordert wird, wenn EE' die Radical-Axe der beiden Kreise seyn soll.

9. Die Gleichung der Radicalaxe zweier Kreise, deren Gleichungen überhaupt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 = r'^2$$

sind, läßt sich auf folgende Art finden. Ist

$$y = Ax + B$$

die Gleichung der Centrallinie der beiden Kreise; so ist

$$b = Aa + B,\ b' = Aa' + B;$$
$$y - b = A(x-a) = \frac{b-b'}{a-a'}(x-a).$$

Folglich

$$(b-b')(x-a) - (a-a')(y-b) = 0$$

die Gleichung der Centrallinie. Die Radicalaxe ist auf der Centrallinie senkrecht; folglich, wenn

$$y = A'x + B'$$

die Gleichung der erstern ist:

$$1 + AA' = 1 + \frac{b-b'}{a-a'}A' = 0,\ A' = -\frac{a-a'}{b-b'}.$$

Also

$$(a-a')x + (b-b')y = (b-b')B'$$

die Gleichung der Radicalaxe, wo nun aber noch B' bestimmt werden muß.

Um die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Radicalaxe und Centrallinie zu finden, muß man x, y aus den beiden Gleichungen:

$$(b-b')(x-a) - (a-a')(y-b) = 0,$$
$$(a-a')x + (b-b')y = (b-b')B',$$

oder

$$(b-b')(x-a) - (a-a')(y-b) = 0,$$
$$(a-a')(x-a) + (b-b')(y-b) = (b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')$$

bestimmen. Dadurch erhält man:

$$x - a = \frac{(a-a')\{(b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')\}}{(a-a')^2 + (b-b')^2},$$

$$y - b = \frac{(b-b')\{(b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')\}}{(a-a')^2 + (b-b')^2}.$$

Folglich ist das Quadrat der Entfernung des Durchschnittspunktes der Centrallinie und Radicalaxe von dem Mittelpunkte des ersten der beiden gegebenen Kreise

$$= \frac{\{(b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')\}^2}{(a-a')^2 + (b-b')^2}.$$

Nach (8.) ist aber dieses Quadrat

$$= \frac{\{(a-a')^2 + (b-b')^2 + r^2 - r'^2\}^2}{4\{(a-a')^2 + (b-b')^2\}}.$$

Dies giebt die Gleichung

$$4\{(b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')\}^2 = \{(a-a')^2 + (b-b')^2 + r^2 - r'^2\}^2,$$

oder, wenn man die Quadratwurzel auf beiden Seiten auszieht:

$$2\{(b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')\} = \pm\{(a-a')^2 + (b-b')^2 + r^2 - r'^2\}.$$

Es ist nun bloß noch zu bestimmen, welches Zeichen man zu nehmen hat. Zu dieser Bestimmung gelangt man auf folgende Art. Will man die Absciſſe des Durchschnittspunktes der Radicalaxe mit der Abscissenaxe finden; so muß man in der Gleichung

$$(a-a')x + (b-b')y = (b-b')B'$$

der Radicalaxe $y = 0$ setzen, und x bestimmen. Dies giebt:

$$x = \frac{(b-b')B'}{a-a'}.$$

Nimmt man die Centrallinie als Axe, den Mittelpunkt des ersten Kreises als Anfang der Abscissen, d. i. $a = b = 0$, $b' = 0$; so muß nach (8.) dieser Ausdruck in

$$\frac{a'^2 + r^2 - r'^2}{2a'}$$

übergehen. Dies ist aber der Fall, wenn man

$$2\{(b-b')B' - a(a-a') - b(b-b')\} = -\{(a-a')^2 + (b-b')^2 + r^2 - r'^2\},$$

$$\frac{(b-b')B'}{a-a'} - a - \frac{b(b-b')}{a-a'} = -\frac{(a-a')^2 + (b-b')^2 + r^2 - r'^2}{2(a-a')},$$

setzt, wie sogleich erhellet. Man erhält also

$$B' = \frac{a^2 + b^2 - r^2 - (a'^2 + b'^2 - r'^2)}{2(b-b')}.$$

Folglich ist die Gleichung der Radicalaxe

$$(a-a')x + (b-b')y = \tfrac{1}{2}\{a^2 + b^2 - r^2 - (a'^2 + b'^2 - r'^2)\}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes Coordinatensystem.

10. Die Radical-Axen dreier Kreise, zu je zweien verbunden, schneiden sich jederzeit in einem Punkte.

Seyen C, C', C'' die Mittelpunkte der drei Kreise. Der Durchschnittspunkt der Radical-Axen der Kreise C, C' und C', C'' sey A, und von A seyen an die Kreise C, C' die gleichen Berührenden AB, AB', an die Kreise C', C'' die gleichen Berührenden AB_1, AB'' gezogen, so daß also

$$AB = AB',\ AB_1 = AB''$$

ist. Da aber AB', AB_1 zwei von A an den Kreis C' gezogene Berührende sind; so ist nach bekannten Elementarsätzen $AB' = AB_1$,

folglich auch $AB = AB''$, so daß also AB und AB'' zwei gleiche an die Kreise C und C'' gezogene Berührende sind, A also ein Punkt der Radical-Axe der Kreise C und C'' ist, woraus sich der zu beweisende Satz unmittelbar ergiebt. A heißt bei französischen Schriftstellern das Radical-Centrum (centre radical) der drei Kreise C, C', C'', von welchem sich also jederzeit sechs unter einander gleiche Berührende an diese drei Kreise ziehen lassen.

Schneiden sich also drei Kreise in einer Ebene gegenseitig; so schneiden ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen sich jederzeit in einem Punkte (8.).

Sind die Gleichungen der drei Kreise:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 ,$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 = r'^2 ,$$
$$(x-a'')^2 + (y-b'')^2 = r''^2 ;$$

so sind

$$a^2 + b^2,\ a'^2 + b'^2,\ a''^2 + b''^2$$

die Quadrate der Entfernungen ihrer Mittelpunkte von dem Anfange der Coordinaten. Nimmt man nun das Radical-Centrum der drei Kreise, von welchem sich sechs unter einander gleiche Berührende an dieselben ziehen lassen, als Anfang der Coordinaten an; so ist offenbar

$$a^2 + b^2 - r^2 = a'^2 + b'^2 - r'^2 = a''^2 + b''^2 - r''^2 .$$

Folglich sind nach (9.), wenn man das Radical-Centrum dreier Kreise als Anfang der Coordinaten annimmt, die Gleichungen der Radicalaxen des ersten und zweiten, zweiten und dritten, ersten und dritten Kreises:

$$(a-a')x + (b-b')y = 0 ,$$
$$(a'-a'')x + (b'-b'')y = 0 ,$$
$$(a''-a)x + (b''-b)y = 0 .$$

11. Man denke sich jetzt zwei mit beliebigen Halbmessern um C und C' beschriebene Kugeln, und nehme an, daß A ein Punkt sey, von welchem zwei einander gleiche Berührende an die beiden Kugeln gezogen werden können; so lassen sich offenbar um die beiden Kugeln zwei Kegelflächen beschreiben, deren Spitzen in A liegen, und bei denen alle Seiten einander gleich sind. Legt man nun durch A, C, C' eine Ebene; so sind die Durchschnitte derselben mit den beiden Kugeln zwei Kreise, in deren Radical-Axe A liegt. Setzen wir $CC' = a$, und bezeichnen die Halbmesser der beiden Kugeln durch r, r'; so sind die Entfernungen dieser Radical-Axe von C und C' nach (8.) respective

$$\frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} \text{ und } \frac{a^2 + r'^2 - r^2}{2a} .$$

Man schließt hieraus leicht, daß alle Punkte, von welchen sich zwei gleiche Berührende an zwei beliebige Kugeln ziehen lassen,

in einer auf deren Centrallinie senkrechten Ebene liegen, deren Entfernung von den Mittelpunkten der beiden Kugeln auf die obige Weise bestimmt wird. Man nennt diese Ebene die Radical-Ebene der beiden Kugeln.

Eben so leicht wie in (10.) überzeugt man sich, daß die Radical-Ebenen dreier Kugeln, deren Mittelpunkte C, C′, C″ sind, sich jederzeit in einer geraden Linie schneiden, welche auf der Centralebene CC′C″ senkrecht ist, und die Radical-Axe der drei Kugeln genannt wird. Die Radical-Axen von vier zu je dreien verbundenen Kugeln schneiden sich jederzeit in einem Punkte, welcher das Radical-Centrum der vier Kugeln heißt.

Von den Eigenschaften der Radical-Axen lassen sich manche interessante Anwendungen machen. M. s. z. B. eine Abhandlung von Sarrus über die Verzeichnung der Sonnenuhren in den **Annales de Mathématiques. T. XVII. p. 257.**

12. Die vorhergehenden Sätze führen auch zu größtentheils sehr eleganten Auflösungen der Probleme über die Berührungen der Kreise unter einander und mit geraden Linien, worüber wir jetzt Einiges mittheilen wollen, indem wir weiterer Ausführung wegen auf einen trefflichen Aufsatz von Plücker in den **Annales de Mathématiques. T. XVIII. p. 29.** verweisen.

Sey z. B. ein Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht, und einen gegebenen Kreis berührt.

Es ist klar, daß die Aufgabe zwei Auflösungen zuläßt. Wir haben also drei Kreise, von denen zwei, die zugleich beide den gegebenen Kreis berühren, durch die beiden gegebenen Punkte gehen. Die Radical-Axen dieser drei Kreise sind also nach (8.) die gerade Linie, welche durch die beiden gegebenen Punkte bestimmt wird, und die beiden gemeinschaftlichen Berührenden der sich berührenden Kreise. Diese drei Radical-Axen schneiden sich in einem Punkte (10.), dem Radical-Centrum der drei Kreise. Denkt man sich nun statt des einen der beiden durch die zwei gegebenen Punkte gehenden und den gegebenen Kreis berührenden Kreise einen beliebigen Kreis gesetzt, welcher durch die beiden gegebenen Punkte geht, und den gegebenen Kreis schneidet; so ist das Radical-Centrum dieser drei Kreise der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden geraden Linie, der gemeinschaftlichen Berührenden der beiden sich berührenden Kreise, und der durch die beiden Durchschnittspunkte der zwei sich schneidenden Kreise bestimmten geraden Linie. Die Radical-Centra beider Systeme dreier Kreise fallen also offenbar in einen Punkt zusammen, indem dieselben beide Mal durch den Durchschnittspunkt der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden geraden Linie und der gemeinschaftlichen Berührenden der zwei sich berührenden Kreise bestimmt werden. Man findet folglich das Radical-Centrum des ersten Systems sehr

leicht, wenn man einen durch die beiden gegebenen Punkte gehenden Kreis beschreibt, welcher den gegebenen Kreis schneidet, und die beiden auf diese Weise erhaltenen Durchschnittspunkte, so wie die beiden gegebenen Punkte, durch gerade Linien verbindet, indem dann der Durchschnittspunkt dieser beiden geraden Linien das gesuchte Radical-Centrum seyn wird. Zieht man nun von demselben an den gegebenen Kreis zwei Berührende, so sind die Berührungspunkte derselben mit dem gegebenen Kreise die Punkte, in welchen letzterer von den gesuchten zwei Kreisen berührt wird. Man braucht nun also bloß noch durch diese beiden Punkte zwei Halbmesser des gegebenen Kreises zu ziehen, und auf die Linie, welche die beiden gegebenen Punkte mit einander verbindet, durch deren Mitte eine Senkrechte zu errichten; so sind die Durchschnittspunkte derselben mit den beiden vorher gezogenen Radien des gegebenen Kreises die Mittelpunkte der beiden gesuchten Kreise.

13. Sey ferner ein Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht, und eine gegebene gerade Linie berührt.

Man denke sich den gesuchten Kreis und durch die beiden gegebenen Punkte einen beliebigen Kreis beschrieben. Die gerade Linie, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht, ist die Radical-Axe dieser beiden Kreise, welche bekanntlich die Eigenschaft hat, daß die beiden Berührenden, welche sich von jedem ihrer Punkte an die beiden Kreise ziehen lassen, einander gleich sind. Dies führt sogleich zu folgender Auflösung unserer Aufgabe. Durch die beiden gegebenen Punkte beschreibe man einen beliebigen Kreis, ziehe von dem Durchschnittspunkte der die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie mit der gegebenen Linie eine Berührende an denselben, und schneide deren Länge von dem in Rede stehenden Durchschnittspunkte aus auf beiden Seiten desselben auf der gegebenen geraden Linie ab; so sind die beiden auf diese Weise erhaltenen Punkte die Berührungspunkte der gegebenen geraden Linie mit zwei Kreisen, die zugleich durch die beiden gegebenen Punkte gehen, woraus auch erhellet, daß die Aufgabe im Allgemeinen zweier Auflösungen fähig ist. Sie ist nun auf die bekannte Elementar-Aufgabe: durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, zurückgeführt, und demnach als aufgelöst zu betrachten.

14. Man denke sich jetzt zwei beliebige Kreise in einer Ebene, deren Halbmesser r, r', die Mittelpunkte C, C' seyn sollen. Von den Mittelpunkten aus kann man sich zwei beliebige einander parallele Halbmesser CA, $C'A'$ gezogen denken, entweder auf der einen Seite der Centrallinie, oder auf entgegengesetzten Seiten derselben. Man ziehe nun die Linie AA', und bezeichne deren Durchschnittspunkt mit der Centrallinie durch O.

Man nehme jetzt die Centrallinie als Axe, den Mittelpunkt C des ersten der beiden gegebenen Kreise als Anfang der Abscissen

an, und bezeichne die Abscissen von C′ und O respective durch a und x. Es ist nun offenbar

$$CA : C'A' = CO : C'O \,.$$

Folglich, wenn CA und C′A′ auf einer Seite der Centrallinie liegen:

$$CA : CA - C'A' = CO : CO - C'O \,,$$

d. i.

$$r : r - r' = x : a \,;$$

und, wenn CA und C′A′ auf entgegengesetzten Seiten der Centrallinie liegen:

$$CA : CA + C'A' = CO : CO + C'O \,,$$

d. i.

$$r : r + r' = x : a \,.$$

Folglich

$$x = \frac{ar}{r \mp r'} \,,$$

wo das obere Zeichen dem ersten, das untere dem zweiten Falle entspricht. In beiden Fällen ist x eine constante Größe, woraus man sieht, daß sowohl alle Linien, welche die Endpunkte zweier von den Mittelpunkten der beiden Kreise aus nach einerlei Richtung hin liegender paralleler Halbmesser mit einander verbinden, sich in einem Punkte O, als auch alle Linien, welche die Endpunkte zweier von den Mittelpunkten aus nach entgegengesetzten Richtungen hin liegender paralleler Halbmesser mit einander verbinden, sich in einem Punkte O′ der Centrallinie der beiden Kreise schneiden. Zugleich erhellet aus (5.), daß O und O′ die Durchschnittspunkte der beiden äußern und der beiden innern Berührenden der beiden gegebenen Kreise sind, wenn sich überhaupt an die beiden Kreise gemeinschaftliche Berührende ziehen lassen.

Mit den meisten neuern Schriftstellern sollen die Punkte O und O′ die Aehnlichkeitspunkte (Centres de similitude) der beiden gegebenen Kreise, und zwar O der äußere oder directe Aehnlichkeitspunkt (Centre de similitude directe), O′ der innere oder inverse Aehnlichkeitspunkt (Centre de similitude inverse) genannt werden. Diese Punkte haben verschiedene merkwürdige Eigenschaften, von denen jetzt einige bewiesen werden sollen.

15. Zuerst wollen wir die Coordinaten der Aehnlichkeitspunkte in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem zu finden suchen. Zu dem Ende seyen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \,,$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 = r'^2$$

die Gleichungen zweier Kreise, und X, Y die Coordinaten ihrer Aehnlichkeitspunkte. Die Gleichung der Centrallinie sey

$$y = Ax + B \,;$$

so ist

$$b = Aa + B, \; b' = Aa' + B \,;$$

$$y - b = A(x - a),\ b - b' = A(a - a');$$

$$\frac{y - b}{b - b'} = \frac{x - a}{a - a'},$$

oder

$$(a - a')(y - b) = (b - b')(x - a)$$

die Gleichung der Centrallinie. Folglich auch

$$(a - a')(Y - b) = (b - b')(X - a).$$

Das Quadrat der Entfernung der Aehnlichkeitspunkte von dem Mittelpunkte des ersten Kreises ist

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2,$$

so wie

$$(a - a')^2 + (b - b')^2$$

das Quadrat der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kreise von einander, d. i.

$$\alpha^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2.$$

Ferner ist nach (14.)

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = \frac{r^2 \alpha^2}{(r \mp r')^2},$$

$$(a - a')^2 (X - a)^2 + (a - a')^2 (Y - b)^2 = r^2 \alpha^2 \left(\frac{a - a'}{r \mp r'}\right)^2;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\{(a - a')^2 + (b - b')^2\}(X - a)^2 = r^2 \alpha^2 \left(\frac{a - a'}{r \mp r'}\right)^2,$$

$$(X - a)^2 = r^2 \left(\frac{a - a'}{r \mp r'}\right)^2,\ X - a = \pm r \frac{a - a'}{r \mp r'}.$$

Es fragt sich nun, ob man hier, indem man die Quadratwurzel auszieht, das Zeichen + oder — nehmen muß. Setzte man

$$X - a = r \frac{a - a'}{r \mp r'},$$

so erhielte man für $a = 0$, d. i., wenn man den Mittelpunkt des ersten Kreises als Anfang der Abscissen annähme,

$$X = - \frac{ra'}{r \mp r'},$$

da doch nach (14.) für diesen Fall

$$X = \frac{ra'}{r \mp r'}$$

ist. Man muß also die Quadratwurzel negativ nehmen. Dadurch erhält man:

$$X - a = - r \frac{a - a'}{r \mp r'},\ Y - b = - r \frac{b - b'}{r \mp r'};$$

$$X = \frac{ra' \mp r'a}{r \mp r'},\ Y = \frac{rb' \mp r'b}{r \mp r'}.$$

Die obern Zeichen entsprechen dem directen, die untern dem inversen Aehnlichkeitspunkte.

16. Für drei Kreise, wenn man dieselben zu zweien mit einander verbindet, giebt es sechs Aehnlichkeitspunkte, drei äußere oder directe, und drei innere oder inverse. Sind

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\,,$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2\,,$$
$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=r''^2$$

die Gleichungen der drei Kreise; so sind

$$X=\frac{ra'\mp r'a}{r\mp r'},\ Y=\frac{rb'\mp r'b}{r\mp r'}\,;$$
$$X=\frac{r'a''\mp r''a'}{r'\mp r''},\ Y=\frac{r'b''\mp r''b'}{r'\mp r''}\,;$$
$$X=\frac{r''a\mp ra''}{r''\mp r},\ Y=\frac{r''b\mp rb''}{r''\mp r}$$

die Coordinaten ihrer sechs Aehnlichkeitspunkte, indem immer die obern Zeichen den directen, die untern den inversen Aehnlichkeitspunkten entsprechen. Bezeichnet man die drei directen Aehnlichkeitspunkte durch **A**, **A'**, **A''**, die drei inversen durch A_1, A_1', A_1''; so erhält man leicht für die durch **A** und **A'** gehende gerade Linie die Gleichung:

$$y-\frac{rb'-r'b}{r-r'}=\frac{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')}{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')}\left\{x-\frac{ra'-r'a}{r-r'}\right\}.$$

Will man die Gleichung der durch **A** und **A''** gehenden geraden Linie finden, so muß man in vorstehender Gleichung in dem constanten Coefficienten auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, wie leicht erhellen wird, r und r', b und b', a und a' gegen einander umtauschen. Dadurch erleidet aber die vorhergehende Gleichung keine Veränderung, so daß also die directen Aehnlichkeitspunkte **A**, **A'**, **A''** jederzeit in einer geraden Linie liegen, womit man auch (6.) vergleichen kann. Ganz eben so überzeugt man sich, daß auch die drei Punkte **A**, A_1', A_1'', so wie **A'**, A_1, A_1'' und **A''**, A_1, A_1', in einer geraden Linie liegen. Die Gleichungen der drei geraden Linien $AA_1'A_1''$, $A'A_1A_1''$, $A''A_1A_1'$ sind:

$$y-\frac{rb'-r'b}{r-r'}=\frac{r(b'-b'')+r'(b''-b)-r''(b-b')}{r(a'-a'')+r'(a''-a)-r''(a-a')}\left\{x-\frac{ra'-r'a}{r-r'}\right\},$$

$$y-\frac{r'b''-r''b'}{r'-r''}=\frac{-r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')}{-r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')}\left\{x-\frac{r'a''-r''a'}{r'-r''}\right\},$$

$$y-\frac{r''b-rb''}{r''-r}=\frac{r(b'-b'')-r'(b''-b)+r''(b-b')}{r(a'-a'')-r'(a''-a)+r''(a-a')}\left\{x-\frac{r''a-rb''}{r''-r}\right\}.$$

Die vier geraden Linien $AA'A''$, $AA_1'A_1''$, $A'A_1A_1''$, $A''A_1A_1'$ heißen die Aehnlichkeitslinien oder Aehnlichkeitsaxen der drei gegebenen Kreise, und zwar die erste die directe Aehnlichkeitsaxe (Axe de similitude directe), die drei letzten die inversen Aehnlichkeitsaxen (Axes de similitude inverse).

17. Aendern sich die Halbmesser der drei in (16.) betrachteten Kreise, indem die Lage der Mittelpunkte ungeändert bleibt, um die beliebige positive oder negative Größe ϱ; so werden die Gleichungen dieser Kreise:

$$(x-a)^2+(y-b')^2=(r+\varrho)^2,$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2=(r'+\varrho)^2,$$
$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=(r''+\varrho)^2.$$

Die Gleichungen der Radicalaxen des ersten und zweiten, zweiten und dritten, ersten und dritten Kreises sind nach (9.):

$$(a-a')x+(b-b')y=\tfrac{1}{2}\{a^2+b^2-(r+\varrho)^2-(a'^2+b'^2-(r'+\varrho)^2)\},$$
$$(a'-a'')x+(b'-b'')y=\tfrac{1}{2}\{a'^2+b'^2-(r'+\varrho)^2-(a''^2+b''^2-(r''+\varrho)^2)\},$$
$$(a''-a)x+(b''-b)y=\tfrac{1}{2}\{a''^2+b''^2-(r''+\varrho)^2-(a^2+b^2-(r+\varrho)^2)\}.$$

Nimmt man aber das Radical-Centrum der drei primitiven Kreise, deren Halbmesser r, r', r'' sind, als Anfang der Abscissen an; so ist nach (10.)

$$a^2+b^2-r^2=a'^2+b'^2-r'^2=a''^2+b''^2-r''^2.$$

Unter dieser Voraussetzung werden die vorhergehenden Gleichungen:

$$(a-a')x+(b-b')y+(r-r')\varrho=0,$$
$$(a'-a'')x+(b'-b'')y+(r'-r'')\varrho=0,$$
$$(a''-a)x+(b''-b)y+(r''-r)\varrho=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit r'', r, r', und addirt sie zu einander, so verschwindet ϱ, und man erhält die Gleichung:

$$\{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')\}x+\{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')\}y=0.$$

Dies ist eine lineare Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen, also die Gleichung einer geraden Linie. Man schließt daher aus dem Vorhergehenden, daß die Radical-Centra aller Systeme dreier Kreise, welche man erhält, wenn man die Halbmesser dreier gegebenen Kreise, ohne die Lage der Mittelpunkte zu ändern, sich um beliebige, aber gleiche, Größen verändern läßt, jederzeit in einer der Lage nach völlig bestimmten geraden Linie liegen.

Vergleicht man die Gleichung

$$y=-\frac{r(a'-a'')+r'(a''-a)+r''(a-a')}{r(b'-b'')+r'(b''-b)+r''(b-b')}x$$

der in Rede stehenden geraden Linie mit der in (16.) gefundenen Gleichung der directen Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise; so erhellet augenblicklich, daß diese beiden Linien auf einander senkrecht sind, die erstere folglich leicht gefunden werden kann, wenn man von dem Radical-Centrum der drei gegebenen Kreise auf ihre directe Aehnlichkeitsaxe ein Perpendikel fällt.

Ließe man die Halbmesser sich ebenfalls um gleiche Größen verändern, aber theils wachsen, theils abnehmen, so würde alles

Vorhergehende, wie leicht erhellet, noch seine Richtigkeit behalten; nur würde die in Rede stehende gerade Linie nicht mehr auf der directen Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise, sondern auf einer ihrer inversen Aehnlichkeitsaxen senkrecht seyn. Die Ausführung des Beweises hat nach dem Obigen keine Schwierigkeit.

Noch ist zu bemerken, daß man, wie aus dem Obigen ebenfalls leicht hervorgehen wird, für r, r', r'' sowohl $r-\varrho$, $r'-\varrho$, $r''-\varrho$, als auch $\varrho-r$, $\varrho-r'$, $\varrho-r''$ setzen kann.

18. Die Gleichungen zweier Kreise, deren Centrallinie wir als Axe der x annehmen wollen, seyen

$$(x-a)^2+y^2=r^2\,,$$
$$(x-a')^2+y^2=r'^2\,.$$

Nimmt man die Radical-Axe der beiden Kreise als Axe der y an; so ist, wie leicht erhellet,

$$a^2-r^2=a'^2-r'^2\,.$$

Die Gleichung eines dritten Kreises sey

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2\,.$$

Die Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes dieses Kreises von den Mittelpunkten der beiden ersten Kreise sind

$$(A-a)^2+B^2 \text{ und } (A-a')^2+B^2\,.$$

Berührt nun der dritte Kreis die beiden ersten auf dieselbe Art; so ist, wie sogleich erhellet:

$$(A-a)^2+B^2=(R\pm r)^2\,,$$
$$(A-a')^2+B^2=(R\pm r')^2\,;$$

folglich, wenn man die erste Gleichung von der zweiten subtrahirt:

$$2(a-a')A-a^2+a'^2=\mp 2(r-r')R-r^2+r'^2\,,$$

d. i., weil $a^2-r^2=a'^2-r'^2$ ist:

$$(a-a')A=\mp(r-r')R\,.$$

Berührt der dritte Kreis die beiden ersten auf entgegengesetzte Weise; so ist

$$(A-a)^2+B^2=(R\pm r)^2\,,$$
$$(A-a')^2+B^2=(R\mp r')^2\,;$$

folglich durch Subtraction:

$$2(a-a')A-a^2+a'^2=\mp 2(r+r')R-r^2+r'^2\,,$$
$$(a-a')A=\mp(r+r')R\,.$$

Denken wir uns nun einen vierten Kreis, dessen Gleichung

$$(x-A')^2+(y-B')^2=R'^2$$

ist. Werden die beiden ersten Kreise von den beiden letzten auf gleiche Art berührt; so hat man:

$$(a-a')A=\mp(r-r')R \text{ oder } (a-a')A=\mp(r+r')R\,,$$

und respective

$$(a-a')A'=\mp(r-r')R' \text{ oder } (a-a')A'=\mp(r+r')R'\,.$$

Werden aber die beiden ersten Kreise von den beiden letzten auf entgegengesetzte Arten berührt; so hat man:

$$(a-a')A = \mp (r-r')R \text{ oder } (a-a')A = \mp (r+r')R,$$

und respective

$$(a-a')A' = \pm (r-r')R' \text{ oder } (a-a')A' = \pm (r+r')R'.$$

Im ersten Falle ist also

$$\frac{A}{R} = \frac{A'}{R'},\ RA'-R'A = o,\ \frac{RA'-R'A}{R-R'} = o;$$

dagegen im zweiten

$$\frac{A}{R} = -\frac{A'}{R'},\ RA'+R'A = o,\ \frac{RA'+R'A}{R+R'} = o.$$

Hieraus ergiebt sich nun mittelst (15.) augenblicklich folgender Satz:

Wenn zwei Kreise von zwei andern auf gleiche oder entgegengesetzte Arten berührt werden; so liegt im ersten Falle der directe, im zweiten der inverse Aehnlichkeitspunkt der zwei letzten Kreise in der Radical-Axe der beiden ersten.

Daß umgekehrt auch immer einer der beiden Aehnlichkeitspunkte der zwei ersten Kreise in der Radical-Axe der beiden letzten liegen wird, versteht sich von selbst.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar auch das folgende merkwürdige Theorem:

Wenn zwei Kreise drei andere auf gleiche oder entgegengesetzte Arten berühren, so fällt immer im ersten Falle der directe, im zweiten der inverse Aehnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise mit dem Radical-Centrum der drei letzten Kreise zusammen.

19. Seyen jetzt (C), (C′), (C″) drei beliebige Kreise. Diese drei Kreise können überhaupt von acht andern Kreisen berührt werden, welche wir durch

aaa, aai, aia, aii;
iii, iia, iai, iaa

bezeichnen wollen, so daß nämlich z. B. aia einen Kreis bezeichnet, welcher den Kreis (C) außerhalb, den Kreis (C′) innerhalb, den Kreis (C″) außerhalb berührt. Eben so bezeichnet iii einen Kreis, welcher alle drei gegebene Kreise innerhalb berührt. Bezeichnen wir nun wieder die directen und inversen Aehnlichkeitspunkte der drei gegebenen Kreise (C), (C′), (C″) durch A, A', A'' und A_1, A_1', A_1''; so läßt sich Folgendes schließen. Je zwei der Kreise (C), (C′), (C″) berühren die beiden Kreise aaa und iii auf einerlei Art; also liegen nach (18.) die drei directen Aehnlichkeitspunkte der drei ersten Kreise in der

Radical-Axe der beiden letzten Kreise, d. i. die Aehnlichkeitsaxe $AA'A''$ ist die Radical-Axe der Kreise aaa und iii. Die Kreise (C), (C') berühren die Kreise aai und iia auf einerlei Weise, die Kreise (C), (C'') dagegen, so wie auch die Kreise (C'), (C'') berühren die Kreise aai, iia auf entgegengesetzte Arten. Folglich ist die Aehnlichkeitsaxe $AA_1'A_1''$ die Radical-Axe der Kreise aai und iia. Die Kreise (C), (C'') berühren die Kreise aia und iai auf einerlei Art, die Kreise (C), (C') und (C'), (C'') dagegen dieselben Kreise auf verschiedene Arten. Es ist also nach (18.) die Aehnlichkeitsaxe $A'A_1A_1''$ die Radical-Axe der Kreise aia und iai. Die Kreise (C'), (C'') berühren die Kreise aii, iaa auf einerlei Art, die Kreise (C), (C') und (C), (C'') dagegen auf entgegengesetzte Art. Folglich ist die Aehnlichkeitsaxe $A''A_1A_1'$ die Radical-Axe von aii und iaa. Hieraus ergiebt sich der folgende überaus merkwürdige von Monge gefundene Satz:

Wenn drei Kreise (C), (C'), (C''), deren Aehnlichkeitsaxen $AA'A''$, $AA_1'A''$, $A'A_1A_1''$, $A''A_1A_1'$ sind, von den acht Kreisen

aaa, aai, aia, aii;
iii, iia, iai, iaa

berührt werden; so sind die Aehnlichkeitsaxen

$AA'A''$, $AA_1'A_1''$, $A'A_1A_1''$, $A''A_1A_1'$

respective die Radical-Axen der Kreise

aaa, iii;
aai, iia;
aia, iai;
aii, iaa.

Nach (18.) ist ferner das Radical-Centrum der drei gegebenen Kreise (C), (C'), (C'') jederzeit ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise

aaa, iii;
aai, iia;
aia, iai;
aii, iaa.

Die Aehnlichkeitspunkte liegen jederzeit in der Centrallinie der beiden Kreise, welchen sie entsprechen, und die Radical-Axe ist auf der Centrallinie senkrecht. Man erhält folglich die Centrallinien der vier Paare

aaa, iii;
aai, iia;
aia, iai;
aii, iaa

der acht die drei Kreise (C), (C'), (C'') berührenden Kreise, wenn man das Radical-Centrum und die

Aehnlichkeitsaxen der drei gegebenen Kreise sucht, und von dem Radical-Centrum auf die vier Aehnlichkeitsaxen Perpendikel fällt. Auch dieser Satz ist einer der merkwürdigsten Sätze der Geometrie.

20. Man denke sich jetzt von einem beliebigen Punkte, dessen Coordinaten x', y' seyen, an einen Kreis zwei Berührende gezogen. Nehmen wir nun den Mittelpunkt des Kreises als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnen den Halbmesser des Kreises durch r, die Coordinaten der Berührungspunkte durch x_1, y_1; so ist nach (4.):

$$x_1 = \frac{r(x'r \pm y'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2},$$

$$y_1 = \frac{r(y'r \mp x'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2}.$$

Ist nun ferner

$$y = A_1 x + B_1$$

die Gleichung der durch die beiden Berührungspunkte gehenden geraden Linie; so ist

$$\frac{r(y'r - x'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2} = A_1 \frac{r(x'r + y'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2} + B_1,$$

$$\frac{r(y'r + x'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2} = A_1 \frac{r(x'r - y'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2} + B_1;$$

woraus sich leicht

$$A_1 = -\frac{x'}{y'}, \quad B_1 = \frac{r^2}{y'}$$

ergiebt, so daß also

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}$$

die Gleichung der in Rede stehenden geraden Linie ist.

Denkt man sich nun von beliebig vielen in einer geraden Linie liegenden Punkten, deren Coordinaten

$$x', y';\ x'', y'';\ x''', y''';\ x'''', y'''';\ \ldots.$$

seyn mögen, zwei Berührende an den Kreis gezogen, und je zwei einander entsprechende Berührungspunkte durch eine gerade Linie verbunden; so sind die Gleichungen dieser geraden Linien:

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'},$$

$$y = -\frac{x''}{y''}x + \frac{r^2}{y''},$$

$$y = -\frac{x'''}{y'''}x + \frac{r^2}{y'''},$$

$$y = -\frac{x''''}{y''''}x + \frac{r^2}{y''''},$$

u. s. f. u. s. f.

Hieraus erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der ersten dieser Linien mit allen folgenden leicht nachstehende Ausdrücke:

$$X = -\frac{r^2(y'-y'')}{x'y''-y'x''},\ Y = \frac{r^2(x'-x'')}{x'y''-y'x''};$$
$$X_1 = -\frac{r^2(y'-y''')}{x'y'''-y'x'''},\ Y_1 = \frac{r^2(x'-x''')}{x'y'''-y'x'''};$$
$$X_2 = -\frac{r^2(y'-y'''')}{x'y''''-y'x''''},\ Y_2 = \frac{r^2(x'-x'''')}{x'y''''-y'x''''};$$

u. s. f. u. s. f.

Ist nun

$$y = \alpha x + \beta$$

die Gleichung der geraden Linie, in welcher sämmtliche Punkte liegen, von denen die Berührenden ausgezogen werden; so ist

$$y' = \alpha x' + \beta,\ y'' = \alpha x'' + \beta;$$
$$y'-y'' = \alpha(x'-x'');$$
$$x'y''-y'x'' = \beta(x'-x'');$$

folglich

$$X = -\frac{\alpha r^2}{\beta},\ Y = \frac{r^2}{\beta}.$$

Ganz eben so findet man

$$X = X_1 = X_2 = X_3 = \ldots\ldots = -\frac{\alpha r^2}{\beta};$$

$$Y = Y_1 = Y_2 = Y_3 = \ldots\ldots = \frac{r^2}{\beta}.$$

Dies führt auf den folgenden merkwürdigen Lehrsatz:

Wenn die Scheitel mehrerer Winkel in beliebiger Anzahl, deren Schenkel einen gegebenen Kreis berühren, in einer geraden Linie liegen; so schneiden sich alle, zwei einander entsprechende Berührungspunkte mit einander verbindende, Sehnen in einem Punkte, welcher der Pol der geraden Linie, in welcher die Scheitel sämmtlicher um den Kreis beschriebenen Winkel liegen, in Bezug auf diesen Kreis genannt wird. Die in Rede stehende gerade Linie heißt in Bezug auf ihren Pol als solchen bei französischen Schriftstellern la polaire dieses Punktes.

Daß sich der vorhergehende Satz auch umkehren läßt, erhellet leicht.

Der Pol einer Berührenden eines Kreises ist offenbar ihr Berührungspunkt mit dem Kreise.

21. S sey die Spitze eines Winkels, dessen Schenkel einen um C beschriebenen Kreis in den Punkten P und Q berühren. P und Q kann man als die Scheitel zweier um den Kreis beschriebenen Winkel von 180° betrachten, welche, so wie die ihre

Berührungspunkte verbindenden Sehnen mit den Berührenden SP und SQ als zusammenfallend zu betrachten sind. Hieraus erhellet auf der Stelle, daß S der Pol der Linie PQ ist. Denkt man sich nun CS, welche PQ in S' halbirt, und durch S eine Parallele mit PQ gezogen; so liegt der Pol dieser Parallele offenbar in PQ (20.). Derselbe liegt aber auch in SC, weil zwei durch die beiden Punkte, in denen SC den Kreis schneidet, an denselben gezogene Berührende der durch S mit PQ parallel gezogenen Linie parallel, folglich als dieselbe, so wie sich selbst, in einer unendlichen Entfernung schneidend zu betrachten sind. Der Pol der durch S mit PQ gezogenen Parallele ist also der oben durch S' bezeichnete Punkt, d. h. der Mittelpunkt von PQ.

Mittelst dieses Satzes kann sehr leicht in jedem Falle der Pol einer gegebenen geraden Linie in Bezug auf einen gegebenen Kreis, dessen Mittelpunkt C sey, gefunden werden. Berührt die gegebene gerade Linie den gegebenen Kreis, so ist der Berührungspunkt der gesuchte Pol. Schneidet die gegebene gerade Linie den gegebenen Kreis in den Punkten P und Q, so ziehe man durch P und Q zwei Berührende an den gegebenen Kreis, deren Durchschnittspunkt S der gesuchte Pol seyn wird. Schneidet die gegebene gerade Linie den Kreis nicht, so fälle man von dem Mittelpunkte C auf dieselbe das Perpendikel CS, ziehe von S an den gegebenen Kreis die beiden Berührenden SP, SQ, und ziehe PQ; so ist der Durchschnittspunkt von PQ und CS der gesuchte Pol. Wie man zu einem gegebenen Punkte seine Polare finden kann, erhellet eben so leicht.

22. Mittelst der vorhergehenden Sätze kann man nun zu einer Construction der acht Kreise, welche drei gegebene Kreise berühren, gelangen. Indeß ist es nöthig, noch die folgenden Bemerkungen vorauszuschicken. Wir wollen setzen, daß in Fig. 2. die Kreise (c), (c') beide von dem Kreise (C) auf beliebige Art berührt werden; so ist $Cp = Cp'$, und, wenn man pp' zieht, $\angle Cpp' = \angle Cp'p$. Aber, wenn man c'q' zieht, $\angle Cp'p = \angle c'q'p'$. Also $\angle Cpp' = \angle c'q'p'$. Folglich sind die Halbmesser cp, c'q' einander parallel, und die Linie pp' geht demnach durch einen der beiden Aehnlichkeitspunkte der Kreise (c), (c'). Daß sich dasselbe für jede andere Art der Berührung, als die in der Figur dargestellte, eben so leicht beweisen läßt, fällt in die Augen. Zugleich erhellet leicht, daß pp' durch den directen oder inversen Aehnlichkeitspunkt der Kreise (c) und (c') geht, jenachdem dieselben den Kreis (C) auf einerlei Weise, oder auf entgegengesetzte Arten berühren. Denken wir uns nun ferner durch p und p' die gemeinschaftlichen Berührenden ps, p's gezogen; so ist offenbar $ps = p's$. Also liegt s in der Radical-Axe der Kreise (c) und (c') (8.). Demnach sind aus dem Punkte s der Radical-Axe von (c) und (c') an den Kreis (C) die beiden Berührenden sp, sp' gezogen. Folglich geht pp' durch

den Pol der Radical-Axe der Kreise (c), (c') in Bezug auf den Kreis (C).

23. Seyen nun die drei Kreise (C), (C'), (C") gegeben. Um die acht Kreise zu finden, von denen dieselben berührt werden, verzeichne man ihre vier Aehnlichkeitsaxen

$$AA'A'', \quad AA_1'A_1'', \quad A'A_1A_1'', \quad A''A_1A_1',$$

und ihr Radical-Centrum, welches durch R bezeichnet werden mag. Die Axe $A'A_1A_1''$ ist nach (19.) die Radical-Axe der in (19.) durch aia, iai bezeichneten Kreise. Nach (18.) ist R ein Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Kreise, und zwar in diesem Falle der inverse Aehnlichkeitspunkt. Um nun z. B. die Berührungspunkte p, p' der beiden Kreise aia, iai mit dem Kreise (C') zu finden, bedenke man, daß nach (22.) die Linie pp' durch R, und durch den Pol von $A'A_1A_1''$ in Bezug auf den Kreis (C') geht. Sucht man nun diesen Pol nach (21.), so kann man, da R bekannt ist, auch leicht die Linie pp', folglich auch die gesuchten Berührungspunkte p und p' finden, in denen der Kreis (C') von der Linie pp' geschnitten wird. Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar folgende Construction der acht Kreise, welche drei gegebene Kreise berühren:

Man suche das Radical-Centrum R der drei gegebenen Kreise (C), (C'), (C"), ihre vier Aehnlichkeitsaxen, und die zwölf Pole dieser vier Axen in Bezug auf die drei gegebenen Kreise. Zieht man nun nach diesen Polen von dem Radical-Centrum R gerade Linien, so bestimmen die Durchschnittspunkte dieser geraden Linien mit den gegebenen Kreisen die vier und zwanzig Punkte, in denen die drei gegebenen Kreise von ihren acht Berührungskreisen berührt werden, und die Aufgabe ist also hierdurch auf die bekannte Elementar-Aufgabe: durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, zurückgeführt. Wie man die vier und zwanzig Berührungspunkte zu dreien, welche in einem Berührungskreise liegen, verbinden muß, wird sich mittelst des Obigen immer leicht beurtheilen lassen.

Mehrere andere Constructionen theilt u. A. Plücker a. a. O. mit. Auch s. m. Annales de Math. T. VII. p. 289. T. XI. p. 318. T. XVII. p. 309. Crelles Journal B. I. S. 161. ff. Zu unserm Zwecke mag das Obige hinreichen. Die Modificationen, welche die obige Construction erleiden muß, wenn man für einen oder zwei der drei gegebenen Kreise Punkte oder gerade Linien setzt, bieten sich ohne große Schwierigkeit dar. Weitere Auseinandersetzungen gestattet hier der Raum nicht.

24. Um noch eine Aufgabe mitzutheilen, bei welcher die Anwendung des trigonometrischen Calculs vorzüglich bequem ist, wählen wir die folgende nach dem Italiäner Malfatti benannte Aufgabe:

In ein gegebenes Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, daß

jeder derselben die beiden andern und zwei Seiten des Dre berühre.

Das gegebene Dreieck sey ABC (Fig. 3.); seine drei W kel seyen α, β, γ, und a, b, c die denselben gegenüberstehe Seiten. Die Mittelpunkte der drei gesuchten Kreise seyen B', C', und x, y, z ihre Halbmesser. Die Linien AA', I CC' halbiren offenbar die Winkel des gegebenen Dreiecks, schneiden sich demnach in einem Punkte O, welcher der Mi punkt des in das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises ist, de Halbmesser wir durch ϱ bezeichnen wollen. Es erhellet nun leicht die Richtigkeit folgender Ausdrücke:

$$Aa' = x\cot\tfrac{1}{2}\alpha,\quad Cc'' = z\cot\tfrac{1}{2}\gamma\ ;$$

$$a'c'' = \sqrt{A'C'^2 - (A'a' - C'c'')^2} = \sqrt{(x+z)^2 - (x-z)^2} = 2\sqrt{}$$

Aber, wie ebenfalls sogleich erhellet:

$$AC = b = \varrho\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \varrho\cot\tfrac{1}{2}\gamma\ .$$

Folglich

$$x\cot\tfrac{1}{2}\alpha + z\cot\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sqrt{xz} = \varrho(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\gamma)\ ,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\varrho = 1$ setzen, zugleich mit hōriger Vertauschung der Buchstaben:

$$x\cot\tfrac{1}{2}\alpha + y\cot\tfrac{1}{2}\beta + 2\sqrt{xy} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta = c\ ,$$

$$y\cot\tfrac{1}{2}\beta + z\cot\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sqrt{yz} = \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma = a\ ,$$

$$z\cot\tfrac{1}{2}\gamma + x\cot\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sqrt{zx} = \cot\tfrac{1}{2}\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\alpha = b\ .$$

Aus diesen drei Gleichungen müssen die Halbmesser x, y, z funden werden. Die Linien

$$Aa' = x\cot\tfrac{1}{2}\alpha,\quad Bb' = y\cot\tfrac{1}{2}\beta,\quad Cc' = z\cot\tfrac{1}{2}\gamma$$

ergeben sich dann ebenfalls leicht. Durch diese Linien und Halbmesser ist aber Lage und Größe der gesuchten Kreise vollst dig bestimmt. Aus den drei Hauptgleichungen ergiebt sich:

$$\frac{x\cot\frac{1}{2}\alpha + y\cot\frac{1}{2}\beta + 2\sqrt{xy}}{\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta - 1} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta - 1}\ ,$$

$$\frac{y\cot\frac{1}{2}\beta + z\cot\frac{1}{2}\gamma + 2\sqrt{yz}}{\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma - 1} = \frac{\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma - 1}\ ,$$

$$\frac{z\cot\frac{1}{2}\gamma + x\cot\frac{1}{2}\alpha + 2\sqrt{zx}}{\cot\frac{1}{2}\gamma\cot\frac{1}{2}\alpha - 1} = \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma + \cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\gamma\cot\frac{1}{2}\alpha - 1}\ .$$

Aber (Goniometrie. 57.):

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta\cot\tfrac{1}{2}\gamma\ .$$

Also

$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta - 1}\ ,$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma - 1}\ ,$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma + \cot\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\gamma\cot\frac{1}{2}\alpha - 1}\ .$$

Ferner ist auch

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha\,\cot\tfrac{1}{2}\beta - 1 = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\gamma}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\beta\,\cot\tfrac{1}{2}\gamma - 1 = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma\,\cot\tfrac{1}{2}\alpha - 1 = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\beta}{\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Folglich

$$\frac{x\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta + y\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{xy}}{\sin\tfrac{1}{2}\gamma} = \cot\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{y\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma + z\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{yz}}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\frac{z\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha + x\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{zx}}{\sin\tfrac{1}{2}\beta} = \cot\tfrac{1}{2}\beta;$$

oder

$$x\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta + y\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{xy} = \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$y\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma + z\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{yz} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$z\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha + x\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{zx} = \cos\tfrac{1}{2}\beta.$$

Also, wenn man dividirt:

$$\frac{x\cos\tfrac{1}{2}\alpha + y\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cot\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{xy}}{y\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cot\tfrac{1}{2}\beta + z\cos\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{yz}} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\gamma}{\cos\tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$\frac{z\cos\tfrac{1}{2}\gamma + x\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cot\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{zx}}{x\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cot\tfrac{1}{2}\alpha + y\cos\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{xy}} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\beta}{\cos\tfrac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{y\cos\tfrac{1}{2}\beta + z\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cot\tfrac{1}{2}\gamma + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{yz}}{z\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cot\tfrac{1}{2}\gamma + x\cos\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{zx}} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\tfrac{1}{2}\beta}.$$

Nun ist aber

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta;$$

oder, weil $\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma = 90^\circ$ ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma);$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\beta$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\beta,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\beta\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma;$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta(\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\beta(\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin\tfrac{1}{2}\beta^2)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma(\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma(\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2)$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\beta(\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\ ,$$
$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha(\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \sin\tfrac{1}{2}\beta^2\ ,$$
$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma(\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\beta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\ .$$

Dies berücksichtigend erhält man, wenn man auf beiden S der oben gefundenen Gleichungen mit

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\gamma},\ \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta},\ \frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

multiplicirt, und die Zähler und Nenner der dadurch hervo henden Brüche einander gleich setzt, sehr leicht die Gleichung

$$x\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + y\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{xy}$$
$$= y\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 + z\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{y}$$
$$z\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 + x\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{zx}$$
$$= x\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 + y\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{x}$$
$$y\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 + z\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{yz}$$
$$= z\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + x\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{z}$$

oder, wenn man jetzt auf beiden Seiten die Quadratwur auszieht:

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{x} + \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{y} = \sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{y} + \cos\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{z}\ ,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{y} + \sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{z} = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{z} + \cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{x}\ ,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{z} + \sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{x} = \sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{x} + \cos\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{y}\ .$$

Addirt man jetzt die erste und dritte, die erste und zweite, zweite und dritte dieser Gleichungen zu einander; so erhält ma

$$(\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\gamma)\sqrt{x} + \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{y} = \sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{x} + (\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\gamma)$$
$$(\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{y} + \sin\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{z} = \sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{y} + (\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$(\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{z} + \sin\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{x} = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{z} + (\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\beta)$$

oder

$$(\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{x} = (\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{y}\ ,$$
$$(\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\gamma)\sqrt{y} = (\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{z}\ ,$$
$$(\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{z} = (\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\gamma)\sqrt{x}\ .$$

Ist aber überhaupt

$$A + B + C = 180^\circ\ ;$$

so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(B+C) + \sin\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}B(1 + \cos\tfrac{1}{2}C) - \sin\tfrac{1}{2}C(1 - \cos\tfrac{1}{2}B)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}C^2 - 2\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{4}B^2$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{4}C\cos\tfrac{1}{4}(B+C)\ .$$

Also

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta)\sqrt{x} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)\sqrt{y}\,,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sqrt{y} = \cos\tfrac{1}{2}\beta\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sqrt{z}\,,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\sqrt{z} = \cos\tfrac{1}{2}\gamma\,\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sqrt{x}\,;$$

oder

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{x} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\beta}\sqrt{y}\,,$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\beta}\sqrt{y} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{z}\,,$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{z} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{x}\,.$$

Es ist aber überhaupt

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos(45^\circ-\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C} = (1+\tang\tfrac{1}{2}C)\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.$$

Also

$$(1+\tang\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{x} = (1+\tang\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{y}\,,$$
$$(1+\tang\tfrac{1}{2}\beta)\sqrt{y} = (1+\tang\tfrac{1}{2}\gamma)\sqrt{z}\,,$$
$$(1+\tang\tfrac{1}{2}\gamma)\sqrt{z} = (1+\tang\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{x}\,;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\tang\tfrac{1}{2}\alpha = p,\quad \tang\tfrac{1}{2}\beta = q,\quad \tang\tfrac{1}{2}\gamma = r$$

setzen:

$$(1+p)\sqrt{x} = (1+q)\sqrt{y}\,,$$
$$(1+q)\sqrt{y} = (1+r)\sqrt{z}\,,$$
$$(1+r)\sqrt{z} = (1+p)\sqrt{x}\,;$$

d. i.

$$(1+p)\sqrt{x} = (1+q)\sqrt{y} = (1+r)\sqrt{z}\,.$$

Um nun x zu finden, haben wir nach dem Obigen die Gleichung

$$x\cot\tfrac{1}{2}\alpha + y\cot\tfrac{1}{2}\beta + 2\sqrt{xy} = \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta\,.$$

Aber

$$y = \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^2 x\,,\quad \sqrt{xy} = \frac{1+p}{1+q}x\,.$$

Folglich

$$\left\{\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^2.\cot\tfrac{1}{2}\beta + 2\left(\frac{1+p}{1+q}\right)\right\}x = \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta\,.$$

Aber nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\tang\frac{1}{2}\alpha^2}{2\tang\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1-p^2}{2p}\,,$$
$$\cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{1-\tang\frac{1}{2}\beta^2}{2\tang\frac{1}{2}\beta} = \frac{1-q^2}{2q}\,;$$
$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{(p+q)(1-pq)}{2pq}\,.$$

Setzt man dies in die obige Gleichung, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\{p(1+p)(1-q)+q(1+q)(1-p)+4pq\}x=\frac{(p+q)(1-pq)(1-}{1+p}$$

$$\{(p+q)(1-pq)+(p+q)^2\}x=\frac{(p+q)(1-pq)(1+q)}{1+p}.$$

$$\left\{1+\frac{p+q}{1-pq}\right\}x=\frac{1+q}{1+p}.$$

Aber

$$\frac{p+q}{1-pq}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha+\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta}{1-\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta}=\text{tang}(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)$$

$$=\text{tang}(45^0-\tfrac{1}{2}\gamma)=\frac{\sin(45^0-\frac{1}{2}\gamma)}{\cos(45^0-\frac{1}{2}\gamma)}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma-\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma}-1,$$

$$1+\frac{p+q}{1-pq}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2}{1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2}{1+r}.$$

Folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben

$$x=\frac{(1+q)(1+r)}{2(1+p)}=\frac{(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta)(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma)}{2(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha)},$$

$$y=\frac{(1+p)(1+r)}{2(1+q)}=\frac{(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha)(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma)}{2(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta)},$$

$$z=\frac{(1+p)(1+q)}{2(1+r)}=\frac{(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha)(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta)}{2(1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma)}.$$

Hierdurch sind also die Halbmesser der drei gesuchten Kreis
stimmt. Nach dem Obigen ist überhaupt

$$1+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Daher kann man die Halbmesser auch so ausdrücken:

$$x=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}\gamma\,\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$y=\frac{\cos\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\,\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\gamma\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$z=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma\,\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\,\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\beta\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Man kann die Halbmesser aber noch auf eine andere Art
drücken. Es ist nämlich z. B.

$$x=\frac{(1-p)(1+q)(1+r)}{2(1+p)(1-p)}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist

$$1-p+q+r-pq-pr+qr-pqr.$$

Aber nach Goniometrie (111.)

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)=\frac{p+q+r-pqr}{1-pq-pr-qr},$$

d. i., weil

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)=\text{tang}\,45^0=1$$

ist:

$$pqr = -1 + p + q + r + pq + pr + qr .$$

Folglich obiger Zähler

$$= 2(1 - p - pq - pr) .$$

Der Nenner von x ist

$$1 - p^2 = 1 - \tan\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 2\tan\tfrac{1}{2}\alpha \frac{1 - \tan\tfrac{1}{2}\alpha^2}{2\tan\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$= 2\tan\tfrac{1}{2}\alpha \cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2p}{\tan\tfrac{1}{2}\alpha} .$$

Folglich

$$x = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\alpha \frac{1 - p - pq - pr}{p} = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{p} - 1 - q - r\right),$$

d. i.

$$x = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\alpha \{\cot\tfrac{1}{2}\alpha - 1 - \tan\tfrac{1}{2}\beta - \tan\tfrac{1}{2}\gamma\} .$$

Aber (Goniometrie. 49.)

$$\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\alpha ,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\beta = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta - \cot\tfrac{1}{2}\beta ,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\gamma - \cot\tfrac{1}{2}\gamma .$$

Folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$x = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\alpha \left\{ \begin{array}{l} \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma - 1 \\ \quad + \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta - \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\gamma \end{array} \right\}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\beta \left\{ \begin{array}{l} \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma - 1 \\ \quad + \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta - \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\gamma \end{array} \right\}$$

$$z = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\gamma \left\{ \begin{array}{l} \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma - 1 \\ \quad + \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\gamma - \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta \end{array} \right\} .$$

Nach dem Obigen ist, immer für $\varrho = 1$:

$$a = \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma ,$$

$$b = \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\gamma ,$$

$$c = \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta ;$$

$$\tfrac{1}{2}(a + b + c) = \tfrac{1}{2}s = \cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma .$$

Also, für

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\alpha = e,\ \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta = f,\ \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\gamma = g :$$

$$x = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\alpha(\tfrac{1}{2}s - 1 + e - f - g) ,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\beta(\tfrac{1}{2}s - 1 + f - g - e) ,$$

$$z = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}s - 1 + g - e - f) .$$

Diese Ausdrücke sind zuerst von Malfatti in den Mem. d. Soc. ital. X. 1. 1803. gegeben worden.

Endlich kann man die Halbmesser auch noch auf folgende Art ausdrücken. Es ist nämlich

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\alpha - \cot\tfrac{1}{2}\alpha ,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\beta = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta - \cot\tfrac{1}{2}\beta ,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\gamma - \cot\tfrac{1}{2}\gamma .$$

Folglich, mittelst der zuerst für die Halbmesser gefundenen Ausdrücke:

$$x = \frac{(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\beta - \cot \tfrac{1}{2}\beta)(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\gamma - \cot \tfrac{1}{2}\gamma)}{2(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha - \cot \tfrac{1}{2}\alpha)},$$

$$y = \frac{(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\gamma - \cot \tfrac{1}{2}\gamma)(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha - \cot \tfrac{1}{2}\alpha)}{2(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\beta - \cot \tfrac{1}{2}\beta)},$$

$$z = \frac{(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha - \cot \tfrac{1}{2}\alpha)(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\beta - \cot \tfrac{1}{2}\beta)}{2(1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\gamma - \cot \tfrac{1}{2}\gamma)};$$

d. i., wenn wir

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha = n, \quad \cot \tfrac{1}{2}\beta = k, \quad \cot \tfrac{1}{2}\gamma = m$$

setzen:

$$x = \frac{(1+f-k)(1+g-m)}{2(1+e-n)},$$

$$y = \frac{(1+g-m)(1+e-n)}{2(1+f-k)},$$

$$z = \frac{(1+e-n)(1+f-k)}{2(1+g-m)}.$$

Diese Ausdrücke hat Tedenat gefunden (Annales de M
T. II. p. 165.). Vorzüglich s. m. über das Malfatti'sche
blem Crelle's Sammlung mathematischer Aufsätze. Th
Berlin. 1821. S. 133., wo auch die historischen und literar
Nachweisungen ausführlich gegeben sind. Die obige Auflö
bei der ich der Rechnung eine möglichst symmetrische Form
ben habe, wird mehreres Eigenthümliche haben.

25. Es ist uns nun noch übrig, die Anwendung der
lysis auch an einigen Aufgaben aus der Geometrie dreier Di
sionen zu zeigen. Wir wollen zuerst wieder die allgemeinste
chung der Kugel suchen. Sey nämlich r der Halbmesser
Kugel, ihr Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten,
den wir uns also drei unter einander senkrechte Coordinatenel
gelegt denken; so erhellet augenblicklich, wenn x, y, z die C
dinaten irgend eines Punktes der Oberfläche der Kugel be
nen, die Richtigkeit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Gehen nun die Coordinatenebenen nicht durch den Mittel
der Kugel, sind aber den vorher angenommenen parallel; so
man offenbar, wenn a, b, c die Coordinaten des Mittelp
in Bezug auf dieses Coordinatensystem sind, in der vorherg
den Gleichung statt x, y, z respective x—a, y—b, z
setzen. Dies giebt als Gleichung der Kugel:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

26. Die Gleichung einer Ebene, welche die Kuge
einem gegebenen Punkte berührt, findet man auf folgende A
Man nehme den gegebenen, in der Oberfläche der K
liegenden, Punkt selbst als Anfang der Coordinaten an.
Gleichung einer beliebigen durch den Anfang der Coordinaten
henden Ebene ist

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Die Gleichung der Kugel ist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 .$$

Die Gleichungen einer beliebigen durch den Anfang der Coordinaten gezogenen geraden Linie sind:

$$x = A'z,\ y = B'z .$$

Soll diese Linie in der durch den Anfang der Coordinaten gelegten Ebene liegen, so muß für jedes z

$$AA'z + BB'z + Cz = 0 ,$$

d. i. für jedes z

$$(AA' + BB' + C)z = 0,$$

folglich

$$AA' + BB' + C = 0$$

seyn. Hierdurch ist die Bedingung ausgedrückt, daß die durch den Anfang der Coordinaten gezogene gerade Linie in der durch den Anfang der Coordinaten gelegten Ebene liegt. Für den Durchschnittspunkt der in Rede stehenden geraden Linie mit der Oberfläche der Kugel erhält man augenblicklich

$$(A'z-a)^2 + (B'z-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 ,$$

oder, wenn man die Quadrate entwickelt, und bedenkt, daß

$$a^2 + b^3 + c^2 = r^2$$

ist:

$$(A'^2 + B'^2 + 1)z - 2(aA' + bB' + c) = 0 ,$$

$$z = \frac{2(aA' + bB' + c)}{1 + A'^2 + B'^2} .$$

Soll die gerade Linie die Kugel nicht schneiden, so muß $z = 0$, d. i.

$$aA' + bB' + c = 0$$

seyn, wie sogleich erhellet. Dies ist die Bedingung, daß die beliebig durch den Anfang der Coordinaten gezogene gerade Linie die Kugel nicht schneidet.

Soll nun die durch den Anfang der Coordinaten gelegte Ebene in diesem Punkte die Kugel berühren, so darf keine in ihr durch den Anfang der Coordinaten gezogene gerade Linie die Kugel schneiden, oder es muß, wie sich auch A' und B' ändern mögen, immer

$$AA' + BB' + C = 0,\ aA' + bB' + c = 0 ;$$

$$(A-a)A' + (B-b)B' + C - c = 0$$

seyn. Aus dieser Gleichung, welche gilt, wie auch A' und B' sich ändern mögen, folgt auf der Stelle:

$$A - a = 0,\ B - b = 0,\ C - c = 0 ;$$

$$A = a,\ B = b,\ C = c .$$

Folglich ist die gesuchte Gleichung der berührenden Ebene:

$$ax + by + cz = 0 .$$

Bis jetzt wurde der Berührungspunkt als Anfang der Coordinaten angenommen. Sey nun

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel in Beziehung auf ein beliebiges Coordinatensystem, und α, β, γ seyen die Coordinaten des Berührungspunktes in Bezug auf dieses System. Durch den Berührungspunkt lege man drei neue den primitiven parallele Coordinatenebenen, und bezeichne in Bezug auf dieses System beliebige Coordinaten durch x', y', z', die Coordinaten des Mittelpunkts der Kugel durch a', b', c'; so ist

$$a = \alpha + a',\ b = \beta + b',\ c = \gamma + c';$$
$$a' = a - \alpha,\ b' = b - \beta,\ c' = c - \gamma.$$

Folglich in Bezug auf das secundäre Coordinatensystem die Gleichung der berührenden Ebene nach dem Vorgehenden:

$$(a-\alpha)x' + (b-\beta)y' + (c-\gamma)z' = 0.$$

Nun ist aber auch

$$x = \alpha + x',\ y = \beta + y',\ z = \gamma + z';$$
$$x' = x - \alpha,\ y' = y - \beta,\ z' = z - \gamma.$$

Folglich die Gleichung der berührenden Ebene in Bezug auf das primitive System:

$$(a-\alpha)(x-\alpha) + (b-\beta)(y-\beta) + (c-\gamma)(z-\gamma) = 0.$$

Ist der Mittelpunkt der Kugel der Anfang der Coordinaten; so ist $a = b = c = 0$, und

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel. Also

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2.$$

Folglich ist

$$\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) + \gamma(z-\gamma) = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r^2$$

die Gleichung der berührenden Ebene.

Daß die berührende Ebene, wie die Elementar-Geometrie lehrt, auf dem durch den Berührungspunkt gezogenen Halbmesser senkrecht ist, kann analytisch sehr leicht auf folgende Art gezeigt werden. Sey nämlich wieder der Berührungspunkt der Anfang der Coordinaten, so ist nach dem Obigen

$$ax + by + cz = 0$$

die Gleichung der berührenden Ebene. Die Gleichungen des durch den Berührungspunkt gezogenen Halbmessers seyen

$$x = Az,\ y = Bz;$$

so ist auch also

$$a = Ac,\ b = Bc;\ \text{also}\ A = \frac{a}{c},\ B = \frac{b}{c}.$$

Demnach ist also

$$a = Ac,\ b = Bc,$$

woraus nach den allgemeinen Principien der analytischen Geometrie der zu beweisende Satz auf der Stelle folgt.

27. Wir wollen nun noch einige Haupteigenschaften der stereographischen Projection (s. diesen Artikel) mittelst der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie beweisen. Der Mittelpunkt der Kugel sey der Anfang der Coordinaten; so ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel. Die Gleichung der Ebene eines beliebigen Kreises derselben sey

$$z = Ax + By + D .$$

Die Ebene der xy nehme man als Tafel an, und setze die Entfernung des Auges von der Tafel $= e$. Die Gleichungen einer beliebigen durch das Auge gezogenen geraden Linie seyen

$$x = \alpha z + \alpha', \; y = \beta z + \beta' ;$$

so ist auch

$$o = \alpha e + \alpha', \; o = \beta e + \beta' ,$$

da man sich das Auge immer in der Axe der z denken muß. Also

$$x = \alpha(z - e), \; y = \beta(z - e)$$

die Gleichungen einer beliebigen durch das Auge gezogenen geraden Linie.

Die Gleichungen eines beliebigen Kreises der Kugel sind nach dem Obigen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \; z = Ax + By + D .$$

Trifft die durch das Auge gezogene gerade Linie einen Punkt der Peripherie dieses Kreises; so hat man, wenn jetzt x', y', z' die Coordinaten dieses Punktes sind:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2, \; z' = Ax' + By' + D ;$$

$$x' = \alpha(z' - e), \; y' = \beta(z' - e) .$$

Aus diesen vier Gleichungen kann man x', y', z' eliminiren, wodurch man eine Gleichung zwischen α, β und bekannten Größen erhält, so daß also

$$\beta = f(\alpha) ,$$

d. h. β eine Function von α ist. Hat man nun auf die obige Art diese Gleichung zwischen α und β gefunden, und setzt in derselben

$$\alpha = \frac{x}{z - e}, \; \beta = \frac{y}{z - e} ;$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welches die Gleichung der Kegelfläche seyn wird, in welcher eine jede durch das Auge gezogene gerade Linie, welche zugleich die Peripherie des durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \; z = Ax + By + D$$

bestimmten Kugelkreises treffen soll, liegen muß. Man eliminire also, indem man, wie offenbar verstattet ist, für die obigen x', y', z' der Kürze wegen ebenfalls x, y, z schreibt, diese Größen aus den drei Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z = Ax + By + D\ ;$$
$$x = \alpha(z-e),\ y = \beta(z-e)\ ;$$

so erhält man nach und nach:

$$z = A\alpha(z-e) + B\beta(z-e) + D\ ,$$
$$z = \frac{A\alpha e + B\beta e - D}{A\alpha + B\beta - 1}\ ,$$
$$x = \alpha(z-e) = -\frac{\alpha(D-e)}{A\alpha + B\beta - 1}\ ,$$
$$y = \beta(z-e) = -\frac{\beta(D-e)}{A\alpha + B\beta - 1}\ ,$$
$$(\alpha^2+\beta^2)(D-e)^2 + (A\alpha e + B\beta e - D)^2 = r^2(A\alpha + B\beta - 1)^2\ .$$

Folglich, wenn man nun

$$\alpha = \frac{x}{z-e},\ \beta = \frac{y}{z-e}$$

setzt,

$$x^2 + y^2 + \frac{\{Aex + Bey - D(z-e)\}^2}{(D-e)^2} = \frac{r^2(Ax + By - z + e)^2}{(D-e)^2},$$

die Gleichung der gesuchten Kegelfläche.

Bei der stereographischen Projection ist $e = r$. Also die Gleichung des Kegels:

$$x^2 + y^2 + \frac{\{Arx + Bry - D(z-r)\}^2}{(D-r)^2} = \frac{r^2(Ax + By - z + r)^2}{(D-r)^2}\ .$$

Will man den Durchschnitt dieser Kegelfläche mit der Tafel, d. h. die stereographische Projection des Grundkreises der Kegelfläche haben; so muß man $z = 0$ setzen. Dies giebt:

$$x^2 + y^2 + \frac{r^2}{(D-r)^2}\{(Ax + By + D)^2 - (Ax + By + r)^2\} = 0\ ,$$

oder, wenn man die eingeklammerte Differenz zweier Quadrate in Factoren zerlegt:

$$x^2 + y^2 + \frac{2Ar^2x}{D-r} + \frac{2Br^2y}{D-r} + \frac{r^2(D+r)}{D-r} = 0.$$

Addirt man auf beiden Seiten

$$\frac{r^4(A^2 + B^2)}{(D-r)^2}\ ;$$

so wird die Gleichung

$$\left\{x + \frac{Ar^2}{D-r}\right\}^2 + \left\{y + \frac{Br^2}{D-r}\right\}^2 = \frac{r^2\{r^2(A^2 + B^2 + 1) - D^2\}}{(D-r)^2},$$

welches die Gleichung eines Kreises ist, dessen Halbmesser

$$= \frac{r}{D-r}\sqrt{r^2(A^2 + B^2 + 1) - D^2}\ .$$

Die stereographische Projection eines jeden Kugelkreises ist folglich selbst ein Kreis.

Die Gleichung der Ebene eines jeden größten Kugelkreises ist

$$z = Ax + By\ ;$$

also die Gleichung der Projection eines jeden größten Kugelkreises

$$x^2 + y^2 - 2Arx - 2Bry = r^2,$$

oder

$$(x-Ar)^2 + (y-Br)^2 = r^2(A^2+B^2+1).$$

Der Halbmesser dieser Projection ist also

$$= r\sqrt{A^2+B^2+1};$$

die Coordinaten des Mittelpunktes derselben sind Ar und Br.

28. Man denke sich jetzt, daß zwei beliebige Kreise auf der Oberfläche der Kugel einander in dem Punkte A schneiden. An die beiden in Rede stehenden Kreise ziehe man durch A die Berührenden AB, AC, und bezeichne den von denselben eingeschlossenen Winkel durch φ. Legt man nun durch AB und AC die Ebenen zweier größten Kugelkreise, und zieht durch den Durchschnittspunkt A' der stereographischen Projectionen dieser größten Kugelkreise an ihre stereographischen Projectionen die Berührenden A'B', A'C'; so ist offenbar der Winkel $B'A'C' = \varphi'$ die stereographische Projection des Winkels $BAC = \varphi$. Die Ebene der xz denke man sich durch den Punkt A gelegt. Der Mittelpunkt der Kugel ist immer der Anfang der Coordinaten, und die Ebene der xy die Tafel. Die Gleichungen der beiden durch AB, AC und den Mittelpunkt der Kugel gelegten Ebenen seyen

$$z = Ax + By,\ z = A'x + B'y.$$

Diese beiden Ebenen haben aber den Punkt A, für welchen $y = 0$ ist, gemein. Sind also x', z' die beiden andern Coordinaten dieses Punktes, so ist

$$z' = Ax',\ z' = A'x',\ A = A'.$$

Folglich sind

$$z = Ax + By,\ z = Ax + B'y$$

die Gleichungen der beiden obigen Ebenen. Die Gleichungen der stereographischen Projectionen ihrer Durchschnitte mit der Kugelfläche sind nach (27.), wenn wir der Kürze wegen $r = 1$ setzen:

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By = 1,$$
$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2B'y = 1;$$

oder

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 = A^2 + B^2 + 1,$$
$$(x-A)^2 + (y-B')^2 = A^2 + B'^2 + 1.$$

Sind nun α, β die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Projectionen, so sind nach (3.) die Gleichungen der Berührenden dieser Projectionen in dem Punkte (α, β):

$$(A-\alpha)(x-\alpha) + (B-\beta)(y-\beta) = 0,$$
$$(A-\alpha)(x-\alpha) + (B'-\beta)(y-\beta) = 0.$$

Also, nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, wenn wir die von diesen Berührenden mit der Axe der x eingeschlossenen Winkel durch Θ und Θ' bezeichnen:

$$\tang\theta = -\frac{A-\alpha}{B-\beta},\ \tang\theta' = -\frac{A-\alpha}{B'-\beta}.$$

Zur Bestimmung von α und β hat man die beiden Gleichun

$$\alpha^2+\beta^2-2A\alpha-2B\beta=1,$$
$$\alpha^2+\beta^2-2A\alpha-2B'\beta=1,$$

durch deren Subtraction man auf der Stelle

$$2(B-B')\beta=0,\ \beta=0$$

erhält. Also

$$\alpha^2-2A\alpha=1,\ \alpha=A\pm\sqrt{1+A^2}.$$

Folglich

$$\tang\theta=\pm\frac{\sqrt{1+A^2}}{B},\ \tang\theta'=\pm\frac{\sqrt{1+A^2}}{B'}.$$

Nun ist offenbar

$$\tang\varphi'=\tang(\theta-\theta')=\frac{\tang\theta-\tang\theta'}{1+\tang\theta\,\tang\theta'},$$

d. i.

$$\tang\varphi'=\mp\frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}.$$

Der Winkel φ ist offenbar der Neigungswinkel der Ebene beiden durch A gelegten größten Kreise gegen einander, trigonometrische Tangente nach Principien der analytischen metrie ohne Rücksicht auf das Vorzeichen ebenfalls den We

$$\frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}$$

hat. Hieraus schließt man nun leicht, daß $\varphi=\varphi'$ ist, daß die stereographischen Projectionen zweie liebigen Kreise auf der Oberfläche der Kugel jederzeit unter demselben Winkel schneiden wi Kreise selbst.

Mehr über die analytische Theorie der stereographischen jection und der Projectionen überhaupt findet man in P sant Traité de Topographie, d'Arpentage et de Ni ment. Deuxième édition. Paris. 1820. p. 62.

Einen guten Aufsatz über die analytische Behandlun Gnomonik von Berroyer, welcher ebenfalls zur Uebung i Anwendung der analytischen Formeln der Geometrie dreier mensionen mit Vortheil gebraucht werden kann, findet m Biot Traité d'Astronomie physique. Seconde éd. T. Paris. 1811. p. 51.

Eine gute Sammlung analytisch aufgelöster geomet Aufgaben enthält: Puissant Recueil de diverses Pro tions de Géométrie résolues et démontrées par l'An algébrique. Seconde éd. Paris. 1809. Auch s. m. Crel Sammlung mathematischer Aufsätze. Berlin. 1821. 2 B Die reichste Ausbeute liefern die mathematischen Journale, züglich Gergonnes Annales de Math. und Crelles Jo

auch Quetelets Correspondance mathématique et physique, und die Correspondance de l'école polytechnique. Auch s. m. die bekannten Werke über analytische Geometrie überhaupt.

Von den Thl. I. S. 116. und S. 121. angeführten Schriften des Apollonius sind als neue Bearbeitungen zu merken: Apollonius von Perga Bücher de sectione spatii wiederhergestellt von Diesterweg. Elberfeld. 1831. Die Bücher des Apollonius von Perga de inclinationibus wiederhergestellt von Horsley, nach dem Lat. frei bearb. von Diesterweg. Berlin. 1823.

Apagogisch, s. Beweis.

Aplanetische Linien, s. Caustische Flächen und Linien (39.).

Arenarius, s. Sandrechnung.

Argument einer Tafel ist die veränderliche Größe, von welcher eine gewisse Function ihren verschiedenen Werthen nach in der Tafel dargestellt ist. Enthält die Tafel z. B. die verschiedenen Werthe von $\log x$, so ist x das Argument der Tafel. Tafeln mit einfachem oder doppelten Eingang s. Tafeln, mathematische (Thl. V. S. 3.).

Arithmetische Reihen höherer Ordnungen. Die große Wichtigkeit dieser Reihen wird uns entschuldigen, wenn wir hier eine Darstellung ihrer Theorie liefern, welche, wie es uns scheint, Eleganz mit Kürze in einem höhern Grade vereinigt, als die von Klügel im ersten Theile dieses Werkes gegebene Darstellung.

1. Sey **A** eine beliebige Reihe. Leitet man nun aus derselben eine Reihe **B** auf solche Weise ab, daß man jedes Glied der Reihe **A** von dem nächst folgenden abzieht, aus der Reihe **B** auf dieselbe Art wieder eine Reihe **C**, aus dieser eben so eine Reihe **D**, u. s. f.; so heißen die Reihen **B**, **C**, **D**, **E**, ... respective die erste, zweite, dritte, vierte, u. s. f. Differenzen-Reihe der Reihe **A**, welche in Bezug auf jene die Hauptreihe genannt wird.

2. Eine Reihe, deren nte Differenzen-Reihe aus lauter gleichen Gliedern besteht, welche nicht $= 0$ sind, heißt eine arithmetische Reihe der nten Ordnung oder des nten Grades. Die Glieder der $(n+1)$ten, $(n+2)$ten, $(n+3)$ten, u. s. f. Differenzen-Reihe einer arithmetischen Reihe der nten Ordnung sind, wie sogleich erhellet, sämmtlich $= 0$.

3. Die kte Differenzen-Reihe einer arithmetischen Reihe der nten Ordnung ist eine arithmetische Reihe der $(n-k)$ten Ordnung.

4. Das xte Glied einer arithmetischen Reihe der Ordnung soll im Folgenden immer durch

$$\overset{x}{T}_n,$$

ihr summatorisches Glied, d. i. die Summe der x ersten der, durch

$$\overset{x}{S}_n$$

bezeichnet werden. Die xten Glieder der ersten, zweiten, d vierten, u. s. f. Differenzen-Reihe einer arithmetischen Rei nten Ordnung wollen wir respective durch

$$\Delta\overset{x}{T}_n,\ \Delta^2\overset{x}{T}_n,\ \Delta^3\overset{x}{T}_n,\ \Delta^4\overset{x}{T}_n,\ \ldots\ldots$$

bezeichnen, die summatorischen Glieder dieser Reihen aber d

$$\Sigma\Delta\overset{x}{T}_n,\ \Sigma\Delta^2\overset{x}{T}_n,\ \Sigma\Delta^3\overset{x}{T}_n,\ \Sigma\Delta^4\overset{x}{T}_n,\ \ldots\ldots$$

5. Dies vorausgesetzt, überzeugt man sich leicht vo Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$\overset{x}{T}_n = \overset{1}{T}_n + \Sigma\Delta\overset{x-1}{T}_n\,.$$

Es ist nämlich nach (1.)

$$\Delta\overset{1}{T}_n = \overset{2}{T}_n - \overset{1}{T}_n$$
$$\Delta\overset{2}{T}_n = \overset{3}{T}_n - \overset{2}{T}_n$$
$$\Delta\overset{3}{T}_n = \overset{4}{T}_n - \overset{3}{T}_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta\overset{x-1}{T}_n = \overset{x}{T}_n - \overset{x-1}{T}_n\,.$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt:

$$\Sigma\Delta\overset{x-1}{T}_n = \overset{x}{T}_n - \overset{1}{T}_n,\quad \overset{x}{T}_n = \overset{1}{T}_n + \Sigma\Delta\overset{x-1}{T}_n\,.$$

Man findet also das allgemeine xte Glied einer arithme Reihe der nten Ordnung, wenn man in dem summato Gliede $\Sigma\Delta\overset{x}{T}_n$ ihrer ersten Differenzen-Reihe $x-1$ für x und zu dem dadurch erhaltenen Ausdrucke das erste Glied T Hauptreihe addirt.

6. Durch gemeine algebraische Subtraction überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{x(x+1)..(x+n)}{1.2.3...(n+1)} - \frac{(x-1)x..(x+n-1)}{1.2.3..(n+1)} = \frac{x(x+1)..(x+}{1.2.3...n}$$

Setzt man nun für x nach und nach

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots.\ x\,;$$

so erhält man:

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n} = \frac{1.2..(n+1)}{1.2..(n+1)}.$$

$$\frac{2.3..(n+1)}{1.2.3..n} = \frac{2.3..(n+2)}{1.2..(n+1)} - \frac{1.2..(n+1)}{1.2..(n+1)}$$

$$\frac{3.4..(n+2)}{1.2.3..n} = \frac{3.4..(n+3)}{1.2..(n+1)} - \frac{2.3..(n+2)}{1.2..(n+1)}$$

u. s. f. u. s. f.

$$\frac{x(x+1)..(x+n-1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{x(x+1)..(x+n)}{1.2..(n+1)} - \frac{(x-1)x..(x+n-1)}{1.2..(n+1)}.$$

Addirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf der rechten Seite auf, was sich aufheben läßt; so ergiebt sich die Summe der Reihe auf der linken Seite, deren allgemeines Glied

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1.2.3\ldots n}$$

ist, augenblicklich

$$= \frac{x(x+1)..(x+n)}{1.2.3\ldots(n+1)} = \frac{x(x+1)..(x+n-1)}{1.2.3\ldots n}.\frac{x+n}{n+1}.$$

7. Mittelst dieses Satzes und der in (5.) bewiesenen Gleichung findet man sehr leicht die allgemeinen und summatorischen Glieder der arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen.

Für die arithmetischen Reihen der ersten Ordnung, deren erste Differenzen constant sind, ist offenbar

$$\Sigma\Delta\overset{x}{T}_1 = \frac{x}{1}\Delta\overset{1}{T}_1.$$

Also nach (5.)

$$\overset{x}{T}_1 = \overset{1}{T}_1 + \frac{x-1}{1}\Delta\overset{1}{T}_1.$$

Folglich

$$\begin{aligned}
\overset{1}{T}_1 &= \overset{1}{T}_1 \\
\overset{2}{T}_1 &= \overset{1}{T}_1 + \tfrac{1}{1}\Delta\overset{1}{T}_1 \\
\overset{3}{T}_1 &= \overset{1}{T}_1 + \tfrac{2}{1}\Delta\overset{1}{T}_1 \\
\overset{4}{T}_1 &= \overset{1}{T}_1 + \tfrac{3}{1}\Delta\overset{1}{T}_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overset{x}{T}_1 &= \overset{1}{T}_1 + \frac{x-1}{1}\Delta\overset{1}{T}_1.
\end{aligned}$$

Addirt man nun auf beiden Seiten, so ergiebt sich augenblicklich mittelst der in (6.) bewiesenen Summation:

$$\overset{x}{S}_1 = \frac{x}{1}\overset{1}{T}_1 + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta\overset{1}{T}_1,$$

wenn wir uns des in (4.) eingeführten Zeichens für die summatorischen Glieder der arithmetischen Reihen bedienen.

Die erste Differenzen-Reihe einer arithmetischen Reihe der

zweiten Ordnung ist eine arithmetische Reihe der ersten nung (3.). Also ist

$$\Sigma\Delta\overset{x}{T}_2 = \frac{x}{1}\Delta\overset{1}{T}_2 + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_2 .$$

Aber nach (5.)

$$\overset{x}{T}_2 = \overset{1}{T}_2 + \Sigma\Delta\overset{x-1}{T}_2 .$$

Folglich

$$\overset{x}{T}_2 = \overset{1}{T}_2 + \frac{x-1}{1}\Delta\overset{1}{T}_2 + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_2 .$$

Also

$$\overset{1}{T}_2 = \overset{1}{T}_2$$
$$\overset{2}{T}_2 = \overset{1}{T}_2 + \tfrac{1}{1}\Delta\overset{1}{T}_2$$
$$\overset{3}{T}_2 = \overset{1}{T}_2 + \tfrac{2}{1}\Delta\overset{1}{T}_2 + \frac{1.2}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_2$$
$$\overset{4}{T}_2 = \overset{1}{T}_2 + \tfrac{3}{1}\Delta\overset{1}{T}_2 + \frac{2.3}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_2$$

. . . .

$$\overset{x}{T}_2 = \overset{1}{T}_2 + \frac{x-1}{1}\Delta\overset{1}{T}_2 + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_2 .$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, mittelst d (6.) bewiesenen Summation:

$$\overset{x}{S}_2 = \frac{x}{1}\overset{1}{T}_2 + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta\overset{1}{T}_2 + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\Delta^2\overset{1}{T}_2$$

Die erste Differenzen-Reihe einer arithmetischen Reihe der d Ordnung ist eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. Al

$$\Sigma\Delta\overset{x}{T}_3 = \frac{x}{1}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\Delta^3\overset{1}{T}_3$$

Aber nach (5.)

$$\overset{x}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \Sigma\Delta\overset{x-1}{T}_3 .$$

Folglich

$$\overset{x}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \frac{x-1}{1}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{1.2.3}$$

Also

$$\overset{1}{T}_3 = \overset{1}{T}_3$$
$$\overset{2}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \tfrac{1}{1}\Delta\overset{1}{T}_3$$
$$\overset{3}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \tfrac{2}{1}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{1.2}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_3$$
$$\overset{4}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \tfrac{3}{1}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{2.3}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_3 + \frac{1.2.3}{1.2.3}\Delta^3\overset{1}{T}_3$$
$$\overset{5}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \tfrac{4}{1}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{3.4}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_3 + \frac{2.3.4}{1.2.3}\Delta^3\overset{1}{T}_3$$

. . . .

$$\overset{x}{T}_3 = \overset{1}{T}_3 + \frac{x-1}{1}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\Delta^2\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{1.2.3}\Delta^3\overset{1}{T}$$

Addirt man nun auf beiden Seiten, so ergiebt sich sogleich mittelst (6.):

$$\overset{x}{S}_3 = \frac{x}{1}\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\Delta^2\overset{1}{T}_3 + \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{1.2.3.4}\Delta^3\overset{1}{T}_3 .$$

Auf diese Art weiter zu gehen, hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Das Gesetz liegt schon hier ganz deutlich vor Augen. Bezeichnen wir nämlich überhaupt das erste Glied der Hauptreihe und die ersten Glieder der Differenzen-Reihen derselben nach der Ordnung durch

$$A,\ \Delta A,\ \Delta^2 A,\ \Delta^3 A,\ \Delta^4 A,\ \ldots\ldots,$$

das allgemeine und summatorische Glied der Hauptreihe aber durch t_x und s_x; so ist

$$t_x = A + \frac{x-1}{1}\Delta A + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\Delta^2 A + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}\Delta^3 A + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_x = \frac{x}{1}A + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta A + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^2 A + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}\Delta^3 A + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

diese Reihen so weit fortgesetzt, bis sie, wegen der immer endlich einmal verschwindenden ersten Glieder der Differenzen-Reihen, von selbst abbrechen.

In diesen beiden Formeln ist eigentlich schon die ganze Theorie der arithmetischen Reihen enthalten. Die noch folgenden Sätze werden jedoch in vielen Fällen mit Vortheil angewandt, wenn es darauf ankommt, zu beurtheilen, ob eine gegebene Reihe eine arithmetische Reihe ist, oder nicht.

8. Wenn

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, die Reihe

$$A',\ B',\ C',\ D',\ E',\ F',\ \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe derselben oder einer niedrigern Ordnung ist; so sind auch immer die Glieder der nten Differenzen-Reihe der Reihe

$$A \pm A',\ B \pm B',\ C \pm C',\ D \pm D',\ \ldots\ldots$$

constant.

Die erste Differenzen-Reihe ist

$$(B \pm B') - (A \pm A') = (B - A) \pm (B' - A')$$
$$(C \pm C') - (B \pm B') = (C - B) \pm (C' - B')$$
$$(D \pm D') - (C \pm C') = (D - C) \pm (D' - C')$$
$$(E \pm E') - (D \pm D') = (E - D) \pm (E' - D')$$

u. s. f. u. s. f.

Entwickelt man die folgenden Differenzen-Reihen auf
Weise; so überzeugt man sich augenblicklich von der Ri
des Satzes.

Zugleich erhellet auch sehr leicht, daß, wenn α und
constanten Differenzen der beiden gegebenen Hauptreihen si
constante Glied der nten Differenzen-Reihe der Reihe

$$A \pm A', \; B \pm B', \; C \pm C', \; D \pm D', \; \ldots\ldots$$

in dem Falle, wo beide gegebene Reihen von einerlei O
sind, $= \alpha \pm \alpha'$, in dem Falle aber, wo die zweite Rei
einer niedrigern Ordnung ist, $= \alpha$ seyn wird.

9. Wenn

$$A, B, C, D, E, F, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das c
Glied ihrer nten Differenzen-Reihe $= \alpha$ ist; so ist au
jedes a, die Reihe

$$aA, aB, aC, aD, aE, aF, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das c
Glied ihrer nten Differenzen-Reihe $= a\alpha$.

Die erste Differenzen-Reihe der Reihe

$$aA, aB, aC, aD, aE, aF, \ldots\ldots$$

ist

$$aB - aA = a(B - A)$$
$$aC - aB = a(C - B)$$
$$aD - aC = a(D - C)$$
$$aE - aD = a(E - D)$$
u. s. f. u. s. f.

Entwickelt man auf ähnliche Weise die folgenden Diff
Reihen; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit des zu b
den Satzes.

10. Wenn

$$A, B, C, D, E, F, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das c
Glied ihrer nten Differenzen-Reihe $= \alpha$ ist; so ist

$$A, 2B, 3C, 4D, 5E, 6F, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, und da
stante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe $= (n+$

Ist die gegebene Reihe eine arithmetische Reihe der
Ordnung; so ist nach (7.) ihre allgemeine Form

$$a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, \ldots\ldots$$

Durch Multiplication der einzelnen Glieder mit 1, 2,
5, ... erhält man die Reihe

$$a, 2a+2b, 3a+6b, 4a+12b, 5a+20b, \ldots\ldots$$

Die erste und zweite Differenzen-Reihe dieser Reihe sind:

$$a+2b, a+4b, a+6b, a+8b, a+10b, \ldots\ldots$$
$$2b, \quad 2b, \quad 2b, \quad 2b, \quad 2b, \ldots\ldots$$

Also besteht die zweite Differenzen-Reihe aus constanten Gliedern, und die Reihe

$$a,\ 2a+2b,\ 3a+6b,\ 4a+12b,\ 5a+20b,\ \ldots..$$

ist folglich eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. Das constante Glied der ersten Differenzen-Reihe der gegebenen Reihe ist $= b$. Das constante Glied der zweiten Differenzen-Reihe der Reihe

$$a,\ 2a+2b,\ 3a+6b,\ 4a+12b,\ 5a+20b,\ \ldots..$$

ist $= 2b$. Also gilt der zu beweisende Satz, wenn die gegebene Reihe eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung ist.

Gelte nun der Satz überhaupt, wenn die gegebene Reihe eine arithmetische Reihe der nten Ordnung ist, und sey jetzt

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ \ldots..$$

eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, das constante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe $= \alpha$; so ist

$$B-A,\ C-B,\ D-C,\ E-D,\ F-E,\ \ldots..$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das constante Glied ihrer nten Differenzen-Reihe offenbar ebenfalls $= \alpha$. Nach der Voraussetzung ist also

$$B-A,\ 2(C-B),\ 3(D-C),\ 4(E-D),\ \ldots..$$

eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, und das constante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe $= (n+1)\alpha$. Folglich ist nach (8.) die Reihe

$$\begin{aligned} B + (B-A) &= 2B-A \\ C + 2(C-B) &= 3C-2B \\ D + 3(D-C) &= 4D-3C \\ E + 4(E-D) &= 5E-4D \\ \text{u. s. f.} & \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

ebenfalls eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, und das constante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe

$$= \alpha + (n+1)\alpha = (n+2)\alpha\,.$$

Diese Reihe ist aber die erste Differenzen-Reihe der Reihe

$$A,\ 2B,\ 3C,\ 4D,\ 5E,\ 6F,\ \ldots..$$

Demnach ist offenbar diese Reihe selbst eine arithmetische Reihe der $(n+2)$ten Ordnung, und das constante Glied ihrer $(n+2)$ten Differenzen-Reihe $= (n+2)\alpha$, so daß also der Satz für arithmetische Reihen der $(n+1)$ten Ordnung gilt, wenn er für arithmetische Reihen der nten Ordnung gilt, woraus seine allgemeine Richtigkeit folgt, da er oben für arithmetische Reihen der ersten Ordnung bewiesen worden ist.

11. Wenn

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ \ldots..$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, das constante ihrer nten Differenzen-Reihe $= \alpha$ ist; so ist

$$aA,\ (a+b)B,\ (a+2b)C,\ (a+3b)D,\ (a+4b)E, \ldots$$

eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, und da stante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe $= (n+1$

Es ist

$$\begin{aligned} aA &= aA \\ (a+b)B &= aB + bB \\ (a+2b)C &= aC + 2bC \\ (a+3b)D &= aD + 3bD \\ (a+4b)E &= aE + 4bE \\ \text{u. s. f.} & \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Nach (9.) ist

$$aA,\ aB,\ aC,\ aD,\ aE, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das co Glied ihrer nten Differenzen-Reihe $= a\alpha$. Eben so ist

$$bA,\ bB,\ bC,\ bD,\ bE, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das co Glied ihrer nten Differenzen-Reihe $= b\alpha$. Folglich i (10.) offenbar die Reihe

$$0bA,\ 1bB,\ 2bC,\ 3bD,\ 4bE, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, und da stante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe $= (n+$ Nach (8.) ist demnach mittelst des Obigen augenscheinlich

$$aA,\ (a+b)B,\ (a+2b)C,\ (a+3b)D, \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, und da stante Glied ihrer $(n+1)$ten Differenzen-Reihe $= (n+1$

Da

$$\begin{array}{llll} n, & n+1, & n+2, & n+3, \ldots\ldots; \\ n-1, & n, & n+1, & n+2, \ldots\ldots; \\ n-2, & n-1, & n, & n+1, \ldots\ldots; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-\alpha+1, & n-\alpha+2, & n-\alpha+3, & n-\alpha+4, \ldots\ldots \end{array}$$

sämmtlich arithmetische Reihen der ersten Ordnung sind; durch successive Anwendung des vorher bewiesenen Satzes daß

$$\begin{array}{l} n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-\alpha+1) \\ (n+1)n\ldots\ldots\ldots(n-\alpha+2) \\ (n+2)(n+1)\ldots(n-\alpha+3) \\ (n+3)(n+2)\ldots(n-\alpha+4) \\ \text{u. s. f.} \end{array}$$

also nach (9.) auch

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}$$
$$\frac{(n+1)n\ldots(n-\alpha+2)}{1.2.3\ldots\alpha}$$
$$\frac{(n+2)(n+1)..(n-\alpha+3)}{1.2.3\ldots\alpha}$$
$$\frac{(n+3)(n+2)..(n-\alpha+4)}{1.2.3\ldots\alpha}$$
u. s. f.

d. i., mittelst Thibauts Bezeichnung der Binomial-Coefficienten,

$$ {}_{n}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}},\ {}_{n+1}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}},\ {}_{n+2}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}},\ {}_{n+3}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}},\ \ldots\ldots $$

eine arithmetische Reihe der αten Ordnung ist. Und hieraus ergiebt sich ferner sehr leicht, daß

$$ {}_{n}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}}\,{}_{m}\overset{\gamma}{\mathfrak{B}},\ {}_{n+1}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}}\,{}_{m+1}\overset{\gamma}{\mathfrak{B}},\ {}_{n+2}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}}\,{}_{m+2}\overset{\gamma}{\mathfrak{B}},\ {}_{n+3}\overset{\alpha}{\mathfrak{B}}\,{}_{m+3}\overset{\gamma}{\mathfrak{B}},\ \ldots\ldots $$

eine arithmetische Reihe der $(\alpha+\gamma)$ten Ordnung ist.

Denkt man sich nun überhaupt die allgemeinen Glieder zweier arithmetischen Reihen der αten und der γten Ordnung (7.) in einander multiplicirt; so überzeugt man sich mittelst des vorhergehenden Satzes sehr leicht, daß überhaupt die Producte der gleichstelligen Glieder zweier arithmetischen Reihen der αten und γten Ordnung wieder eine arithmetische Reihe bilden, welche von der $(\alpha+\gamma)$ten Ordnung ist, ein Satz, welcher sich leicht auf mehr als zwei arithmetische Reihen erweitern läßt, wie sogleich in die Augen fällt.

12. Die Reihe

$$a^n,\ (a+b)^n,\ (a+2b)^n,\ (a+3b)^n,\ (a+4b)^n,\ \ldots\ldots,$$

wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, ist eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, und das constante Glied ihrer nten Differenzen-Reihe ist

$$=1.2.3.4\ldots.nb^n.$$

Die Reihe

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots\ldots$$

ist eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, und das constante Glied ihrer ersten Differenzen-Reihe ist $=1b$. Also ist nach (11.)

$$a^2,\ (a+b)^2,\ (a+2b)^2,\ (a+3b)^2,\ (a+4b)^2,\ \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, das constante Glied ihrer zweiten Differenzen-Reihe $=1.2b^2$. Folglich ist wieder nach (11.)

$$a^3,\ (a+b)^3,\ (a+2b)^3,\ (a+3b)^3,\ (a+4b)^3,\ \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung, das constante

Glied ihrer dritten Differenzen-Reihe $= 1.2.3b^3$. Wie n diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen.

Also ist auch

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ 5^n,\ 6^n,\ \ldots\ldots,$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist, eine arithmetische R nten Ordnung, das constante Glied ihrer nten Differenzen $= 1.2.3.4\ldots.n$.

13. Wir wollen nun noch ein beliebiges Glied ei liebigen Differenzen-Reihe durch die Glieder der Hauptrei zudrücken suchen. Die Hauptreihe sey jetzt

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots A_n,\ \ldots\ldots$$

Die Binomial-Coefficienten der nten Potenz wollen wir

$$\overset{1}{{}^n\mathfrak{B}},\ \overset{2}{{}^n\mathfrak{B}},\ \overset{3}{{}^n\mathfrak{B}},\ \overset{4}{{}^n\mathfrak{B}},\ \overset{5}{{}^n\mathfrak{B}},\ \ldots\ldots$$

bezeichnen.

Die erste Differenzen-Reihe der Hauptreihe ist:

$$\begin{array}{c} A_2 - A_1 \\ A_3 - A_2 \\ A_4 - A_3 \\ A_5 - A_4 \\ \text{u. s. f.} \end{array}$$

Die zweite Differenzen-Reihe ist

$$\begin{array}{c} A_3 - 2A_2 + A_1 \\ A_4 - 2A_3 + A_2 \\ A_5 - 2A_4 + A_3 \\ A_6 - 2A_5 + A_4 \\ \text{u. s. f.} \end{array}$$

Folglich ist die dritte Differenzen-Reihe:

$$\begin{array}{c} A_4 - 3A_3 + 3A_2 - A_1 \\ A_5 - 3A_4 + 3A_3 - A_2 \\ A_6 - 3A_5 + 3A_4 - A_3 \\ A_7 - 3A_6 + 3A_5 - A_4 \\ \text{u. s. f.} \end{array}$$

Das Gesetz, nach welchem die Differenzenreihen fortsc fällt leicht in die Augen. Das xte Glied der nten Diff Reihe ist nämlich

$$A_{x+n} - \overset{1}{{}^n\mathfrak{B}}A_{x+n-1} + \overset{2}{{}^n\mathfrak{B}}A_{x+n-2} - \ldots \pm \overset{n-1}{{}^n\mathfrak{B}}A_{x+1} \mp \overset{n}{{}^n\mathfrak{B}}A_x$$

Das $(x+1)$te Glied ist

$$A_{x+n+1} - \overset{1}{{}^n\mathfrak{B}}A_{x+n} + \overset{2}{{}^n\mathfrak{B}}A_{x+n-1} - \ldots \pm \overset{n-1}{{}^n\mathfrak{B}}A_{x+2} \mp \overset{n}{{}^n\mathfrak{B}}A_x$$

Zieht man das xte von dem $(x+1)$ten Gliede ab, so man das xte Glied der $(n+1)$ten Differenzen-Reihe, i also

$$
\begin{array}{lll}
= & A_{x+n+1} & = A_{x+n+1} \\
- & \left|1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\right| A_{x+n} & - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} A_{x+n} \\
+ & \left|{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\right| A_{x+n-1} & + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} A_{x+n-1} \\
\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\pm & \left|{}^{n}\overset{n-2}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\right| A_{x+2} & \pm {}^{n+1}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} A_{x+2} \\
\mp & \left|{}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}\right| A_{x+1} & \mp {}^{n+1}\overset{n}{\mathfrak{B}} A_{x+1} \\
\pm & {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} A_x & \pm {}^{n+1}\overset{n+1}{\mathfrak{B}} A_x
\end{array}
$$

ist, so daß folglich das bemerkte Gesetz für die $(n+1)$te Differenzen-Reihe gilt, wenn es für die nte gilt, woraus sich unmittelbar mittelst des Obigen die allgemeine Richtigkeit desselben ergiebt.

Das xte Glied der nten Differenzen-Reihe ist also

$$
= A_{x+n} - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} A_{x+n-1} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} A_{x+n-2} - \ldots - (-1)^n . {}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} A_{x+1} + (-1)^n . {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} A_x ,
$$

oder, wenn man die Ordnung der Glieder umkehrt,

$$
= (-1)^n \left\{ A_x - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} A_{x+1} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} A_{x+2} - {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} A_{x+3} + \ldots \ldots - (-1)^n . {}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} A_{x+n-1} + (-1)^n . {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} A_{x+n} \right\},
$$

14. Nach (12.) hat man also die merkwürdige Gleichung

$$
1.2.3.4 \ldots n =
$$
$$
= (-1)^n \left\{ 1^n - {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} . 2^n + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} . 3^n - {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} . 4^n + \ldots \ldots - (-1)^n . {}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} . n^n + (-1)^n . {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} . (n+1)^n \right\},
$$

mit deren Beweise sich verschiedene Mathematiker beschäftigt haben. M. s. z. B. des Verfassers Mathematische Abhandlungen. Erste Samml. Altona. 1822. S. 69. Crelle's Journal. VI. S. 255.

Wegen der Interpolation arithmetischer Reihen verweisen wir überhaupt auf den Artikel Einschalten.

15. Den von Klügel angeführten Schriften über die höhern arithmetischen Reihen füge ich hier nur noch folgende bei:

Prasse Institutiones analyticae. Lips. 1813. Cap. XIII.

Ei. Additamenta ad theoriam serierum arithm. ordinum super. in seinen Comment. math. Fasc. I.

Eytelwein Grundlehren der höhern Analysis. Zweiter Band. Berlin. 1824. Dreizehntes Kapitel.

Lacroix Traité du Calc. diff. et du Calc. int. T. III. Paris. 1819. Chap. I.

Burja selbstlernender Algebraist. Thl. II. S. 123. ff.

Kramp Arithmétique universelle. Cologne. 1808 XIV., und wegen der Anwendung auf die Auflösung nu Gleichungen Chap. XXVIII.

Auch s. m. mein Lehrbuch der allgemeinen Arit Brandenburg. 1832. Vierzehntes und siebzehntes Kapi den Artikel Differenzenrechnung in diesem Wörterb

Ars conjectandi, s. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Asymptote. J. G. Pfeiffer Diss. de curva braicar. asympt. tam rectilin. quam curvilin. Tüb.

Aufsteigende Reihen sind Reihen von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$$

B.

Barycentrischer Calcul ist eine neue von dem Möbius zu Leipzig erfundene, sehr scharfsinnig ausg Methode zur analytischen Behandlung der Geometrie, schon zu sehr interessanten Resultaten, namentlich über di schnitte, geführt hat. Dieselbe hängt mit der Lehre vom punkte in der Mechanik zusammen, wodurch die obige Be veranlaßt worden ist, obgleich ihre Principien durchaus n Statik oder Mechanik entnommen zu werden brauchen man nur den Schwerpunkt als Punkt der mittlern Entfe rein geometrisch definirt. Eine Darstellung der Methode i ganz kurzen Artikel, welchen der Raum hier nur gestatten wi geben, ist nicht gut möglich, weil das Wesen und der derselben vorzüglich aus ihrer Anwendung zur Auflösung trischer Aufgaben erkannt wird. Wir glauben uns dal um so mehr mit dieser kurzen Notiz begnügen zu könne der Erfinder selbst seine Methode in einem ausführlich Deutschland leicht zu habenden, Werke im Zusammenha sehr vielen wichtigen und interessanten Anwendungen, d hat, können es uns aber nicht versagen, dieses Werk a als eine der wichtigsten Erscheinungen im Gebiete der Mathematik zu erklären, und das Studium desselben ang lichst zu empfehlen. Es ist erschienen unter dem Titel barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur a schen Behandlung der Geometrie, dargestellt und sondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgab die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegels angewendet von A. F. Möbius. Leipzig. 1827. und vollständigste Kenntniß der Methode wird, wie gesa diesem trefflichen Werke selbst erworben, und eine solche t dige Kenntniß ist nöthig, wenn man, was hier die sache ist, auch zu einer gewissen Uebung in der Anwendu

langen will. Wer sich indeß nur mit einer oberflächlichen Kenntniß begnügen will, den können wir auf Spehrs Recension des Werkes in den Jahrbüchern für wissenschaftliche Kritik. August. 1828. S. 172. verweisen. Einige Anwendungen der Methode von Möbius und Minding findet man auch in Crelles Journal. B. V. S. 102. 397.

Befreundete Zahlen. Die Beweise der Regeln von Descartes und Kraft findet man im Artikel Theiler einer Zahl (16.).

Bernoullische Reihe, s. Integralformel (145.). Thl. II. S. 879.

Bernoullische Zahlen. Die nach Jacob Bernoulli (Ars conjectandi. Basil. 1713. p. 97.) benannten Zahlen sind für die ganze Analysis von so großer Bedeutung, daß es als nützlich und nothwendig erscheint, hier einmal die wichtigsten Relationen derselben, welche man bisher gefunden, im Zusammenhange aufzustellen und zu beweisen.

1. Wenn man die Zahlen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \ldots\ldots$$

aus folgenden nach einem leicht zu übersehenden Gesetze fortschreitenden Gleichungen bestimmt:

$$0 = \alpha - \frac{1}{2.1..3}$$

$$0 = \beta - \frac{\alpha}{1..3} + \frac{3}{2.1..5}$$

$$0 = \gamma - \frac{\beta}{1..3} + \frac{\alpha}{1..5} - \frac{5}{2.1..7}$$

$$0 = \delta - \frac{\gamma}{1..3} + \frac{\beta}{1..5} - \frac{\alpha}{1..7} + \frac{7}{2.1..9}$$

$$0 = \varepsilon - \frac{\delta}{1..3} + \frac{\gamma}{1..5} - \frac{\beta}{1..7} + \frac{\alpha}{1..9} - \frac{9}{2.1..11}$$

u. s. f. u. s. f.

und

$$\overset{1}{B} = 1.2.\alpha$$

$$\overset{3}{B} = 1.2.3.4\beta$$

$$\overset{5}{B} = 1.2.3.4.5.6.\gamma$$

$$\overset{7}{B} = 1.2.3.4.5.6.7.8.\delta$$

$$\overset{9}{B} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.\varepsilon$$

u. s. f. u. s. f.

setzt; so heißen

$$\overset{1}{B},\ \overset{3}{B},\ \overset{5}{B},\ \overset{7}{B},\ \ldots\ldots\ \overset{2n-1}{B},\ \ldots\ldots$$

die erste, zweite, dritte, vierte, nte Bernoullische Zahl. Dies mag als Erklärung der Bernoullischen Zahlen gelten, indem wir natürlich von einer, am besten der einfachsten, Relation derselben unsern Auslauf nehmen müssen, um zu andern Relationen zu gelangen.

2. Führen wir in die obigen Gleichungen die Zeichen der Bernoullischen Zahlen selbst ein, so erhalten wir:

$$0 = \frac{\overset{1}{B}}{1.2} - \frac{1}{2.1..3}$$

$$0 = \frac{\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{3}{2.1..5}$$

$$0 = \frac{\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{5}{2.1..7}$$

$$0 = \frac{\overset{7}{B}}{1..8} - \frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..7} + \frac{7}{2.1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

$$0 = \frac{\overset{2n-1}{B}}{1..2n} - \frac{\overset{2n-3}{B}}{1..(2n-2)}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{\overset{2n-5}{B}}{1..(2n-4)}\cdot\frac{1}{1.5} - \ldots \pm \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..(2n-1)} \mp \frac{2n-1}{2.1..(2n+1)}$$

u. s. f. u. s. f.

oder auch, wenn wir diese Gleichungen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nach der Reihe mit

1..3, 1..5, 1..7, 1..9, u. s. f.

multipliciren:

$$0 = \overset{1}{B}.\tfrac{3}{1} - \tfrac{1}{2}$$

$$0 = \overset{3}{B}.\tfrac{5}{1} - \overset{1}{B}.\frac{5.4.3}{1.2.3} + \tfrac{3}{2}$$

$$0 = \overset{5}{B}.\tfrac{7}{1} - \overset{3}{B}.\frac{7.6.5}{1.2.3} + \overset{1}{B}.\frac{7..3}{1..5} - \tfrac{5}{2}$$

$$0 = \overset{7}{B}.\tfrac{9}{1} - \overset{5}{B}.\frac{9.8.7}{1.2.3} + \overset{3}{B}.\frac{9..5}{1..5} - \overset{1}{B}.\frac{9..3}{1..7} + \tfrac{7}{2}$$

u. s. f. u. s. f.

oder

$$+\tfrac{3}{2} = \overset{1}{B}.\tfrac{3}{1} + 1$$

$$-\tfrac{5}{2} = \overset{3}{B}.\tfrac{5}{1} - \overset{1}{B}.\frac{5.4.3}{1.2.3} - 1$$

$$+\tfrac{7}{2} = \overset{5}{B}.\tfrac{7}{1} - \overset{3}{B}.\frac{7.6.5}{1.2.3} + \overset{1}{B}.\frac{7..3}{1..5} + 1$$

$$-\tfrac{9}{2} = \overset{7}{B}.\tfrac{9}{1} - \overset{5}{B}.\frac{9.8.7}{1.2.3} + \overset{3}{B}.\frac{9..5}{1..5} - \overset{1}{B}.\frac{9..3}{1..7} - 1$$

u. s. f. u. s. f.

Unter dieser Gestalt erscheinen die Gleichungen bei der Summation der Potenzen der natürlichen Zahlen.

3. Zunächst bemerken wir nun, welches für das Folgende von großer Wichtigkeit ist, daß sich leicht eine gebrochene Function finden läßt, bei deren Entwickelung in eine Reihe die oben durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ bezeichneten Zahlen als Coefficienten erscheinen. Um diese gebrochene Function zu finden, setzen wir

$$\frac{1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 + Dx^4 - \ldots\ldots}{1 - A'x + B'x^2 - C'x^3 + D'x^4 - \ldots\ldots}$$
$$= 1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - \varepsilon x^5 - \ldots\ldots,$$

und erhalten, indem wir auf beiden Seiten mit dem Nenner multipliciren, durch Vergleichung der Coefficienten;

$$0 = \alpha - (A - A')$$
$$0 = \beta - A'\alpha + (B - B')$$
$$0 = \gamma - A'\beta + B'\alpha - (C - C')$$
$$0 = \delta - A'\gamma + B'\beta - C'\alpha + (D - D')$$
$$0 = \varepsilon - A'\delta + B'\gamma - C'\beta + D'\alpha - (E - E')$$

u. s. f. u. s. f.

Vergleichen wir nun diese Gleichungen mit den Gleichungen in (1.), so ergiebt sich augenblicklich:

$$A' = \frac{1}{1..3},\ B' = \frac{1}{1..5},\ C' = \frac{1}{1..7},\ D' = \frac{1}{1..9},\ \ldots;$$
$$A - A' = \frac{1}{2.1..3},\ B - B' = \frac{3}{2.1..5},\ C - C' = \frac{5}{2.1..7},\ D - D' = \frac{7}{2.1..9},\ \ldots;$$
$$A = \frac{1}{2.1.2},\ B = \frac{1}{2.1..4},\ C = \frac{1}{2.1..6},\ D = \frac{1}{2.1..8},\ \ldots..$$

Folglich ist der erzeugende Bruch

$$= \tfrac{1}{2}.\frac{2 - \frac{1}{1.2}x + \frac{1}{1..4}x^2 - \frac{1}{1..6}x^3 + \frac{1}{1..8}x^4 - \ldots}{1 - \frac{1}{1..3}x + \frac{1}{1..5}x^2 - \frac{1}{1..7}x^3 + \frac{1}{1..9}x^4 - \ldots},$$

oder, wenn wir x^2 statt x setzen,

$$= \frac{x}{2}.\frac{1 + 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1..4}x^4 - \frac{1}{1..6}x^6 + \frac{1}{1..8}x^8 - \ldots}{x - \frac{1}{1..3}x^3 + \frac{1}{1..5}x^5 - \frac{1}{1..7}x^7 + \frac{1}{1..9}x^9 - \ldots}$$
$$= \frac{x}{2}.\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{x}{2}.\frac{2\cos\frac{1}{2}x^2}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \tfrac{1}{2}x\cot\tfrac{1}{2}x.$$

Also auch

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{x} - \alpha x - \beta x^3 - \gamma x^5 - \delta x^7 - \ldots..,$$

oder, wenn wir die Bernoullischen Zahlen einführen:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{x} - \frac{\overset{1}{B}x}{1.2} - \frac{\overset{3}{B}x^3}{1..4} - \frac{\overset{5}{B}x^5}{1..6} - \frac{\overset{7}{B}x^7}{1..8} - \ldots.$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2.\overset{1}{B}x}{1.2} - \frac{2^4.\overset{3}{B}x^3}{1..4} - \frac{2^6.\overset{5}{B}x^5}{1..6} - \frac{2^8.\overset{7}{B}x^7}{1..8} - \ldots..$$

Da

$$\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2,\ \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

ist, so ist

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{\sin x}{2\cos x},\ \tan x = \cot x - 2\cot 2x\,,$$

woraus sich mittelst obiger Reihe sogleich ergiebt:

$$\tan x = \frac{2^2.(2^2-1)\overset{1}{B}x}{1.2} + \frac{2^4.(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{1..4} + \frac{2^6.(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{1..6}$$
$$+ \frac{2^8.(2^8-1)\overset{7}{B}x^7}{1..8} + \ldots..$$

Diese Reihen sind für die Cyclometrie, aber auch für die Theorie der Bernoullischen Zahlen selbst von großer Wichtigkeit.

4. Man setze jetzt

$$\cot x = \frac{1}{x} - ax - bx^3 - cx^5 - dx^7 - \ldots$$

und

$$\cot x^2 = \frac{1}{x^2} + a' + b'x^2 + c'x^4 + d'x^6 + \ldots,$$

so erhält man, wenn man die Reihe für $\cot x$ wirklich auf das Quadrat erhebt, leicht folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
a' &= -2a\\
b' &= -2b + aa\\
c' &= -2c + 2ab\\
d' &= -2d + 2ac + bb\\
e' &= -2e + 2ad + 2bc\\
f' &= -2f + 2ae + 2bd + cc\\
g' &= -2g + 2af + 2be + 2cd\\
h' &= -2h + 2ag + 2bf + 2ce + dd\\
i' &= -2i + 2ah + 2bg + 2cf + 2de
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Aber $\dfrac{\partial \cot x}{\partial x} = -\dfrac{1}{\sin x^2} = -\operatorname{cosec} x^2 = -(1+\cot x^2)$.

Also, wenn man die Reihe für $\cot x$ differentiirt:

$$-\frac{1}{x^2} - a - 3bx^2 - 5cx^4 - 7dx^6 - 9ex^8 - \ldots$$

$$= -\frac{1}{x^2} - (1+a') - b'x^2 - c'x^4 - d'x^6 - e'x^8 - \ldots..$$

Folglich

$$\begin{array}{llllllll}
a = 1 + & a' = & 1 - 2a & & & & \\
3b = & b' = & -2b & + aa & & & \\
5c = & c' = & -2c & + 2ab & & & \\
7d = & d' = & -2d & + 2ac & + bb & & \\
9e = & e = & -2e & + 2ad & + 2bc & & \\
11f = & f' = & -2f & + 2ae & + 2bd & + cc & \\
13g = & g' = & -2g & + 2af & + 2be & + 2cd & \\
\text{u. s. f.} & & & \text{u. s. f.} & & &
\end{array}$$

oder

$$\begin{aligned}
3a &= 1 \\
5b &= aa \\
7c &= 2ab \\
9d &= 2ac + bb \\
11e &= 2ad + 2bc \\
13f &= 2ae + 2bd + cc \\
15g &= 2af + 2be + 2cd \\
17h &= 2ag + 2bf + 2ce + dd \\
19i &= 2ah + 2bg + 2cf + 2de \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Folglich, wenn man aus (3.) die Ausdrücke der Coefficienten a, b, c, d, ... durch die Bernoullischen Zahlen in diese Gleichungen setzt:

$$\begin{aligned}
3\overset{1}{B} &= \frac{2.1}{1.2}\cdot\tfrac{1}{2} \\
5\overset{3}{B} &= \frac{4.3}{1.2}\overset{1}{B}\,\overset{1}{B} \\
7\overset{5}{B} &= \frac{6.5}{1.2}.2\overset{1}{B}\,\overset{3}{B} \\
9\overset{7}{B} &= \frac{8.7}{1.2}.2\overset{1}{B}\,\overset{5}{B} + \frac{8..5}{1..4}\overset{3}{B}\,\overset{3}{B} \\
11\overset{9}{B} &= \frac{10.9}{1.2}.2\overset{1}{B}\,\overset{7}{B} + \frac{10..7}{1.4}.2\overset{3}{B}\,\overset{5}{B} \\
13\overset{11}{B} &= \frac{12.11}{1.2}.2\overset{1}{B}\,\overset{9}{B} + \frac{12..9}{1..4}.2\overset{3}{B}\,\overset{7}{B} + \frac{12..7}{1..6}\overset{5}{B}\,\overset{5}{B} \\
15\overset{13}{B} &= \frac{14.13}{1.2}.2\overset{1}{B}\,\overset{11}{B} + \frac{14..11}{1..4}.2\overset{3}{B}\,\overset{9}{B} + \frac{14..9}{1..6}.2\overset{5}{B}\,\overset{7}{B} \\
17\overset{15}{B} &= \frac{16.15}{1.2}.2\overset{1}{B}\,\overset{13}{B} + \frac{16..13}{1..4}.2\overset{3}{B}\,\overset{11}{B} + \frac{16..11}{1..6}.2\overset{5}{B}\,\overset{9}{B} + \frac{16..9}{1..8}\overset{7}{B}\,\overset{7}{B} \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Diese Relationen hat Euler gefunden (Inst. Calc. diff. T. II. §. 123.). Andere Relationen könnte man aus der Gleichung $\tang x \cot x = 1$ finden, wobei wir jedoch jetzt nicht länger verweilen, da diese Relationen nicht gerade von besonderer Wichtigkeit sind.

5. Aus den Gleichungen in (2.) erhält man leicht:

$$0 = \frac{2\overset{1}{B}}{1.2} - \frac{1}{1..3}$$

$$0 = \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{2^2}{1..3} + \frac{2^2.3}{1..5}$$

$$= \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{2}{1..5}$$

$$- \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{1.2}$$

$$= \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{2}{1..5}$$

$$0 = \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{2^2}{1..3} + \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{2^4}{1..5} - \frac{2^4.3}{1..8}$$

$$= \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{3}{1..7}$$

$$- \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{2}{1..5}\cdot\frac{1}{1.2}$$

$$+ \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..4} - \frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{1..4}$$

$$= \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{3}{1..7}.$$

Man könnte auf diese Art weiter gehen. Das Gesetz fällt aber schon in die Augen. Es ist nämlich allgemein

$$0 = \frac{2^{2n-1}.\overset{2n-1}{B}}{1\ldots 2n} - \frac{2^{2n-3}.\overset{2n-3}{B}}{1\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{2^{2n-5}.\overset{2n-5}{B}}{1\ldots(2n-4)}\cdot\frac{1}{1..5} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1\ldots(2n-1)}\cdot(-1)^n + \frac{n}{1\ldots(2n+1)}\cdot(-1)^n,$$

und es kommt nun darauf an, dieses Gesetz allgemein zu beweisen.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist, wenn wir den mten Binomial-Coefficienten der nten Potenz in diesem Artikel überhaupt durch ${}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}}$ bezeichnen:

$$2^{2x+1} = 1 + {}^{2x+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots + {}^{2x+1}\overset{2x+1}{\mathfrak{B}}$$

$$= {}^{2x+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots + {}^{2x+1}\overset{2x+1}{\mathfrak{B}}$$

$$+ 1 + {}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots + {}^{2x+1}\overset{2x}{\mathfrak{B}}.$$

Aber

$${}^{2x+1}\overset{2x+1}{\mathfrak{B}} = 1, \quad \text{da } 2x+1+0 = 2x+1;$$
$${}^{2x+1}\overset{2x-1}{\mathfrak{B}} = {}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}, \quad \text{da } 2x-1+2 = 2x+1;$$
$${}^{2x+1}\overset{2x-3}{\mathfrak{B}} = {}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}}, \quad \text{da } 2x-3+4 = 2x+1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}^{2x+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} = {}^{2x+1}\overset{2x-2}{\mathfrak{B}}, \quad \text{da } 3+2x-2 = 2x+1;$$
$${}^{2x+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} = {}^{2x+1}\overset{2x}{\mathfrak{B}}, \quad \text{da } 1+2x = 2x+1.$$

Also

$$2^{2x} = 1 + {}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots + {}^{2x+1}\overset{2x}{\mathfrak{B}},$$

woraus leicht folgt:

$$\frac{2^{2x}}{1\ldots(2x+1)} = \frac{1}{1\,.\,.(2x+1)} + \frac{1}{1\,.\,.(2x-1)}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1\ldots(2x-3)}\cdot\frac{1}{1\,.\,.4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1\,.\,.3}\cdot\frac{1}{1\,.\,.(2x-2)} + \frac{1}{1\ldots2x}.$$

Ferner sey die Summe der Reihe

$$(x+1).1 + x.{}^{2x+3}\overset{2}{\mathfrak{B}} + (x-1).{}^{2x+3}\overset{4}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+3}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+3}\overset{2x-2}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+3}\overset{2x}{\mathfrak{B}} = S,$$

so erhält man durch Zerlegung der Binomial-Coefficienten (s. diesen Art. 5.):

$$S = (x+1).1 + x.{}^{2x+2}\overset{2}{\mathfrak{B}} + (x-1).{}^{2x+2}\overset{4}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+2}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+2}\overset{2x-2}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+2}\overset{2x}{\mathfrak{B}}$$
$$+ x.{}^{2x+2}\overset{1}{\mathfrak{B}} + (x-1).{}^{2x+2}\overset{3}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+2}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+2}\overset{2x-3}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+2}\overset{2x-1}{\mathfrak{B}}$$
$$= (x+1).1 + x.{}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + (x-1).{}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+1}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+1}\overset{2x-2}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+1}\overset{2x}{\mathfrak{B}}$$
$$+ x.{}^{2x+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + (x-1).{}^{2x+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+1}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+1}\overset{2x-3}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+1}\overset{2x-1}{\mathfrak{B}}$$
$$+ x.{}^{2x+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + (x-1).{}^{2x+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+1}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+1}\overset{2x-3}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+1}\overset{2x-1}{\mathfrak{B}}$$
$$+ x.1 \quad + (x-1).{}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + (x-2).{}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2.{}^{2x+1}\overset{2x-4}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+1}\overset{2x-2}{\mathfrak{B}}$$
$$= (2x+1).1 + (2x-1).{}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + (2x-3).{}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + (2x-5).{}^{2x+1}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 3.{}^{2x+1}\overset{2x-2}{\mathfrak{B}} + 1.{}^{2x+1}\overset{2x}{\mathfrak{B}}$$

$$+ 2x . {}^{2x+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + (2x-2) . {}^{2x+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + (2x-4) . {}^{2x+1}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \dots$$
$$\dots + 4 . {}^{2x+1}\overset{2x-3}{\mathfrak{B}} + 2 . {}^{2x+1}\overset{2x-1}{\mathfrak{B}} .$$

Aber

$$(2x-n+1) . {}^{2x+1}\overset{n}{\mathfrak{B}} + (2x-n+2) . {}^{2x+1}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} = (2x-n+1) . {}^{2x+1}\overset{n}{\mathfrak{B}} + n . {}^{2x+1}\overset{n}{\mathfrak{B}}$$
$$= (2x+1) . {}^{2x+1}\overset{n}{\mathfrak{B}} .$$

Also

$$S = (2x+1) \left\{ 1 + {}^{2x+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{2x+1}\overset{4}{\mathfrak{B}} + {}^{2\,+1}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \dots + {}^{2x+1}\overset{2x}{\mathfrak{B}} \right\}$$

d. i. nach der oben gefundenen Summation:

$$S = (2x+1) . 2^{2x} ,$$

oder, wie man leicht findet:

$$\frac{(2x+1) . 2^{2x}}{1..(2x+3)} = \frac{(x+1) . 1}{1..(2x+3)} + \frac{x}{1..(2x+1)} . \frac{1}{1.2} + \frac{x-1}{1..(2x-1)} . \frac{1}{1..4} + \dots$$
$$\dots + \frac{2}{1..5} . \frac{1}{1..(2x-2)} + \frac{1}{1..3} . \frac{1}{1..2x} .$$

Mittelst der beiden hier gefundenen Summationen erhält man nun nach (2.):

$$0 = \frac{\overset{2n-1}{B}}{1..2n} - \frac{\overset{2n-3}{B}}{1..(2n-2)} . \frac{1}{1..3} + \frac{\overset{2n-5}{B}}{1..(2n-4)} . \frac{1}{1..5} - \dots$$
$$\dots - \frac{\overset{1}{B}}{1.2} . \frac{1}{1..(2n-1)} . (-1)^n + \frac{2n-1}{2.1..(2n+1)} . (-1)^n$$
$$= \frac{2^{2n-1} . \overset{2n-1}{B}}{1...2n} - \frac{2^{2n-3} . \overset{2n-3}{B}}{1..(2n-2)} . \frac{2^2}{1..3} + \frac{2^{2n-5} . \overset{2n-5}{B}}{1..(2n-4)} . \frac{2^4}{1..5} - \dots$$
$$\dots - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2} . \frac{2^{2n-2}}{1..(2n-1)} . (-1)^n + \frac{(2n-1) . 2^{2n-2}}{1..(2n+1)} . (-1)^n$$

$$= \frac{2^{2n-1} . \overset{2n-1}{B}}{1...2n}$$
$$- \frac{2^{2n-3} . \overset{2n-3}{B}}{1..(2n-2)} \left\{ \frac{1}{1..3} + \frac{1}{1.2} \right\}$$
$$+ \frac{2^{2n-5} . \overset{2n-5}{B}}{1..(2n-4)} \left\{ \frac{1}{1..5} + \frac{1}{1..3} . \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1..4} \right\}$$
$$- \frac{2^{2n-7} . \overset{2n-7}{B}}{1..(2n-6)} \left\{ \frac{1}{1..7} + \frac{1}{1..5} . \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1..3} . \frac{1}{1..4} + \frac{1}{1..6} \right\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$- \frac{2\overset{1}{B}}{1.2} \left\{ \frac{1}{1..(2n-1)} + \frac{1}{1..(2n-3)} . \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1..(2n-5)} . \frac{1}{1..4} + .. + \frac{1}{1..(2n-2)} \right\} (-1)^n$$
$$+ \left\{ \frac{n}{1..(2n+1)} + \frac{n-1}{1..(2n-1)} . \frac{1}{1.2} + \frac{n-2}{1..(2n-3)} . \frac{1}{1..4} + .. + \frac{1}{1..3} . \frac{1}{1..(2n-2)} \right\} (-1)^n .$$

Denkt man sich die einzelnen Producte wirklich entwickelt, und das Aggregat nach den Vertikalreihen geordnet, und bedenkt, daß

$$(-1)^n = -(-1)^{n-1} = (-1)^{n-2} = -(-1)^{n-3} + \ldots\ldots$$

ist, so erhellet augenblicklich, daß, wenn das bemerkte Gesetz bis $n-1$ als richtig angenommen wird, dieses Gesetz auch für n gelten muß, woraus die Allgemeinheit desselben folgt, da seine Richtigkeit oben bis $n=3$ bewiesen worden ist. Wir haben demnach folgende merkwürdige Relationen der Bernoullischen Zahlen:

$$0 = \frac{2\overset{1}{B}}{1.2} - \frac{1}{1..3}$$

$$0 = \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}.\frac{1}{1..3} + \frac{2}{1..5}$$

$$0 = \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}.\frac{1}{1..3} + \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}.\frac{1}{1..5} - \frac{3}{1..7}$$

$$0 = \frac{2^7.\overset{7}{B}}{1..8} - \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6}.\frac{1}{1..3} + \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}.\frac{1}{1..5} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}.\frac{1}{1..7} + \frac{4}{1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

M. s. meine Mathematischen Abhandlungen. Altona. 1822. S. 57 — 60. Diese Gleichungen führen z. B. zur Summation der geraden reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen, worüber der Art. Cyklometrie in diesen Zusätzen zu vergleichen ist.

6. Um nun independente Ausdrücke der Bernoullischen Zahlen zu erhalten, müssen wir von der Entwickelung der Function

$$\frac{h}{e^h-1},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, in eine Reihe nach Potenzen von h ausgehen. Zu dem Ende setze man

$$\frac{h}{e^h-1} = A + A_1h + A_2h^2 + A_3h^3 + \ldots\ldots + A_nh^n + \ldots\ldots,$$

so ist nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\partial^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{\partial h^n},$$

wenn man nach der Differentiation $h=0$ setzt. Führt man die Rechnung aus, so erhält man alle Coefficienten $=\frac{0}{0}$. Diese Schwierigkeit hat Laplace auf folgende sinnreiche Weise vermieden (Lacroix Traité. T. III. p. 107.). Es ist

$$\frac{h}{e^h-1} = \frac{h}{(e^{\frac{1}{2}h}-1)(e^{\frac{1}{2}h}+1)} = \frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1} - \frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1},$$

und, wenn man $h = 0$ setzt, offenbar:

$$\frac{\partial^q \left\{ \frac{ph}{e^{ph} \pm 1} \right\}}{(p\partial h)^q} = \frac{\partial^q \left\{ \frac{h}{e^h \pm 1} \right\}}{\partial h^q}, \quad \frac{\partial^q \left\{ \frac{ph}{e^{ph} \pm 1} \right\}}{\partial h^q} = p^q \frac{\partial^q \left\{ \frac{h}{e^h \pm 1} \right\}}{\partial h^q},$$

da beide Differentialquotienten respective von ph und h ganz auf gleiche Weise abhängen, und $ph = h$ ist, wenn man $h = 0$ setzt. Setzt man nun $p = \frac{1}{2}$, $q = n$, so wird, immer unter der Voraussetzung, daß man nach der Differentiation $h = 0$ setzt:

$$\frac{\partial^n \left\{ \frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h} - 1} \right\}}{\partial h^n} - \frac{\partial^n \left\{ \frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h} + 1} \right\}}{\partial h^n} = \frac{1}{2^n} \frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h - 1} \right\}}{\partial h^n} - \frac{1}{2^n} \frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h + 1} \right\}}{\partial h^n},$$

$$\frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h - 1} \right\}}{\partial h^n} = \frac{1}{2^n} \frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h - 1} \right\}}{\partial h^n} - \frac{1}{2^n} \frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h + 1} \right\}}{\partial h^n},$$

$$\frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h - 1} \right\}}{\partial h^n} = -\frac{1}{2^n - 1} \frac{\partial^n \left\{ \frac{h}{e^h + 1} \right\}}{\partial h^n},$$

wo nun für $h = 0$ das zweite Glied dieser Gleichung nicht mehr $= \frac{0}{0}$ wird. Setzen wir

$$\frac{h}{e^h + 1} = h(e^h + 1)^{-1},$$

so wird nach dem Leibnitzischen Ausdruck für ein beliebiges Differential eines Products (Differentialrechnung. 23.):

$$\partial^n \left\{ h(e^h + 1)^{-1} \right\} = (e^h + 1)^{-1} . \partial^n h + \frac{n}{1} \partial (e^h + 1)^{-1} . \partial^{n-1} h + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1} \partial^{n-1} (e^h + 1)^{-1} . \partial h + \partial^n (e^h + 1)^{-1} . h,$$

oder

$$\frac{\partial^n \{ h(e^h + 1)^{-1} \}}{\partial h^n} = (e^h + 1)^{-1} . \frac{\partial^n h}{\partial h^n} + \frac{n}{1} \frac{\partial (e^h + 1)^{-1}}{\partial h} \frac{\partial^{n-1} h}{\partial h^{n-1}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1} \frac{\partial^{n-1} (e^h + 1)^{-1}}{\partial h^{n-1}} \frac{\partial h}{\partial h} + \frac{\partial^n (e^h + 1)^{-1}}{\partial h^n} h.$$

Weil man aber nach h differentiirt, so ist

$$\frac{\partial h}{\partial h} = 1, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial h^2} = \frac{\partial^3 h}{\partial h^3} = \frac{\partial^4 h}{\partial h^4} = \ldots = 0.$$

Also

$$\frac{\partial^n \{ h(e^h + 1)^{-1} \}}{\partial h} = \frac{n}{1} \frac{\partial^{n-1} (e^h + 1)^{-1}}{\partial h^{n-1}} + \frac{\partial^n (e^h + 1)^{-1}}{\partial h^n} h,$$

und folglich, wenn man $h = 0$ setzt:

$$\frac{\partial^n \{ h(e^h + 1)^{-1} \}}{\partial h^n} = n \frac{\partial^{n-1} (e^h + 1)^{-1}}{\partial h^{n-1}}.$$

Demnach für $h = 0$:

$$\frac{\partial^n \left\{\frac{h}{e^h - 1}\right\}}{\partial h^n} = -\frac{n}{2^n - 1} \cdot \frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h + 1}\right\}}{\partial h^{n-1}},$$

$$A_n = -\frac{1}{1.2.3..(n-1)(2^n-1)} \cdot \frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{\partial h^{n-1}}.$$

Durch successive Differentiation erhält man leicht:

$$\frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{\partial h^{n-1}} = \frac{B_1 e^{(n-1)h} + B_2 e^{(n-2)h} + B_3 e^{(n-3)h} + \ldots + B_{n-1}e^h}{(e^h+1)^n},$$

wo B_1, B_2, B_3, ... B_n gewisse constante Coefficienten bezeichnen, welche nun näher bestimmt werden sollen. Es ist nämlich

$$(e^h+1)^{-1} = e^{-h}(1+e^{-h})^{-1} = e^{-h} - e^{-2h} + e^{-3h} - e^{-4h} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{\partial h^{n-1}} = \left\{e^{-h} - 2^{n-1}e^{-2h} + 3^{n-1}e^{-3h} - 4^{n-1}e^{-4h} + \ldots\right\}(-1)^{n-1},$$

und nach dem Obigen:

$$(e^h+1)^n \frac{\partial^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{\partial h^{n-1}} = B_1 e^{(n-1)h} + B_2 e^{(n-2)h} + \ldots + B_{n-1}e^h.$$

Dies giebt die Gleichung:

$$(e^h+1)^n\left\{e^{-h} - 2^{n-1}e^{-2h} + 3^{n-1}e^{-3h} - 4^{n-1}e^{-4h} + \ldots\right\}(-1)^{n-1}$$
$$= B_1 e^{(n-1)h} + B_2 e^{(n-2)h} + B_3 e^{(n-3)h} + \ldots + B_{n-1}e^h.$$

Entwickelt man das Product auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, nachdem man vorher $(e^h+1)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe entwickelt hat; so erhält man sogleich folgende Ausdrücke:

$$B_1 = 1.(-1)^{n-1}$$

$$B_2 = -\left\{2^{n-1} - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\right\}(-1)^{n-1}$$

$$B_3 = \left\{3^{n-1} - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}.2^{n-1} + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\right\}(-1)^{n-1}$$

$$B_4 = -\left\{4^{n-1} - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}.3^{n-1} + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}.2^{n-1} - {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}\right\}(-1)^{n-1}$$

. . . .

$$B_{n-1} = \left\{(n-1)^{n-1} - {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2)^{n-1} + \ldots \mp {}^n\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.2^{n-1} \pm \overset{n-2}{\mathfrak{B}}\right\}(-1)^n(-1)^{n-1}.$$

Folglich, wenn wir überhaupt

$$\overset{n}{L}x = x^n - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(x-1)^n + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(x-2)^n - \ldots \mp {}^{n+1}\overset{x-2}{\mathfrak{B}}.2^n \pm {}^{n+1}\overset{x-1}{\mathfrak{B}}$$

setzen:

$$(e^h+1)^n\frac{\partial^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{\partial h^{n-1}} = \left\{\begin{matrix}\overset{n-1}{L}_1 e^{(n-1)h} - \overset{n-1}{L}_2 e^{(n-2)h} + \overset{n-1}{L}_3 e^{(n-3)h} - \ldots \\ \ldots - \overset{n-1}{L}_{n-2}e^{2h}.(-1)^n + \overset{n-1}{L}_{n-1}e^h.(-1)^n\end{matrix}\right\}(-1)^{n-1}.$$

Folglich für $h = 0$:

$$\frac{\partial^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{\partial h^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \left\{ \begin{matrix} \overset{n-1}{L}_1 - \overset{n-1}{L}_2 + \overset{n-1}{L}_3 - \overset{n-1}{L}_4 + \ldots \\ \ldots - \overset{n-1}{L}_{n-2} . (-1)^n + \overset{n-1}{L}_{n-1} . (-1)^n \end{matrix} \right\},$$

und demnach nach dem Obigen:

$$A_n = \frac{(-1)^n}{1.2.3..(n-1)(2^n-1)2^n} \left\{ \begin{matrix} \overset{n-1}{L}_1 - \overset{n-1}{L}_2 + \overset{n-1}{L}_3 - \overset{n-1}{L}_4 + \ldots \\ \ldots - \overset{n-1}{L}_{n-2} . (-1)^n + \overset{n-1}{L}_{n-1} . (-1)^n \end{matrix} \right\}.$$

Hierdurch ist also ein allgemeiner independenter Ausdruck eines jeden Coefficienten in der Entwickelung von

$$\frac{h}{e^h - 1}$$

gefunden.

7. Wir wollen nun auch

$$\frac{p-1}{p-e^h},$$

wo p eine willkührliche constante Größe bezeichnet, in eine Reihe nach Potenzen von h entwickeln. Für $h = 0$ ist

$$\frac{p-1}{p-e^h} = \frac{p-1}{p-1} = 1.$$

Deshalb setze man

$$\frac{p-1}{p-e^h} = 1 + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + C_4 h^4 + \ldots + C_n h^n + \ldots,$$

so ist

$$C_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{\partial^n \left\{ \frac{p-1}{p-e^h} \right\}}{\partial h^n},$$

wenn man nach der Differentiation $h = 0$ setzt, oder unter derselben Voraussetzung:

$$C_n = \frac{p-1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{\partial^n (p-e^h)^{-1}}{\partial h^n}.$$

Entwickelt man die Differentialquotienten, so erhält man:

$$\frac{\partial (p-e^h)^{-1}}{\partial h} = \frac{e^h}{(p-e^h)^2}$$

$$\frac{\partial^2 (p-e^h)^{-1}}{\partial h^2} = \frac{pe^h + e^{2h}}{(p-e^h)^3}$$

$$\frac{\partial^3 (p-e^h)^{-1}}{\partial h^3} = \frac{p^2 e^h + 4pe^{2h} + e^{3h}}{(p-e^h)^4}$$

u. s. f. u. s. f.

und überzeugt sich ohne alle Schwierigkeit, daß allgemein

$$\frac{\partial^n (p-e^h)^{-1}}{\partial h^n} = \frac{D_1 p^{n-1} e^h + D_2 p^{n-2} e^{2h} + \ldots + D_{n-1} p e^{(n-1)h} + D_n e^{nh}}{(p-e^h)^{n+1}}$$

ist, wo wieder $D_1, D_2, D_3, \ldots D_n$ gewisse constante Coefficienten sind, welche wir nun näher bestimmen wollen. Es ist

$$(p-e^h)^{-1} = \frac{1}{p} + \frac{e^h}{p^2} + \frac{e^{2h}}{p^3} + \frac{e^{3h}}{p^4} + \frac{e^{4h}}{p^5} + \ldots,$$

woraus man durch successive Differentiation leicht findet:

$$\frac{\partial^n (p-e^h)^{-1}}{\partial h^n} = \frac{e^h}{p^2} + 2^n.\frac{e^{2h}}{p^3} + 3^n.\frac{e^{3h}}{p^4} + 4^n.\frac{e^{4h}}{p^5} + 5^n.\frac{e^{5h}}{p^6} + \ldots$$

Dies mit dem Obigen verglichen, giebt die Gleichung:

$$D_1 p^{n-1} e^h + D_2 p^{n-2} e^{2h} + D_3 p^{n-3} e^{3h} + \ldots + D_n e^{nh}$$

$$= (p-e^h)^{n+1}.\left\{\frac{e^h}{p^2} + 2^n.\frac{e^{2h}}{p^3} + 3^n.\frac{e^{3h}}{p^4} + 4^n.\frac{e^{4h}}{p^5} + \ldots\right\}$$

$$= \left\{p^{n+1} - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, p^n e^h + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, p^{n-1} e^{2h} - {}^{n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\, p^{n-2} e^{3h} + \ldots\right\}$$
$$\left\{\frac{e^h}{p^2} + 2^n.\frac{e^{2h}}{p^3} + 3^n.\frac{e^{3h}}{p^4} + 4^n.\frac{e^{4h}}{p^5} + \ldots\right\}$$

$$\begin{aligned}
= p^{n-1}e^h &+ 2^n p^{n-2} e^{2h} + 3^n p^{n-3} e^{3h} + 4^n p^{n-4} e^{4h} + \ldots \\
&- {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, p^{n-2} e^{2h} - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.2^n p^{n-3} e^{3h} - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.3^n p^{n-4} e^{4h} + \ldots \\
&+ {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, p^{n-3} e^{3h} + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}.2^n p^{n-4} e^{4h} + \ldots \\
&- {}^{n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\, p^{n-4} e^{4h} - \ldots
\end{aligned}$$

woraus man durch Vergleichung der einzelnen Glieder erhält:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 1 && = \overset{n}{L}_1 \\
D_2 &= 2^n - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} && = \overset{n}{L}_2 \\
D_3 &= 3^n - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.2^n + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}} && = \overset{n}{L}_3 \\
D_4 &= 4^n - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.3^n + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}.2^n - {}^{n+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} && = \overset{n}{L}_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots \\
D_n &= n^n - {}^{n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)^n + {}^{n+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)^n - \ldots \mp {}^{n+1}\overset{n-2}{\mathfrak{B}}.2^n \pm {}^{n+1}\overset{n-1}{\mathfrak{B}} && = \overset{n}{L}_n.
\end{aligned}$$

Folglich

$$\frac{\partial^n (p-e^h)^{-1}}{\partial h^n} = \frac{\overset{n}{L}_1 p^{n-1} e^h + \overset{n}{L}_2 p^{n-2} e^{2h} + \overset{n}{L}_3 p^{n-3} e^{3h} + \ldots + \overset{n}{L}_n e^{nh}}{(p-e^h)^{n+1}}$$

und für $h=0$:

$$\frac{\partial^n (p-e^h)^{-1}}{\partial h^n} = \frac{\overset{n}{L}_1 p^{n-1} + \overset{n}{L}_2 p^{n-2} + \overset{n}{L}_3 p^{n-3} + \ldots + \overset{n}{L}_n}{(p-1)^{n+1}}.$$

Also

$$C_n = \frac{\overset{n}{L}_1 p^{n-1} + \overset{n}{L}_2 p^{n-2} + \overset{n}{L}_3 p^{n-3} + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p \pm \overset{n}{L}_n}{1.2.3.4\ldots n\,(p-1)^n}.$$

In der Entwickelung von

$$\frac{1}{p-e^h} = (p-e^h)^{-1}$$

ist der Coefficient des allgemeinen Gliedes

$$= \frac{C_n}{p-1}.$$

Der specielle Fall, wenn $p=1$ ist, hat schon in (6.) seine Erledigung erhalten.

8. Merkwürdig und wichtig ist die Relation

$$\overset{n}{L}_x = \overset{n}{L}_{n-x+1},$$

welche gewöhnlich aus der Theorie der Differenzen hergeleitet wird (Lacroix Traité. T. III. p. 110.). Scherk hat in Crelle's Journal. IV. 3. S. 302. folgenden eleganten Beweis gegeben. Es war nach dem Obigen

$$\frac{p-1}{p-e^h} = 1 + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \ldots + C\, h^n + \ldots.$$

wo

$$C_n = \frac{\overset{n}{L}_1 p^{n-} + \overset{n}{L}_2 p^{n-2} + \overset{n}{L}_3 p^{n-3} + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p + \overset{n}{L}_n}{1.2.3.4\ldots n(p-1)^n}.$$

Setzt man $\frac{1}{p}$ für p, so wird

$$\frac{\frac{1}{p}-1}{\frac{1}{p}-e^h} = \frac{1-p}{1-pe^h} = 1-p+p.\frac{p-1}{p-e^{-h}}$$

$$= 1-p+p\left\{1-C_1h + C_2h^2 - C_3h^3 + \ldots + C_nh^n.(-1)^n \ldots\right\}$$

$$= 1-pC_1h + pC_2h^2 - pC_3h^3 + \ldots + pC_nh^n.(-1)^n \ldots$$

$$= 1 + C'_1h + C'_2h^2 + C'_3h_3 + \ldots + C'_nh^n + \ldots$$

wo

$$C'_n = pC_n.(-1)^n.$$

Aber

$$C'_n = \frac{\overset{n}{L}_1\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + \overset{n}{L}_2\left(\frac{1}{p}\right)^{n-2} + \overset{n}{L}_3\left(\frac{1}{p}\right)^{n-3} + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \overset{n}{L}_n}{1.2.3.4\ldots n\left(\frac{1}{p}-1\right)^n}$$

$$= \frac{p\{\overset{n}{L}_1 + \overset{n}{L}_2 p + \overset{n}{L}_3 p^2 + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p^{n-2} + \overset{n}{L}_n p^{n-1}\}}{1.2.3.4\ldots n(1-p)^n}$$

$$= \frac{p\{\overset{n}{L}_1 + \overset{n}{L}_2 p + \overset{n}{L}_3 p^2 + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p^{n-2} + \overset{n}{L}_n p^{n-1}\}}{1.2.3\ldots n(p-1)^n(-1)^n}$$

$$= \frac{p\{\overset{n}{L}_1 + \overset{n}{L}_2 p + \overset{n}{L}_3 p^2 + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p^{n-2} + \overset{n}{L}_n p^{n-1}\}}{1.2.3.4\ldots n(p-1)^n}(-1)^n.$$

Vergleicht man dies nun mit der Gleichung:

$$C'_n = pC_n(-1)^n$$

$$= \frac{p\{\overset{n}{L}_1 p^{n-1} + \overset{n}{L}_2 p^{n-2} + \overset{n}{L}_3 p^{n-3} + \ldots \overset{n}{L}_{n-1} p + \overset{n}{L}_n\}}{1.2.3.4\ldots n(p-1)^n}(-1)^n,$$

so erhält man für jedes p:

$$\overset{n}{L}_1 + \overset{n}{L}_2 p + \overset{n}{L}_3 p^2 + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p^{n-2} + \overset{n}{L}_n p^{n-1}$$
$$= \overset{n}{L}_1 p^{n-1} + \overset{n}{L}_2 p^{n-2} + \overset{n}{L}_3 p^{n-3} + \ldots + \overset{n}{L}_{n-1} p + \overset{n}{L}_n .$$

Also, weil diese Gleichung für jedes p gilt:

$$\overset{n}{L}_1 = \overset{n}{L}_n$$
$$\overset{n}{L}_2 = \overset{n}{L}_{n-1}$$
$$\overset{n}{L}_3 = \overset{n}{L}_{n-2}$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\overset{n}{L}_{n-1} = \overset{n}{L}_2$$
$$\overset{n}{L}_n = \overset{n}{L}_1$$

d. i. allgemein:

$$\overset{n}{L}_x = \overset{n}{L}_{n-x+1} .$$

Man schließt hieraus leicht, daß der durch A_n bezeichnete Coefficient in (6.) $= 0$ ist, wenn n ungerade und > 1 ist.

9. Aus dem Bisherigen läßt sich nun ein independenter Ausdruck der Bernoullischen Zahlen ableiten. Es ist nämlich (Differentialformeln. III.), wenn wir $\sqrt{-1} = i$ setzen:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

$$\tang x = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$$
$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2ix} + 1 - 2}{e^{2ix} + 1} = \frac{1}{i} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{2ix} + 1} \right\}.$$

Setzen wir in (7.)

$$p = -1, \; h = 2ix;$$

so wird

$$\frac{p-1}{p - e^h} = \frac{2}{-1 - e^{2ix}} = \frac{2}{e^{2ix} + 1} .$$

Also ist das allgemeine Glied der Entwickelung dieser gebrochenen Function nach Potenzen von 2ix

$$= 2^n C_n i^n x^n ,$$

wenn man $p = -1$ setzt, d. i.

$$= \frac{\overset{n}{L}_1 (-1)^{n-1} + \overset{n}{L}_2 (-1)^{n-2} + \ldots - \overset{n}{L}_{n-1} + \overset{n}{L}_n}{1.2.3.4\ldots n.(-2)^n} . 2^n i^n x^n$$

$$= \frac{\overset{n}{L}_1 (-1)^{n-1} + \overset{n}{L}_2 (-1)^{n-2} + \ldots - \overset{n}{L}_{n-1} + \overset{n}{L}_n}{1.2.3.4\ldots n.(-1)^n} i^n x^n .$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so ist nach (8.)

$$\overset{n}{L}_1(-1)^{n-1} = -\overset{n}{L}_1 = -\overset{n}{L}_n$$
$$\overset{n}{L}_2(-1)^{n-2} = \overset{n}{L}_2 = \overset{n}{L}_{n-1}$$
$$\overset{n}{L}_3(-1)^{n-3} = -\overset{n}{L}_3 = -\overset{n}{L}_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n}(-1)^{\frac{1}{2}n} = \pm\overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n} = \pm\overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n+1}.$$

Der Zähler des Coefficienten in dem obigen allgemeinen Gliede ist also

$$= \overset{n}{L}_1(-1)^{n-1} + \overset{n}{L}_2(-1)^{n-2} + \overset{n}{L}_3(-1)^{n-3} + \ldots \pm \overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n}$$
$$\mp \overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n+1} \pm \ldots + \overset{n}{L}_{n-2} - \overset{n}{L}_{n-1} + \overset{n}{L}_n$$
$$= -\overset{n}{L}_n + \overset{n}{L}_{n-1} - \overset{n}{L}_{n-2} + \ldots \pm \overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n+1}$$
$$+ \overset{n}{L}_n - \overset{n}{L}_{n-1} + \overset{n}{L}_{n-2} - \ldots \mp \overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n+1},$$

nämlich $= 0$, so daß man also für n bloß ungerade Zahlen zu setzen braucht. Also ist das allgemeine Gied =

$$-\frac{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{2n-2} + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}}{1.2.3.4\ldots(2n-1)} i^{2n-1} x^{2n-1}.$$

Aber, wie man sich leicht überzeugt:

$$i^{2n-1} = i(-1)^{n-1}.$$

Also das allgemeine Glied =

$$-\frac{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{2n-2} + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}}{1.2.3.4\ldots(2n-1)} ix^{2n-1}(-1)^{n-1}$$
$$= \frac{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{2n-2} + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}}{1.2.3.4\ldots(2n-1)} ix^{2n-1}(-1)^n.$$

Obgleich die, gerade Potenzen von x enthaltenden, Glieder verschwinden, so muß man doch bemerken, daß die in Rede stehende Function ein von x unabhängiges Glied hat, welches = 1 ist, da für $x = 0$

$$\frac{2}{e^{2ix}+1} = \tfrac{2}{2} = 1$$

ist. Folglich ist nach dem Obigen das allgemeine Glied der Entwickelung von tang x

$$= \frac{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{2n-2} + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}}{1.2.3.4\ldots(2n-1)} x^{2n-1}(-1)^{n-1},$$

und diese Entwickelung enthält kein von x unabhängiges Glied mehr, wie sich von selbst versteht, und auch aus dem Obigen unmittelbar folgt. Nach (3.) ist aber das allgemeine Glied der Entwickelung von tang x

$$= \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\overset{2n-1}{B}}{1.2.3.4\ldots 2n}\, x^{2n-1},$$

folglich

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n(-1)^{n-1}}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{2n-2} + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}\right\}.$$

Die eingeklammerte Größe ist nach (8.)

$$= \overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{n-1}(-1)^{n-1} + \overset{2n-1}{L}_n(-1)^{n-1}$$
$$- \overset{2n-1}{L}_{n+1}(-1)^{n-1} + \ldots + \overset{2n-1}{L}_{2n-3} - \overset{2n-1}{L}_{2n-2} + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}$$
$$= \overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{n-1}(-1)^{n-1} + \overset{2n-1}{L}_n(-1)^{n-1}$$
$$+ \overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{n-1}(-1)^{n-1}$$
$$= 2\left\{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{n-1}(-1)^{n-1} + \tfrac{1}{2}\overset{2n-1}{L}_n(-1)^{n-1}\right\}.$$

Also

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\left\{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots - \overset{2n-1}{L}_{n-1}(-1)^{n-1} + \tfrac{1}{2}\overset{2n-1}{L}_n(-1)^{n-1}\right\}$$

oder auch

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\left\{\tfrac{1}{2}\overset{2n-1}{L}_n - \overset{2n-1}{L}_{n-1} + \overset{2n-1}{L}_{n-2} - \ldots + \overset{2n-1}{L}_1(-1)^{n-1}\right\}.$$

Diese merkwürdigen Ausdrücke sind zuerst von Laplace gefunden worden. Einen andern Beweis habe ich in meinen Mathematischen Abhandlungen. S. 93. mit verschiedenen andern Bemerkungen gegeben. Auch s. m. Lacroix Traité. T. III. p. 112 — 114.

Nach (6.) ist

$$A_{2n} = \frac{1}{1.2.3..(2n-1)\,2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\overset{2n-1}{L}_1 - \overset{2n-1}{L}_2 + \overset{2n-1}{L}_3 - \ldots + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}\right\}.$$

Folglich, wie sogleich erhellet:

$$A_{2n} = \frac{\overset{2n-1}{B}}{1.2.3\ldots 2n}(-1)^{n-1}.$$

Aber

$$A_3 = A_5 = A_7 = A_9 = \ldots = 0 \text{ (8.)}.$$

Also

$$\frac{h}{e^h-1} = A + A_1 h + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}h^2 - \frac{\overset{3}{B}}{1\ldots 4}h^4 + \frac{\overset{5}{B}}{1\ldots 6}h^6 - \ldots.$$

Da nun

$$\frac{h}{e^h-1} = \frac{1}{1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{h^3}{1\ldots 4} + \ldots}$$

ist, so ergiebt sich leicht

$$A = 1,\ A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

Folglich

$$\frac{h}{e^h-1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}h^2 - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}h^4 + \frac{\overset{5}{B}}{1..6}h^6 - \ldots.$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \frac{h^3}{1...4} + \frac{h^4}{1...5} + \ldots}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit dem Nenner des letzten Bruchs, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
1 = {} & 1 \\
& + \left\{\frac{\overset{1}{B}}{1.2} - \frac{1}{1..3}\cdot\tfrac{1}{2}\right\}h^2 \\
& + \left\{\frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1..3}\cdot\tfrac{1}{4}\right\}h^3 \\
& - \left\{\frac{\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{1}{1..5}\cdot\tfrac{3}{2}\right\}h^4 \\
& - \left\{\frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..4} + \frac{1}{1..5}\cdot\tfrac{2}{6}\right\}h^5 \\
& + \left\{\frac{\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{1}{1..7}\cdot\tfrac{5}{2}\right\}h^6 \\
& + \left\{\frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..4} + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..6} - \frac{1}{1..7}\cdot\tfrac{3}{8}\right\}h^7 \\
& - \left\{\frac{\overset{7}{B}}{1..8} - \frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{1}{1..3} + \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..7} + \frac{1}{1..9}\cdot\tfrac{7}{2}\right\}h^8 \\
& - \left\{\frac{\overset{7}{B}}{1..8}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{1}{1..4} + \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..6} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..8} + \frac{1}{1..9}\cdot\tfrac{4}{10}\right\}h^9 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes h gilt, so sind alle Coefficienten $=0$. Setzt man die Coefficienten der geraden Potenzen von $h=0$, so erhält man wieder die Gleichungen in (2.). Setzt man aber die Coefficienten der ungeraden Potenzen von $h=0$, so ergeben sich nach leichter Rechnung die folgenden neuen merkwürdigen Relationen:

$$0 = \frac{\overset{1}{B}}{1.2} - \frac{1}{1..3}\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$0 = \frac{\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..3}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1..5}\cdot\tfrac{2}{3}$$

$$0 = \frac{\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..3}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..5}\cdot\tfrac{1}{3} - \frac{1}{1..7}\cdot\tfrac{3}{4}$$

$$0 = \frac{\overset{7}{B}}{1..8} \quad \frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{1}{1..3}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..5}\cdot\tfrac{1}{3} - \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..7}\cdot\tfrac{1}{4} + \frac{1}{1..9}\cdot\tfrac{4}{5}$$

u. s. f. u. s. f.

deren Gesetz sehr leicht zu übersehen ist. Aus den Relationen in (2.) folgt sehr leicht

$$\overset{1}{B} = 1..2\left\{\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

$$\overset{3}{B} = 1..4\left\{-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{1..3}\cdot\frac{\overset{1}{B}}{1.2}\right\}$$

$$\overset{5}{B} = 1..6\left\{\frac{1}{1..7}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{\overset{1}{B}}{1.2}+\frac{1}{1..3}\cdot\frac{\overset{3}{B}}{1..4}\right\}$$

$$\overset{7}{B} = 1..8\left\{-\frac{1}{1..9}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{1..7}\cdot\frac{\overset{1}{B}}{1.2}-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{\overset{3}{B}}{1..4}+\frac{1}{1..3}\cdot\frac{\overset{5}{B}}{1..6}\right\}.$$

u. s. f. u. s. f.

Also auch

$$\overset{1}{B} = 1..2\left\{\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

$$\overset{3}{B} = 1..4\left\{-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{1..3}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$B = 1..6\left\{\frac{1}{1..7}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{1..5}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{1..3}\left(-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{1..3}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)\right\}$$

$$\overset{7}{B} = 1..8\left\{-\frac{1}{1..9}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{1..7}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{1..5}\left(-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{1..3}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1..3}\left(\frac{1}{1..7}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{1..5}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{1..3}\left(-\frac{1}{1..5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{1..3}\left(\frac{1}{1..3}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right\}$$

u. s. f. u. s. f.

Dies sind die von Libri in Crelle's Journal. B. VII. S. 62. gegebenen Ausdrücke, wobei man nur bemerken muß, daß a. a. O. in den dortigen Zeichen $B_2 = B_4 = B_6 = \ldots = 0$, und, mit unsern Zeichen verglichen, $B_1 = \overset{1}{B}$, $B_3 = -\overset{3}{B}$, $B_5 = \overset{5}{B}$, $B_7 = -\overset{7}{B}$, ... ist. Auch ist zu berücksichtigen, daß allgemein a. a. O.

$$-\frac{1}{1..(x+1)}+\frac{1}{1...x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{1...(x+1)}\cdot\frac{x-1}{2}$$

ist. Libri hält seinen Ausdruck für neu und nennt denselben sogar une expression des nombres de Bernoulli plus complète et moins difficile à calculer que toutes celles que l'on connaissait jusqu' à présent. Man sieht aber aus dem Vorhergehenden, daß derselbe nichts mehr und nichts weniger ist, als die längst bekannte in (2.) als Definition der Bernoullischen Zahlen benutzte Relation, noch dazu durchaus nicht auf die einfachste Weise ausgedrückt.

10. Einen andern Ausdruck, durch welchen die Bernoullischen Zahlen und die numerischen Coefficienten der Reihe, welche man durch Entwickelung der Sekante nach den geraden Potenzen des Bogens erhält, zugleich dargestellt werden, hat Scherk a.

a. O. durch einen eleganten Calcul bewiesen. Es ist nämlich nach (3.)

$$\operatorname{tang} x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}\overset{1}{B}x + \frac{2^4(2^4-1)}{1\ldots4}\overset{3}{B}x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1\ldots6}\overset{5}{B}x^5 + \ldots$$

und folglich, wenn wir

$$\sec x = B + \frac{\overset{2}{B}}{1.2}x^2 + \frac{\overset{4}{B}}{1\ldots4}x^4 + \frac{\overset{6}{B}}{1\ldots6}x^6 + \ldots.$$

setzen, nach (Goniometrie. 48.)

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) = \sec x + \operatorname{tang} x$$

$$= 1 + \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}\overset{1}{B}x + \frac{\overset{2}{B}}{1.2}x^2 + \frac{2^4(2^4-1)}{1..4}\overset{3}{B}x^3 + \frac{\overset{4}{B}}{1..4}x^4$$

$$+ \frac{2^6(2^6-1)}{1\ldots6}\overset{5}{B}x^5 + \frac{\overset{6}{B}}{1\ldots6}x^6 + \ldots\ldots$$

da offenbar $B = 1$ ist. Denkt man sich nun, für $y = \frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}x = \varkappa$, nach dem Taylor'schen Lehrsatze $\operatorname{tang}(y+\varkappa)$ entwickelt, so überzeugt man sich leicht, daß

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n}{2^{4n-1}(2^{2n}-1)}\cdot\frac{\partial^{2n-1}\operatorname{tang} y}{\partial y^{2n-1}},\quad \overset{2n}{B} = \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{\partial^{2n}\operatorname{tang} y}{\partial y^{2n}}$$

ist, wenn man nach der Differentiation $y = \frac{1}{4}\pi$ setzt, und daß es folglich bloß darauf ankommt, $\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n}$ zu finden. Nach (9.) ist

$$\operatorname{tang}(y+\varkappa) = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i(y+\varkappa)} - e^{-i(y+\varkappa)}}{e^{i(y+\varkappa)} + e^{-i(y+\varkappa)}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iy} - e^{-2i\varkappa}}{e^{2iy} + e^{-2i\varkappa}},$$

wo man den letzten Ausdruck erhält, wenn man Zähler und Nenner des vorhergehenden Bruchs mit $e^{i(y-\varkappa)}$ multiplicirt. Also auch

$$\operatorname{tang}(y+\varkappa) = \frac{1}{i}\left\{-1 + \frac{2e^{2iy}}{e^{2iy} + e^{-2i\varkappa}}\right\}.$$

Man setze nun in (7.)

$$p = -e^{2iy},\ h = -2i\varkappa,$$

so wird nach (7.)

$$\frac{p-1}{p-e^h} = \frac{e^{2iy}+1}{e^{2iy}+e^{-2i\varkappa}} = 1 + \Sigma 2^n i^n C_n \varkappa^n (-1)^n,$$

wo die Bedeutung des Summenzeichens leicht erhellen wird, indem man diese Summe entwickelt, wenn man für n nach der Reihe die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... setzt.

Dividirt man auf beiden Seiten durch $e^{2iy}+1$, und multiplicirt mit e^{2iy}, so wird:

$$\frac{e^{2iy}}{e^{2iy}+e^{-2i\varkappa}} = \frac{e^{2iy}}{e^{2iy}+1} + \frac{e^{2iy}}{e^{2iy}+1}\Sigma 2^n i^n C_n \varkappa^n (-1)^n.$$

Folglich

$$\tang(y+x) = \frac{1}{i}\left\{\frac{e^{2iy}-1}{e^{2iy}+1} + \frac{2e^{2iy}}{e^{2iy}+1}\Sigma 2^n i^n C_n x^n (-1)^n\right\}$$

oder nach (9.)

$$\tang(y+x) = \tang y + \frac{2e^{2iy}}{i(e^{2iy}+1)}\Sigma 2^n i^n C_n x^n (-1)^n$$

$$= \tang y + \frac{2e^{2iy}}{e^{2iy}+1}\Sigma 2^n i^{n-1} C_n x^n (-1)^n .$$

Also, weil nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\tang(y+x) = \tang y + \Sigma\frac{\partial^n \tang y}{\partial y^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3....n}$$

ist:

$$\frac{\partial^n \tang y}{\partial y^n} = \frac{1.2.3...n.2^{n+1} i^{n-1}(-1)^n e^{2iy}}{e^{2iy}+1}C_n .$$

Nach (7.) ist aber, wenn wir $p = -e^{2iy}$ setzen:

$$C_n = \frac{\overset{n}{L}_1 e^{2(n-1)iy} - \overset{n}{L}_2 e^{2(n-2)iy} + .. - \overset{n}{L}_{n-1} e^{2iy}(-1)^{n-1} + \overset{n}{L}_n(-1)^{n-1}}{1.2.3.4....n(e^{2iy}+1)^n(-1)^n}(-1)^{n-1}$$

$$= -\frac{e^{(n-1)iy}}{1...n(e^{2iy}+1)^n}\left\{\overset{n}{L}_1 e^{(n-1)iy} - \overset{n}{L}_2 e^{(n-3)iy} + .. + \overset{n}{L}_n e^{-(n-1)iy}.(-1)^{n-1}\right\} .$$

Ein allgemeines Glied der eingeschlossenen Reihe, welche wir durch R bezeichnen wollen, ist

$$\overset{n}{L}_r e^{(n-2r+1)iy}.(-1)^{r-1} .$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\frac{\partial^n \tang y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1} i^{n-1} 2^{n+1} e^{(n+1)iy}}{(e^{2iy}+1)^{n+1}} R$$

$$= (-1)^{n+1} i^{n-1}\left\{\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right\}^{-(n+1)} R = \frac{(-1)^{n+1} i^{n-1}}{\cos y^{n+1}} R .$$

Die Summe zweier vom ersten und letzten Gliede der Reihe Ri^{n-1} gleich weit abstehender Glieder ist

$$= \overset{n}{L}_r e^{(n-2r+1)iy}.(-1)^{r-1} i^{n-1} + \overset{n}{L}_{n-r+1} e^{-(n-2r+1)iy}.(-1)^{n-r} i^{n-1} .$$

Aber

$$(-1)^{r-1} i^{n-1} = \left(\frac{1}{-1}\right)^{r-1}.(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{-(r-1)}.(-1)^{\frac{n-1}{2}} = i^{n-2r+1}$$

$$(-1)^{n-r} i^{n-1} = \left(\frac{1}{-1}\right)^{n-r}.(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{-n+r}.(-1)^{\frac{n-1}{2}} = i^{-(n-2r+1)},$$

und nach (8.)

$$\overset{n}{L}_r = \overset{n}{L}_{n-r+1} .$$

Also die Summe zweier vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehender Glieder

$$= \overset{n}{L}_r\left\{e^{(n-2r+1)iy} i^{n-2r+1} + e^{-(n-2r+1)iy} i^{-(n-2r+1)}\right\} .$$

Nach dem Artikel Unmögliche Größe (28.) ist für jedes ganze positive oder negative x:

$$\operatorname{lognat} i = \tfrac{1}{2}\pi i + 2x\pi i .$$

Also

$$i = e^{\frac{1}{2}\pi i + 2\varkappa\pi i}.$$

Folglich für jedes ganze positive oder negati

$$i^{\varrho} = e^{\varrho(\frac{1}{2}\pi i + 2\varkappa\pi i)}$$

und

$$e^{\varrho i y} i^{\varrho} + e^{-\varrho i y} i^{-\varrho} = e^{\varrho(y + \frac{1}{2}\pi + 2\varkappa\pi)i} +$$

$$= 2\cos\varrho(y + \frac{1}{2}\pi + 2\varkappa\pi) = 2\cos\varrho$$

Demnach die Summe zweier gleich weit vo
Gliede abstehender Glieder

$$= 2\overset{n}{L}_r \cos(n - 2r + 1)(\tfrac{1}{2}\pi +$$

Also

$$Ri^{n-1} = 2\overset{n}{L}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi + y) + 2\overset{n}{L}_2 \text{co}$$

$$+ 2\overset{n}{L}_3 \cos(n-5)(\tfrac{1}{2}\pi$$

Wegen des letzten Gliedes sind zwei Fälle
nämlich n eine gerade Zahl, so ist das letzt

$$= 2\overset{n}{L}_{\frac{1}{2}n} \cos(\tfrac{1}{2}\pi + y).$$

Ist aber n eine ungerade Zahl, so ist die
letzten Glieder

$$= 2\overset{n}{L}_{\frac{1}{2}(n-1)} \cos 2(\tfrac{1}{2}\pi + y) + \overset{n}{L}$$

Man kann jedoch beide Fälle in einen zu
man die vereinigten Glieder wieder von ein
nämlich, wie leicht erhellet,

$$2\overset{n}{L}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) = \overset{n}{L}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y)$$

$$2\overset{n}{L}_2 \cos(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi+y) = \overset{n}{L}_2 \cos(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi+y)$$

$$2\overset{n}{L}_3 \cos(n-5)(\tfrac{1}{2}\pi+y) = \overset{n}{L}_3 \cos(n-5)(\tfrac{1}{2}\pi+y)$$

u. s. f.

ist. Dies giebt

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \Big\{ \overset{n}{L}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi + y) + \overset{n}{L}$$

$$+ \overset{n}{L}$$

$$.$$

$$+ \overset{n}{L}$$

d. i.

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \Sigma \overset{n}{L}_r \cos(n-2r+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) \; ($$

In diesem Ausdrucke setze man nun, wie m
schehen muß, $y = \frac{1}{2}\pi$, so ist, weil $\cos y =$

$$\cos(n-2r+1)(\tfrac{1}{4}\pi+y) = \cos(n-2r+1)\tfrac{3}{4}\pi$$
$$= \cos(n-2r+1)(\pi-\tfrac{1}{4}\pi) = (-1)^{n-2r+1}\cos\tfrac{1}{4}(n-2r+1)\pi$$

ist, wie leicht erhellen wird:

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = 2^{\frac{n+1}{2}} \overset{n}{\Sigma} L_r \cos\tfrac{1}{4}(n-2r+1)\pi \quad (\text{für } r = 1,\ 2,\ 3, \ldots n)$$

wobei zu bemerken, daß der Factor $(-1)^{n+1}$ offenbar unter das Summenzeichen gebracht werden kann, und

$$(-1)^{n+1}(-1)^{n-2r+1} = (-1)^{2(n-r+1)} = +1$$

ist. Also ist in der Entwickelung von $\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ der Coefficient von x^n

$$= \frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \quad (\text{für } y = \tfrac{1}{4}\pi)$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^{\frac{1}{2}(n-1)}} \overset{n}{\Sigma} L_r \cos\tfrac{1}{4}(n-2r+1)\pi \quad (\text{für } r = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n}{2^{3n-1}(2^{2n}-1)} \overset{2n-1}{\Sigma} L_r \cos\tfrac{1}{2}(n-r)\pi \quad (\text{für } r = 1,\ 2,\ 3, \ldots 2n-1)$$

$$\overset{2n}{B} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}(2n-1)} \overset{2n}{\Sigma} L_r \cos\tfrac{1}{2}(n-r+\tfrac{1}{2})\pi \quad (\text{für } r = 1,\ 2,\ 3, \ldots 2n).$$

Man kann aber diese beiden Formeln auf folgende Art auch in eine zusammenfassen. Ist nämlich n eine ungerade Zahl, so ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ nach dem Obigen

$$= \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{1.2.3\ldots n(n+1)} \overset{n}{B};$$

ist aber n eine gerade Zahl, so ist dieser Coefficient

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots.n} \overset{n}{B}.$$

Setzen wir nun

$$\nu = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2},$$

so ist, wie leicht erhellet, der allgemeine Ausdruck dieses Coefficienten

$$\frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1}-1)}{1.2.3\ldots.n(\nu n+1)} \overset{n}{B}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden allgemein:

$$\frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1}-1)}{\nu n+1} \overset{n}{B} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n-1)}} \overset{n}{\Sigma} L_r \cos\tfrac{1}{4}(n-2r+1)\pi$$

$$(\text{für } r = 1.2.3\ldots.n);$$

also

$$\overset{n}{B} = \frac{2(\nu n+1)}{2^{(\nu+\frac{1}{2})(n+1)}(2^{\nu n+1}-1)} \overset{n}{\Sigma} L_r \cos\tfrac{1}{4}(n-2r+1)\pi$$

$$(\text{für } r = 1,\ 2,\ 3, \ldots.\ n).$$

Dieser Ausdruck giebt die nte Bernoullis[...] nten Sekanten-Coefficienten, jenachdem n u[...] ist. Da die Rechnung, durch welche man zu [...] Ausdruck gelangt, in mehr als einer Rücksi[...] haben wir sie hier vollständig mitgetheilt. W[...] den obigen Ausdruck für die nte Bernoullisch[...] Es ist

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n}{2^{3n-1}(2^{2n}-1)}\left\{\begin{array}{l}\overset{2n-1}{L}_1 \cos\frac{1}{2}(n-1)\pi + \overset{2n-1}{L}_2 \text{co}\ldots \\ \ldots + \overset{2n-1}{L}_{2n-2}\cos\frac{1}{2}(2-n)\pi + \ldots\end{array}\right.$$

Die eingeschlossene Reihe ist

$$\begin{aligned} = & \overset{2n-1}{L}_1 \cos\tfrac{1}{2}(n-1)\pi + \overset{2n-1}{L}_{2n-1}\cos\tfrac{1}{2}(\ldots \\ & + \overset{2n-1}{L}_2 \cos\tfrac{1}{2}(n-2)\pi + \overset{2n-1}{L}_{2n-2}\cos\tfrac{1}{2}(\ldots \\ & + \overset{2n-1}{L}_3 \cos\tfrac{1}{2}(n-3)\pi + \overset{2n-1}{L}_{2n-3}\cos\tfrac{1}{2}(\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{2n-1}{L}_{n-3}\cos\tfrac{3}{2}\pi + \overset{2n-1}{L}_{n+3}\cos(-\tfrac{3}{2}\pi) \\ & + \overset{2n-1}{L}_{n-2}\cos\tfrac{2}{2}\pi + \overset{2n-1}{L}_{n+2}\cos(-\tfrac{2}{2}\pi) \\ & + \overset{2n-1}{L}_{n-1}\cos\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2n-1}{L}_{n+1}\cos(-\tfrac{1}{2}\pi) \\ & \qquad + \overset{2n-1}{L}_n, \end{aligned}$$

d. i. nach (8.) und einem bekannten goniome[...]

$$\begin{aligned} = & \overset{2n-1}{L}_n + 2\overset{2n-1}{L}_{n-1}\cos\tfrac{1}{2}\pi + 2\overset{2n-1}{L}_{n-2}\cos\tfrac{2}{2}\pi + 2\overset{2n-}{L}\ldots \\ & + 2\overset{2n-1}{L}_{n-4}\cos\tfrac{4}{2}\pi + \ldots + 2\overset{2n-1}{L}_2\cos\tfrac{1}{2}(n-2)\pi \cdot \end{aligned}$$

Aber

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,\ \cos\tfrac{2}{2}\pi = -1,\ \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0,\ \cos\ldots$$

so wie

$$\cos\tfrac{1}{2}(n-1)\pi = \cos\frac{n}{2}\pi\,\cos\tfrac{1}{2}\pi + \sin\frac{n}{2}\pi\,\sin\ldots$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(n-2)\pi = \cos\frac{n}{2}\pi\,\cos\tfrac{2}{2}\pi + \sin\frac{n}{2}\pi\,\sin\ldots$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(n-3)\pi = \cos\frac{n}{2}\pi\,\cos\tfrac{3}{2}\pi + \sin\frac{n}{2}\pi\,\sin\ldots$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(n-4)\pi = \cos\frac{n}{2}\pi\,\cos\tfrac{4}{2}\pi + \sin\frac{n}{2}\pi\,\sin\ldots$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(n-5)\pi = \cos\frac{n}{2}\pi\,\cos\tfrac{5}{2}\pi + \sin\frac{n}{2}\pi\,\sin\ldots$$

u. s. f.

Also obige Reihe

$$= \overset{2n-1}{L}_n - 2\overset{2n-1}{L}_{n-2} + 2\overset{2n-1}{L}_{n-4} - 2\overset{2n-1}{L}_{n-6} + \ldots.$$
$$\ldots - 2\overset{2n-1}{L}_3 \sin\frac{n}{2}\pi - 2\overset{2n-1}{L}_2 \cos\frac{n}{2}\pi + 2\overset{2n-1}{L}_1 \sin\frac{n}{2}\pi$$
$$= \overset{2n-1}{L}_n - 2\overset{2n-1}{L}_{n-2} + 2\overset{2n-1}{L}_{n-4} - 2\overset{2n-1}{L}_{n-6} + \ldots.$$

mit der Bemerkung, daß man immer bloß bis $2\overset{2n-1}{L}_2$ oder $2\overset{2n-1}{L}_1$ geht. Unter derselben Voraussetzung ist also

$$\overset{2n-1}{B} = \frac{2n}{2^{3n-2}(2^{2n}-1)}\left\{\tfrac{1}{2}\overset{2n-1}{L}_n - \overset{2n-1}{L}_{n-2} + \overset{2n-1}{L}_{n-4} - \overset{2n-1}{L}_{n-6} + \ldots\right\}.$$

Für ein gerades n besteht diese Reihe nur aus $\frac{1}{2}n$, für ein ungerades nur aus $\frac{1}{2}(n+1)$ Gliedern, welches ein Vorzug derselben vor dem immer aus n Gliedern bestehenden in (9.) bewiesenen Laplaceschen Ausdruck ist.

11. In dem Artikel Umkehrung der Reihen (22.) ist durch Umkehrung der Reihe

$$\text{Arc tang}\, x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

ein independenter combinatorischer Ausdruck der Bernoullischen Zahlen gefunden worden, welchen wir hier nicht wiederholen. Durch Umkehrung anderer Reihen kann man andere ähnliche Ausdrücke erhalten, worüber H. A. Rothes Abhandlung: Relationen der Localausdrücke von Potenzen besonderer merkwürdiger Reihen in Hindenburgs zweiter Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. Leipzig. 1800. S. 306. ff. nachgesehen werden kann.

12. Den Thl. I. S. 254. mitgetheilten ersten zwölf Bernoullischen Zahlen füge ich hier noch die dreizehn folgenden bei. Von der achtzehnten an sind diese Zahlen von Rothe berechnet. S. a. a. O. S. 336. und Allgem. Literaturzeitung. März 1817. No. 63.

$$\overset{25}{B} = \frac{8553103}{6}$$

$$\overset{27}{B} = \frac{23749461029}{870}$$

$$\overset{29}{B} = \frac{8615841276005}{14322}$$

$$\overset{31}{B} = \frac{7709321041217}{510}$$

$$\overset{33}{B} = \frac{2577687858367}{6}$$

$$\overset{35}{B} = \frac{26315271553053477373}{1919190}$$

$$\overset{37}{B} = \frac{2929993913841559}{6}$$

$$\overset{39}{B} = \frac{261082718496449122051}{13530}$$

$$\overset{41}{B} = \frac{1520097643918070802691}{1806}$$

$$\overset{43}{B} = \frac{27833269579301024235023}{690}$$

$$\overset{45}{B} = \frac{596451111593912163277961}{282}$$

$$\overset{47}{B} = \frac{5609403368997817686249127}{46410}$$

$$\overset{49}{B} = \frac{495057205241079648212477525}{66}$$

Die gemeinen Logarithmen der ersten ac
Zahlen sind nach Eytelweins höherer !
1824. I. S. 488.:

$$\log \overset{1}{B} = 0,2218487496 -$$

$$\log \overset{3}{B} = 0,5228787453 -$$

$$\log \overset{5}{B} = 0,3767507096 -$$

$$\log \overset{7}{B} = 0,5228787453 -$$

$$\log \overset{9}{B} = 0,8794260688 -$$

$$\log \overset{11}{B} = 0,4033154004 -$$

$$\log \overset{13}{B} = 0,0669467896$$

$$\log \overset{15}{B} = 0,8507783387$$

$$\log \overset{17}{B} = 1,7401350433$$

$$\log \overset{19}{B} = 2,7235576597$$

$$\log \overset{21}{B} = 3,7918359878$$

$$\log \overset{23}{B} = 4,9374188514$$

$$\log \overset{25}{B} = 6,1539724516$$

$$\log \overset{27}{B} = 7,4361345055$$

$$\log \overset{29}{B} = 8,7792940212$$

$$\log \overset{31}{B} = 10,1794459554$$

$$\log \overset{33}{B} = 11,6330790754$$

$$\log \overset{35}{B} = 13,1370898829$$

Noch s. m. Eytelwein Vergleichung der Di
mit den Bernoullischen Zahlen. Abhandlunge
Berliner Akademie. 1816—17. Berl. 1819. (
bisch Observationes analyticae. Lips. 1!

Berührung. Dieser Artikel ist bestimmt, im Zusammen-nge eine allgemeine Theorie der Berührung der Curven von ıfacher und doppelter Krümmung und der krummen Flächen zu fern, so wie sie in diesem Wörterbuche noch nirgends gegeben orden ist.

I. Curven von einfacher Krümmung.

1. Seyen

$$f(x, y) = 0, \ f'(x', y') = 0$$

e Gleichungen zweier auf dasselbe Coordinatensystem bezogener urven in einer Ebene. Wir wollen setzen, daß dieselben die unkte

$$(x, y) \text{ und } (x', y')$$

it einander gemein haben; so ist

$$x = x', \quad y = y'.$$

erändert sich nun x oder x' um die beliebige Größe Δ, so nd die Veränderungen von y und y' nach dem Taylorschen ehrsatze

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta^3}{1.2.3} + \ldots .$$

$$\Delta y' = \frac{\partial y'}{\partial x'} \cdot \frac{\Delta}{1} + \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} \cdot \frac{\Delta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3} \cdot \frac{\Delta^3}{1.2.3} + \ldots .$$

Die der Abscisse $x + \Delta = x' + \Delta$ entsprechenden Ordinaten der eiden Curven sind

$$y + \Delta y \text{ und } y' + \Delta y'.$$

Der Unterschied dieser beiden Ordinaten, welchen wir durch D ezeichnen wollen, ist $= \Delta y - \Delta y'$. Also nach dem Obigen

$$D = \left\{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'}\right\} \frac{\Delta}{1} + \left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}\right\} \frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots .$$

Je kleiner Δ wird, desto kleiner wird D. Zugleich fällt aber uch sogleich in die Augen, daß, einerlei Grade der Kleinheit von Δ vorausgesetzt, die Größe D desto kleiner seyn wird, je mehr Glieder der obigen Reihe, für eine besondere Beschaffenheit der n Rede stehenden Curven, vom Anfange an verschwinden. Man ieht also, daß die beiden Curven in der Nähe des Punktes

$$(x, y) = (x', y')$$

ich gewissermaßen desto inniger an einander anschließen, je mehr Glieder der obigen Reihe, in Bezug auf die besondere Beschaffenheit der beiden Curven, vom Anfange an verschwinden. Dies hat auf den folgenden wichtigen allgemeinen Begriff geführt:

Man sagt, daß für zwei durch die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \ f'(x', y') = 0$$

charakterisirte Curven in einer Ebene in dem Punkte

$$(x, y) = (x', y')$$

eine Berührung oder ein Contact der nten Ordnung Statt findet, wenn für den in Rede stehenden Punkt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3}, \ldots \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y'}{\partial x'^n}$$

ist. Der Punkt

$$(x, y) = (x', y')$$

heißt der Berührungspunkt.

Nach diesem allgemeinen Begriffe wollen wir nun zu einer nähern Betrachtung der Berührungen erster und zweiter Ordnung übergehen, weil dieselben für die ganze Mathematik von der größten Wichtigkeit sind.

2. Wenn zwischen den durch die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, f'(x', y') = 0$$

charakterisirten Curven in dem Punkte

$$(x, y) = (x', y')$$

eine Berührung erster Ordnung Statt findet; so ist

$$x = x', \quad y = y', \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}.$$

Man denke sich jetzt eine dritte durch die Gleichung

$$f''(x'', y'') = 0$$

charakterisirte beliebige Curve in derselben Ebene, welche durch den Punkt

$$(x, y) = (x', y')$$

geht, so daß also

$$(x, y) = (x', y') = (x'', y''),$$

aber nicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial y''}{\partial x''}$$

ist. Setzt man den Unterschied zwischen den Ordinaten der beiden durch die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad f''(x'', y'') = 0$$

charakterisirten Curven, welche den Abscissen

$$x + \Delta = x'' + \Delta$$

entsprechen, $= D'$; so ist ganz wie oben

$$D' = \left\{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y''}{\partial x''}\right\}\frac{\Delta}{1} + \left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y''}{\partial x''^2}\right\}\frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots,$$

und nach der Voraussetzung nicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y''}{\partial x''} = 0.$$

Weil aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'} = 0$$

ist; so ist nach (1.)

$$D = \left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}\right\}\frac{\Delta^2}{1.2} + \left\{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3}\right\}\frac{\Delta^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke von D und D′ geht augenblicklich hervor, daß man Δ rücksichtlich seines absoluten Werthes immer so klein nehmen kann, daß, ebenfalls in Bezug auf die absoluten Werthe,

$$D' > D$$

ist. Man sieht also, daß, wenn zwischen zwei beliebigen Curven in einer Ebene eine Berührung der ersten Ordnung Statt findet, in derselben Ebene durch den Berührungspunkt keine dritte Curve gezogen werden kann, welche in der Nähe des Berührungspunktes zwischen den beiden gegebenen Curven liegt, und sich also an die eine oder die andere derselben näher anschließt, als diese beiden Curven sich selbst an einander anschließen. Daß Dasselbe auch für Berührungen höherer Grade Statt findet, erhellet leicht, und kann auf ganz ähnliche Art bewiesen werden.

3. Sey nun die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

einer Curve von einfacher Krümmung gegeben, und man suche die Gleichung der geraden Linie in derselben Ebene, welche mit der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y) eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Die Gleichung der gesuchten geraden Linie sey

$$y' = Ax' + B.$$

Die Bedingungen eines Contacts der ersten Ordnung sind

$$x = x',\ y = y',\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}.$$

Folglich

$$y = Ax + B,$$

und demnach durch Subtraction von der obigen allgemeinen Gleichung der gesuchten berührenden Geraden

$$y' - y = A(x' - x).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = A,\ \frac{\partial y}{\partial x} = A.$$

Also ist

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x)$$

die gesuchte Gleichung der Berührenden. Der Differentialquotient wird aus der gegebenen Gleichung $f(x, y) = 0$ gefunden, und x, y sind die Coordinaten des Berührungspunktes.

4. Will man die Abscisse des Durchschnittspunktes der berührenden Geraden mit der Abscissenaxe haben; so muß man in obiger Gleichung $y' = 0$ setzen. Dies giebt sogleich

$$x' = x - y\frac{\partial x}{\partial y}.$$

Nimmt man den Fußpunkt der Ordinate des Berührungspunktes als Anfang der Abscissen an; so ist nach dem Artikel Coordinate (4.) i. d. Z. die Abscisse des in Rede stehenden Durchschnittspunktes gleich

$$x' - x = -\frac{y\partial x}{\partial y}.$$

Nimmt man dagegen den in Rede stehenden Durchschnittspunkt selbst als Axe der Abscissen an; so ist die Abscisse des Fußpunktes der Ordinate des Berührungspunktes nach dem angeführten Artikel gleich

$$x - x' = \frac{y\partial x}{\partial y}.$$

Im Allgemeinen nennt man gewöhnlich den Abstand des Fußpunktes der Ordinate des Berührungspunktes und des Durchschnittspunktes der berührenden Geraden mit der Abscissenaxe die Subtangente, und setzt gemeiniglich

$$\text{Subtangente} = \frac{y\partial x}{\partial y},$$

so daß man also nach dem Vorhergehenden unter der Subtangente eigentlich die Abscisse des Fußpunktes der Ordinate des Berührungspunktes, in Bezug auf den Durchschnittspunkt der berührenden Geraden mit der Axe der Abscissen als Anfang der Coordinaten, versteht. Betrachtete man dagegen die Subtangente als Abscisse des Durchschnittspunktes der berührenden Geraden mit der Abscissenaxe, in Bezug auf den Fußpunkt der Ordinate des Berührungspunktes als Anfang der Abscissen, so müßte man

$$\text{Subtangente} = -\frac{y\partial x}{\partial y}$$

setzen. Wäre das Erste nicht schon allgemein eingeführt, so würde sich der Verfasser dieser Zusätze, aus leicht begreiflichen Gründen, für das Letztere erklären. Jeden Falls sind aber die wenigen obigen Bemerkungen völlig hinreichend, die von dem sonst vielfach verdienten v. Busse in der Schrift: Formulae linearum Subtangentium ac Subnormalium explicatae a F. T. Busse. Lips. 1798. und in einigen neuern Schriften (namentlich Formulae radii osculatoris, quoad valores earum positivos ac negativos diligentius explicatae. Dresd. 1825.) erhobenen Zweifel zu widerlegen und in ihr wahres Licht zu setzen.

5. Bezeichnet man den von der berührenden Geraden mit der Axe der x eingeschlossenen Winkel durch φ, indem man diese Winkel von der Seite der positiven x nach der Seite der positiven y hin nimmt; so ergiebt sich aus bekannten Sätzen von der geraden Linie augenblicklich die Gleichung

$$\tan g\,\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.).$$

6. Denkt man sich durch den Berührungspunkt auf die berührende gerade Linie ein Perpendikel errichtet; so heißt dieses Perpendikel die **Normale** der gegebenen Curve. Für zwei auf einander senkrechte gerade Linien

$$y = Ax + B \text{ und } y = A'x + B'$$

findet bekanntlich immer die Gleichung

$$1 + AA' = 0$$

Statt. Ist also

$$y' = Ax' + B$$

die Gleichung der Normale; so ist, weil nach (3.)

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x)$$

die Gleichung der Berührenden ist,

$$1 + A\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ A = -\frac{\partial x}{\partial y}.$$

Da die Normale durch den Berührungspunkt geht, so ist

$$y = Ax + B,$$

woraus mittelst Subtraction augenblicklich

$$y' - y = A(x' - x);$$

also, wenn man für A den gefundenen Ausdruck setzt,

$$y' - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(x' - x)$$

die Gleichung der Normale.

Will man den Durchschnittspunkt der Normale mit der Axe der x finden, so muß man in dieser Gleichung $y' = 0$ setzen. Dadurch erhält man auf der Stelle

$$x' = x + y\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nimmt man den Fußpunkt der Ordinate des Berührungspunktes als Anfang der Abscissen an; so ist die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normale mit der Abscissenaxe nach dem Artikel **Coordinate** (4.) i. d. Z. gleich

$$x' - x = y\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Diese Größe heißt die **Subnormale** der gegebenen Curve. Gemeiniglich versteht man überhaupt unter der Subnormale den Abstand des Fußpunktes der Ordinate des Berührungspunktes und des Durchschnittspunktes der Normale mit der Abscissenaxe von einander. Die nähere Bestimmung dieses Ausdrucks ergiebt sich nun aber aus dem Obigen unmittelbar. Würde der Durchschnittspunkt der Normale mit der Axe der Abscissen als Anfang derselben angenommen; so würde man, auf ähnliche Art wie oben bei der Subtangente,

$$\text{Subnormale} = -\frac{y\partial y}{\partial x}$$

erhalten, indem nun die Subnormale die Abscisse des Fußpunktes der Ordinate in Bezug auf den angenommenen Anfangspunkt wäre. Hieraus sieht man auch, daß, weil man gewöhnlich

$$\text{Subtangente} = \frac{y\partial x}{\partial y},$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y\partial y}{\partial x}$$

setzt, diese Linien eigentlich nicht von einerlei Anfangspunkte aus genommen werden, und daß es daher auch in dieser Beziehung besser und natürlicher wäre,

$$\text{Subtangente} = -\frac{y\partial x}{\partial y},$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y\partial y}{\partial x}$$

zu setzen, indem dann die Subtangente und Subnormale die Abscissen der Durchschnittspunkte der Berührenden und der Normale mit der Axe der Abscissen sind, wenn man den Fußpunkt der Ordinate des Berührungspunktes als Anfang der Abscissen annimmt.

Fragt man nach der Länge des zwischen dem Berührungspunkte und ihrem Durchschnittspunkte mit der Axe der Abscissen liegenden Stücks der Normale; so fällt sogleich in die Augen, daß, unter dieser Voraussetzung,

$$\text{Normale} = y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

ist. Eben so ist, in Bezug auf das zwischen dem Berührungspunkte und ihrem Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe liegende Stück der Berührenden oder Tangente, offenbar

$$\text{Tangente} = y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}.$$

7. Da es uns in diesem Artikel hauptsächlich nur um die allgemeinen Formeln zu thun ist; so mag für die Anwendung der gefundenen Formeln die Ellipse als einziges Beispiel genügen. Sind a, b die große und kleine Halbaxe einer Ellipse; so ist ihre einfachste Gleichung bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{x}{a^2}\partial x + \frac{y}{b^2}\partial y = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Also sind die Gleichungen der Berührenden und der Normale

$$y' - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(x' - x),$$

$$y' - y = \frac{a^2y}{b^2x}(x' - x),$$

oder, weil immer

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

ist, die Gleichung der Berührenden auch

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

oder

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Für einen Kreis, dessen Halbmesser $= r$ ist, ist $a = b = r$; also

$$xx' + yy' = r^2$$

die Gleichung der Berührenden, und

$$xy' = x'y$$

die Gleichung der Normale, welche folglich immer durch den Anfang der Coordinaten, d. i. durch den Mittelpunkt des Kreises geht, oder ein Halbmesser desselben ist.

8. Die allgemeinen Gleichungen der Berührenden und der Normale lassen sich leicht noch auf einen andern Ausdruck bringen, welcher in vielen Fällen in der Anwendung vorzüglich bequem ist. Setzen wir nämlich die Function $f(x, y) = S$; so ist

$$S = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve. Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

wo

$$\frac{\partial S}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial S}{\partial y}$$

bekanntlich partielle Differentiale der Function S sind. Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial y}}.$$

Folglich sind nach (3.) und (6.) die Gleichungen der Berührenden und der Normale respective:

$$(x' - x)\frac{\partial S}{\partial x} + (y' - y)\frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

$$(x' - x)\frac{\partial S}{\partial y} - (y' - y)\frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Auch durch ihre Symmetrie empfehlen sich diese beiden Gleichungen sehr.

9. Soll man an die durch die Gleichung

$$f(x, y) = S = 0$$

gegebene Curve eine Berührende ziehen, welche zugleich durch gegebenen Punkt (a, b) geht; so muß man die Coordinaten y des Berührungspunktes durch Elimination aus den Gleichungen

$$S = 0,\ (a-x)\frac{\partial S}{\partial x} + (b-y)\frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

bestimmen.

Soll man an die gegebene Curve eine Berührende zie welche mit einer beliebigen durch die Gleichung

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1$$

gegebenen geraden Linie parallel ist; so ist, weil

$$(x'-x)\frac{\partial S}{\partial x} + (y'-y)\frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

die allgemeine Gleichung der Berührenden ist, nach bekan Elementarsätzen der analytischen Geometrie

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial y}},$$

d. i.

$$a\frac{\partial S}{\partial x} - b\frac{\partial S}{\partial y} = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit der Gleichung

$$S = 0\,,$$

müssen die Coordinaten x, y des Berührungspunktes bestim werden.

Soll man eine gerade Linie ziehen, welche zwei durch d Gleichungen

$$S = 0,\ S' = 0,$$

oder

$$f(x, y) = 0,\ f(X, Y) = 0$$

gegebene Curven zugleich berührt; so seyen (x, y) und (X, Y) die beiden Berührungspunkte. Man hat also folgende zw Gleichungen der gesuchten Berührenden nach dem Obigen:

$$(x'-x)\frac{\partial S}{\partial x} + (y'-y)\frac{\partial S}{\partial y} = 0\,,$$

$$(x'-X)\frac{\partial S'}{\partial X} + (y'-Y)\frac{\partial S'}{\partial Y} = 0\,.$$

Da nun diese beiden Gleichungen, welche sich leicht auf d Formen

$$y' = -\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial y}}x' + \frac{x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y}}{\frac{\partial s}{\partial y}},$$

$$y' = -\frac{\frac{\partial S'}{\partial X}}{\frac{\partial S'}{\partial Y}}x' + \frac{X\frac{\partial S'}{\partial X} + Y\frac{\partial S'}{\partial Y}}{\frac{\partial S'}{\partial Y}},$$

bringen lassen, ein und derselben geraden Linie entsprechen; so ist

$$\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial S'}{\partial X}}{\frac{\partial S'}{\partial Y}}, \quad \frac{x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y}}{\frac{\partial s}{\partial y}} = \frac{X\frac{\partial S'}{\partial X} + Y\frac{\partial S'}{\partial Y}}{\frac{\partial S'}{\partial Y}},$$

oder

$$\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial S'}{\partial X}} = \frac{\frac{\partial s}{\partial y}}{\frac{\partial S'}{\partial Y}} = \frac{x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y}}{X\frac{\partial S'}{\partial X} + Y\frac{\partial S'}{\partial Y}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen, verbunden mit den Gleichungen

$$S = 0, \; S' = 0,$$

müssen die Coordinaten x, y und X, Y der Berührungspunkte bestimmt werden.

10. Gehen wir nun ferner zu der Bestimmung eines Kreises über, welcher mit der durch die Gleichung

$$f(x, y) = S = 0$$

gegebenen Curve in dem Punkte (x, y) eine Berührung erster Ordnung hat. Ist ϱ der Halbmesser dieses Kreises; so ist, wenn α, β die Coordinaten seines Mittelpunktes bezeichnen,

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = \varrho^2$$

die Gleichung desselben. Man muß nun α, β, ϱ zu bestimmen suchen. Aus vorstehender Gleichung ergiebt sich mittelst Differentiation augenblicklich

$$x'-\alpha + (y'-\beta)\frac{\partial y'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}.$$

Im Berührungspunkte ist nach (2.)

$$x' = x, \; y' = y, \; \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}.$$

Ferner ist auch

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2.$$

Also

$$1+\left(\frac{x-\alpha}{y-\beta}\right)^2=\left(\frac{\varrho}{y-\beta}\right)^2,$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\;=\left(\frac{\varrho}{y-\beta}\right)^2,$$

woraus leicht

$$y-\beta=\frac{\varrho}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},\ x-\alpha=-\frac{\varrho\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}};$$

$$\alpha=x+\frac{\varrho\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},\ \beta=y-\frac{\varrho}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}.$$

Hierdurch sind also die Coordinaten α, β des Mittelpunkts des gesuchten Kreises bestimmt, wenn ϱ gegeben ist. Zur Bestimmung der drei Größen α, β, ϱ reichen aber die obigen Bedingungen nicht hin, woraus man sieht, daß die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher in dem gegebenen Punkte (x, y) mit einer gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung hat, eine unbestimmte Aufgabe ist, indem ϱ willkührlich angenommen werden kann. Weil nach dem Obigen

$$x'-\alpha+(y'-\beta)\frac{\partial y'}{\partial x'}=0,$$

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

oder

$$\beta-y=-\frac{\partial x}{\partial y}(\alpha-x)$$

ist; so folgt aus (6.), daß die Normale der gegebenen Curve in dem gegebenen Punkte (x, y) der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise ist, welche in diesem Punkte mit der gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung haben.

Wegen der Unbestimmtheit der so eben behandelten Aufgabe wollen wir nun den Kreis zu bestimmen suchen, welcher mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Punkte eine Berührung zweiter Ordnung hat, weil nach dem Obigen in diesem Falle noch die Erfüllung einer neuen Bedingung erfordert, die Bestimmung des dritten der drei Elemente α, β, ϱ also offenbar möglich seyn wird.

11. Im Falle einer Berührung zweiter Ordnung ist nämlich, wenn wieder

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\varrho^2$$

die Gleichung des gesuchten Kreises ist,

$$x'=x,\ y'=y,\ \frac{\partial y'}{\partial x'}=\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Differentiirt man nun die obige Gleichung zwei Mal; so erhält man

$$x' - \alpha + (y' - \beta)\frac{\partial y'}{\partial x'} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2 + (y' - \beta)\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = 0.$$

Also nach dem Obigen

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (y - \beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Folglich

$$x - \alpha = -(y - \beta)\frac{\partial y}{\partial x},\ y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}};$$

$$x - \alpha = \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\ y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}};$$

oder

$$\alpha = x - \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\ \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

wodurch die Coordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises vollständig und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt sind. Daß die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

immer aus der Gleichung

$$f(x, y) = S = 0$$

bestimmt werden müssen, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Es ist nun bloß noch übrig ϱ zu bestimmen.

Zu dem Ende hat man

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2.$$

Folglich, wenn man die gefundenen Ausdrücke von $x - \alpha$ und $y - \beta$ in diese Gleichung setzt:

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Durch

$$\alpha = x - \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\ \beta = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\ \varrho = \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}};$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p'$$

setzt,

$$\alpha = x - \frac{p(1+p^2)}{p'},\ \beta = y + \frac{1+p^2}{p'},\ \varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'}$$

ist Lage und Größe des gesuchten Kreises vollständig bestimmt. Man nennt diesen Kreis, welcher mit der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y) eine Krümmung zweiter Ordnung hat, den Krümmungskreis der Curve in diesem Punkte, und seinen Radius den Krümmungshalbmesser. Der Grund dieser Benennungen wird leicht erhellen. Weil nämlich der in Rede stehende Kreis in dem Punkte (x, y) sich sehr eng an die Curve anschließt, so kann man sich offenbar durch diesen Kreis ihre Krümmung in dem Punkte (x, y) dargestellt denken. Durch die oben gefundenen Ausdrücke der Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises ist die Lage desselben vollständig bestimmt, so daß es also nicht nöthig ist, wie dies sonst wohl geschieht, eine besondere Bestimmung wegen des Vorzeichens des Krümmungshalbmessers zu geben, indem es bloß auf die absolute Größe desselben ankommt, wenn man nur die Lage des Mittelpunktes des Krümmungskreises, wie dies hier der Fall ist, völlig genau kennt. Gewöhnlich setzt man

$$\varrho = -\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'},$$

wovon der Grund folgender ist. Man ist nämlich übereingekommen, den Krümmungshalbmesser in einem Punkte, dessen Ordinate positiv, und in dessen Nähe die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist, als positiv zu betrachten. In diesem Falle ist aber, wie in dem Artikel Concav und Convex (10.) gezeigt worden ist, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ. Damit nun ϱ positiv werde, schreibt man der Formel das negative Zeichen vor. Jedoch scheint dies eine überflüssige, allgemeine Rechnungen nur erschwerende Weitläufigkeit zu seyn, weshalb wir in diesem Artikel, darin mehrern neuern, vorzüglich französischen, Schriftstellern folgend, der allgemeinen Formel für ϱ ihre positive Form gelassen haben, welches darauf hinaus kommt, daß nun der Krümmungshalbmesser in einem Punkte, dessen Ordinate positiv, und in dessen Nähe die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist, sich negativ ergiebt, welches, wie es uns scheint, kein Uebelstand ist, da es ja überhaupt, wie wir schon

oben bemerkt haben, bloß eigentlich auf die absolute Größe des Krümmungshalbmessers ankommt. Man kann den gefundenen Formeln, namentlich der Formel für den Krümmungshalbmesser, verschiedene Gestalten geben, von denen wir jetzt die wichtigsten durchgehen wollen.

12. Differentiirt man die Gleichung

$$f(x, y) = s = 0$$

zwei Mal nach einander; so erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial x} + p\frac{\partial s}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + p^2\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + p'\frac{\partial s}{\partial y} = 0.$$

Also

$$p = -\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial y}},\quad p' = -\frac{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^3},$$

und hieraus mittelst (11.) leicht:

$$\alpha = x - \frac{\frac{\partial s}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right\}}{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2},$$

$$\beta = y - \frac{\frac{\partial s}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right\}}{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2},$$

$$\varrho = -\frac{\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2},$$

oder auch, da es nur auf den absoluten Werth von ϱ ankommt, bloß

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}.$$

Vor andern einfachern Formeln empfehlen sich diese Ausdrücke sehr durch ihre Symmetrie, und sind auch häufig in der Anwendung besonders bequem.

13. Im Vorhergehenden ist überall ∂x als constant betrachtet worden. Sind aber x und y beide von einer beliebigen neuen veränderlichen Größe abhängig; so muß man, indem sich nun alle Differentiale von x und y auf diese neue veränderliche Größe beziehen, für

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

in obigen Formeln überall respective

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

setzen, wie in dem Artikel Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe (1.) ausführlich gezeigt worden ist. Dadurch erhält man aus (11.)

$$\alpha = x - \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)\partial y}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

$$\beta = y + \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)\partial x}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

$$\varrho = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x};$$

wo sich nun, wie schon erinnert, alle Differentiale von x und y auf eine neue beliebige veränderliche Größe beziehen, deren Differential als constant zu betrachten ist. Bezeichnen wir den dem Punkte (x, y) als seinem Endpunkte entsprechenden Bogen der gegebenen Curve durch s; so ist bekanntlich

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 .$$

Also

$$\alpha = x - \frac{\partial s^2 \partial y}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

$$\beta = y + \frac{\partial s^2 \partial x}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

$$\varrho = \frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}.$$

Weil

$$\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x = \partial x^2 . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = - \partial y^2 . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

ist; so kann man die vorhergehenden Gleichungen auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\alpha = x - \frac{\partial s^2 \partial y}{\partial x^2 . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)},$$

$$\beta = y + \frac{\partial s^2}{\partial x . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)},$$

$$\varrho = \frac{\partial s^3}{\partial x^2 . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)},$$

oder

$$\alpha = x + \frac{\partial s^2}{\partial y . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)},$$

$$\beta = y - \frac{\partial s^2 \partial x}{\partial y^2 . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)},$$

$$\varrho = - \frac{\partial s^3}{\partial y^2 . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}.$$

Ferner folgt aus

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$$

augenblicklich

$$\partial s \partial^2 s = \partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y .$$

Also

$$\partial s^2 . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \partial s \partial^2 x - \partial x \partial^2 s$$

$$= \frac{\partial s^2 \partial^2 x - \partial x^2 \partial^2 x - \partial x \partial y \partial^2 y}{\partial s}$$

$$= - \frac{\partial y (\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)}{\partial s}$$

$$\partial s^2 . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \partial s \partial^2 y - \partial y \partial^2 s$$

$$= \frac{\partial s^2 \partial^2 y - \partial x \partial y \partial^2 x - \partial y^2 \partial^2 y}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial x (\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x} = - \frac{\partial y}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)} = \frac{\partial x}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)} .$$

Folglich

$$\alpha = x + \frac{\partial y^2}{\partial s . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)},\ \beta = y - \frac{\partial x \partial y}{\partial s . \partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)},\ \varrho = - \frac{\partial y}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)};$$

oder

$$\alpha = x - \frac{\partial x \partial y}{\partial s . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)},\ \beta = y + \frac{\partial x^2}{\partial s . \partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)},\ \varrho = \frac{\partial x}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)} .$$

Endlich ist auch

$$\partial x^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \partial x \partial^2 s - \partial s \partial^2 x$$

$$= \frac{\partial x^2 \partial^2 x + \partial x \partial y \partial^2 y - \partial s^2 \partial^2 x}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial y (\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)}{\partial s},$$

$$\partial y^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \partial y \partial^2 s - \partial s \partial^2 y$$

$$= \frac{\partial x \partial y \partial^2 x + \partial y^2 \partial^2 y - \partial s^2 \partial^2 y}{\partial s}$$

$$= - \frac{\partial x (\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)}{\partial s} .$$

Folglich

$$\alpha = x - \frac{\partial s \partial y^2}{\partial x^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}, \beta = y + \frac{\partial s \partial y}{\partial x . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}, \varrho =$$

oder

$$\alpha = x + \frac{\partial s \partial x}{\partial y . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)}; \beta = y - \frac{\partial s \partial x^2}{\partial y^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)}, \varrho =$$

14. Für polare Coordinaten hat man, n der rechtwinkligen Coordinaten als Pol angenoı sogleich erhellet,

$$x = r \cos\varphi, \; y = r \sin\varphi .$$

φ und r sind die polaren Coordinaten, und r den Radius vector. Also

$$\partial x = \cos\varphi \partial r - r \sin\varphi \partial\varphi, \; \partial y = \sin\varphi \partial r +$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi \partial r + r \cos\varphi \partial\varphi}{\cos\varphi \partial r - r \sin\varphi \partial\varphi} = - \frac{r \cos\varphi \cdot}{r \sin\varphi -}$$

Hieraus folgt ferner

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}}{\left\{r \sin\varphi - \cos\varphi \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right\}^2} .$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\left(r \sin\varphi - \cos\varphi \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right) .$$

Also

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi} . \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}{\left\{r \sin\varphi - \cos\right.}$$

Auch ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}{\left\{r \sin\varphi - \cos\varphi \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right\}^2} .$$

Folglich

$$\alpha = r\cos\varphi - \frac{\left\{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\left\{r\cos\varphi+\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right\}}{r^2+2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2-r\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}},$$

$$\beta = r\sin\varphi - \frac{\left\{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\left\{r\sin\varphi-\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right\}}{r^2+2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2-r\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}},$$

$$\varrho = -\frac{\left\{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2-r\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}}.$$

Hier ist $\partial\varphi$ als constant betrachtet worden. Soll dies nicht der Fall seyn, so muß man nach (13.) für

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} \text{ und } \frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}$$

respective

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} \text{ und } \frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}$$

setzen, wodurch man erhält:

$$\varrho = -\frac{(\partial r^2+r^2\partial\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2\partial\varphi^3+2\partial r^2\partial\varphi-r\partial^2 r\partial\varphi+r\partial r\partial^2\varphi},$$

oder

$$\varrho = -\frac{(\partial r^2+r^2\partial\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2\partial\varphi^3+2\partial r^2\partial\varphi+r\partial r^2.\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}$$

$$= -\frac{(\partial r^2+r^2\partial\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2\partial\varphi^3+2\partial r^2\partial\varphi-r\partial\varphi^2.\partial\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)}.$$

Auch erhellet leicht, daß

$$\partial s^2 = \partial x^2+\partial y^2 = \partial r^2+r^2\partial\varphi^2$$

ist. Also ist

$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{r^2\partial\varphi^3+2\partial r^2\partial\varphi+r\partial r^2.\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}$$

$$= -\frac{\partial s^3}{r^2\partial\varphi^3+2\partial r^2\partial\varphi-r\partial\varphi^2.\partial\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)}.$$

Noch einfacher kann man diese Formeln auf folgende Art ausdrücken. Es ist nämlich

$$r^2\partial\varphi^3+2\partial r^2\partial\varphi-r\partial^2 r\partial\varphi+r\partial r\partial^2\varphi,$$
$$=(\partial r^2+r^2\partial\varphi^2)\partial\varphi+r\partial r\partial^2\varphi+\partial r^2\partial\varphi-r\partial^2 r\partial\varphi$$
$$=(\partial r^2+r^2\partial\varphi^2)\partial\varphi-(r\partial\varphi\partial^2 r-\partial r^2\partial\varphi-r\partial r\partial^2\varphi)$$
$$=\partial s^2\partial\varphi+\partial r^2.\partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial r}\right)=\partial s^2\partial\varphi-r^2\partial\varphi^2.\partial\left(\frac{\partial r}{r\partial\varphi}\right).$$

Also
$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2 \partial \varphi + \partial r^2 . \partial \left(\frac{r \partial \varphi}{\partial r}\right)} = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2 \partial \varphi - r^2 \partial \varphi^2 . \partial \left(\frac{\partial r}{r \partial \varphi}\right)} .$$

Auch ist
$$\partial s \partial^2 s = \partial r \partial^2 r + r^2 \partial \varphi \partial^2 \varphi + r \partial r \partial \varphi^2 .$$

Also
$$\partial r^2 . \partial \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right) = \partial r \partial^2 s - \partial s \partial^2 r$$
$$= \frac{\partial r^2 \partial^2 r + r^2 \partial r \partial \varphi \partial^2 \varphi + r \partial r^2 \partial \varphi^2 - \partial s^2 \partial^2 r}{\partial s}$$
$$= \frac{r^2 \partial r \partial \varphi \partial^2 \varphi + r \partial r^2 \partial \varphi^2 - r^2 \partial^2 r \partial \varphi^3}{\partial s}$$
$$= \frac{r \partial \varphi \{ \partial r^2 \partial \varphi - r \partial^2 r \partial \varphi + r \partial r \partial^2 \varphi \}}{\partial s} ,$$
$$\frac{\partial s \partial r^2 . \partial \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)}{r \partial \varphi} = \partial r^2 \partial \varphi - r \partial^2 r \partial \varphi + r \partial r \partial^2 \varphi .$$

Folglich
$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2 \partial \varphi + \frac{\partial s \partial r^2 . \partial \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)}{r \partial \varphi}} ,$$

d. i.
$$\varrho = -\frac{r \partial s^2 \partial \varphi}{r \partial s \partial \varphi^2 + \partial r^2 . \partial \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)} .$$

Bei der Entwickelung von ϱ nach dieser Formel braucht man $\partial^2 \varphi$ nicht zu kennen. Auf ganz ähnliche Art ist
$$\partial s^2 \partial \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) = \partial s \partial^2 r - \partial r \partial^2 s$$
$$= -\frac{r \partial \varphi \{ \partial r^2 \partial \varphi - r \partial^2 r \partial \varphi + r \partial r \partial^2 \varphi \}}{\partial s} ,$$
$$-\frac{\partial s^3 . \partial \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{r \partial \varphi} = \partial r^2 \partial \varphi - r \partial^2 r \partial \varphi + r \partial r \partial^2 \varphi .$$

Folglich
$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2 \partial \varphi - \frac{\partial s^3 . \partial \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{r \partial \varphi}} ,$$

d. i.
$$\varrho = -\frac{r \partial s \partial \varphi}{r \partial \varphi^2 - \partial s . \partial \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)} .$$

Ferner ist

$$\partial s^2 . \partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial s}\right) = \partial s \partial(r\partial\varphi) - r\partial\varphi\partial^2 s$$

$$= \frac{\partial s^2 \partial(r\partial\varphi) - r\partial r\partial^2 r\partial\varphi - r^3\partial\varphi^2\partial^2\varphi - r^2\partial r\partial\varphi^2}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial s^2 \partial r\partial\varphi + r\partial r^2\partial^2\varphi - r\partial r\partial^2 r\partial\varphi - r^2\partial r\partial\varphi^3}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial r^3\partial\varphi + r\partial r^2\partial^2\varphi - r\partial r\partial^2 r\partial\varphi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial s^3 . \partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial s}\right)}{\partial r} = \partial r^2\partial\varphi - r\partial^2 r\partial\varphi + r\partial r\partial^2\varphi .$$

Also

$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2\partial\varphi + \frac{\partial s^3 . \partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial s}\right)}{\partial r}},$$

d. i.

$$\varrho = -\frac{\partial s\partial r}{\partial r\partial\varphi + \partial s . \partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial s}\right)} .$$

Endlich ist auch

$$r^2\partial\varphi^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{r\partial\varphi}\right) = -\partial s^2 . \partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial s}\right)$$

$$= -\frac{\partial r^3\partial\varphi + r\partial r^2\partial^2\varphi - r\partial r\partial^2 r\partial\varphi}{\partial s},$$

$$-\frac{r^2\partial s\partial\varphi^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{r\partial\varphi}\right)}{\partial r} = \partial r^2\partial\varphi - r\partial^2 r\partial\varphi + r\partial r\partial^2\varphi .$$

Also

$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2\partial\varphi - \frac{r^2\partial s\partial\varphi^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{r\partial\varphi}\right)}{\partial r}},$$

d. i.

$$\varrho = -\frac{\partial s^2\partial r}{\partial s\partial r\partial\varphi - r^2\partial\varphi^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{r\partial\varphi}\right)} .$$

Wir wollen die letzten sechs Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser hier noch ein Mal zusammenstellen. Es war

$$\varrho = -\frac{\partial s^3}{\partial s^2\partial\varphi + \partial r^2 . \partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial r}\right)}$$

$$= -\frac{\partial s^3}{\partial s^2\partial\varphi - r^2\partial\varphi^2 . \partial\left(\frac{\partial r}{r\partial\varphi}\right)}$$

$$= -\frac{r\partial s^2\partial\varphi}{r\partial s\partial\varphi^2 + \partial r^2 . \partial\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)}$$

$$= -\frac{r\partial s\,\partial\varphi}{r\partial\varphi^2 - \partial s\,.\,\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)}$$

$$= -\frac{\partial s\,\partial r}{\partial r\,\partial\varphi + \partial s\,.\,\partial\left(\frac{r\partial\varphi}{\partial s}\right)}$$

$$= -\frac{\partial s^2\,\partial r}{\partial s\,\partial r\,\partial\varphi - r^2\partial\varphi^2\,.\,\partial\left(\frac{\partial s}{r\partial\varphi}\right)}\,.$$

Diese Formeln sind von Le Barbier in den **Annales de Mathém. T. XXI. 1831. p. 31.** zuerst, aber nicht rein analytisch, sondern durch geometrische Betrachtungen mittelst des Unendlich-Kleinen bewiesen worden. Hier sind dieselben durch ganz allgemeine Rechnungen gefunden worden.

15. Es ist in diesem Artikel nicht unsere Absicht, die im Vorhergehenden entwickelten Formeln auf viele specielle Fälle anzuwenden. Jedoch wollen wir hier, um zu zeigen, wie bequem nicht selten der Gebrauch der complicirt scheinenden Formeln in (8.) und (12.) ist, noch die Berührende und die Lage und Größe des Krümmungskreises der Kegelschnitte oder der Linien der zweiten Ordnung mittelst jener Formeln bestimmen. Die allgemeine Gleichung der Linien der zweiten Ordnung ist

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0\,;$$

folglich

$$S = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F\,.$$

Also

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2(Ax + Cy + D),\ \frac{\partial S}{\partial y} = 2(By + Cx + E)\,;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2A,\ \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} = 2C,\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 2B\,.$$

Folglich sind nach (8.) die Gleichungen der Berührenden und der Normale jeder Linie der zweiten Ordnung:

$$(Ax + Cy + D)(x' - x) + (By + Cx + E)(y' - y) = 0$$
$$(By + Cx + E)(x' - x) - (Ax + Cy + D)(y' - y) = 0\,.$$

Die Gleichung der Berührenden wird nach leichter Rechnung

$$\left.\begin{array}{l}(Ax + Cy + D)x' + (By + Cx + E)y' \\ - Ax^2 - By^2 - 2Cxy - Dx - Ey\end{array}\right\} = 0\,,$$

und folglich, wenn man die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

addirt:

$$(Ax + Cy + D)x' + (By + Cx + E)y' + (Dx + Ey + F) = 0\,.$$

Für die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises und für den Krümmungshalbmesser erhält man aus (12.), wenn man für letztern den unter positiver Form dargestellten Ausdruck a. a. O. nimmt:

$$\alpha = x - \frac{(Ax+Cy+D)\{(Ax+Cy+D)^2+(By+Cx+E)^2\}}{A(By+Cx+E)^2-2C(Ax+Cy+D)(By+Cx+E)+B(Ax+Cy+D)^2}$$

$$\beta = y - \frac{(By+Cx+E)\{(Ax+Cy+D)^2+(By+Cx+E)^2\}}{A(By+Cx+E)^2-2C(Ax+Cy+D)(By+Cx+E)+B(Ax+Cy+D)^2}$$

$$\varrho = \frac{\{(Ax+Cy+D)^2+(By+Cx+E)^2\}^{\frac{3}{2}}}{A(By+Cx+E)^2-2C(Ax+Cy+D)(By+Cx+E)+B(Ax+Cy+D)^2}.$$

Den gemeinschaftlichen Nenner dieser Ausdrücke bringt man leicht auf die Form

$$AE^2 + BD^2 - 2CDE$$
$$-(C^2-AB)(Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey),$$

oder, wie leicht erhellen wird,

$$D(BD-CE) + E(AE-CD) + F(C^2-AB)$$
$$-(C^2-AB)(Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F),$$

d. i., weil der zweite Theil dieses Ausdrucks offenbar $= 0$ ist,

$$D(BD-CE) + E(AE-CD) + F(C^2-AB).$$

Also ist

$$\alpha = x - \frac{(Ax+Cy+D)\{(Ax+Cy+D)^2+(By+Cx+E)^2\}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}$$

$$\beta = y - \frac{(By+Cx+E)\{(Ax+Cy+D)^2+(By+Cx+E)^2\}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}$$

$$\varrho = \frac{\{(Ax+Cy+D)^2+(By+Cx+E)^2\}^{\frac{3}{2}}}{D(BD-CE)+E(AE-CD)+F(C^2-AB)}.$$

16. Aus der ganzen im Vorhergehenden entwickelten Theorie erhellet augenblicklich, daß eine Curve mit einer beliebigen gegebenen Curve nicht einen Contact der nten Ordnung haben kann, wenn sie nicht mindestens $n+1$ Constanten in ihrer Gleichung enthält. Daher kann eine gerade Linie mit jeder andern Curve nur einen Contact der ersten, ein Kreis höchstens einen Contact der zweiten Ordnung haben. Die Gleichung einer parabolischen Curve des dritten Grades (Thl. III. S. 726.) ist

$$y' = a + bx' + cx'^2 + dx'^3.$$

Eine solche Curve kann also mit jeder andern gegebenen Curve eine Berührung der dritten Ordnung haben. Ist

$$f(x, y) = 0$$

wieder die Gleichung der gegebenen Curve, und

$$y' = a + bx' + cx'^2 + dx'^3$$

die Gleichung einer Parabel des dritten Grades, welche mit der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y) einen Contact der dritten Ordnung haben soll; so hat man zur Bestimmung dieser Parabel

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = b + 2cx' + 3dx'^2$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = 2c + 6dx'$$

$$\frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3} = 6d .$$

Nach (1.) ist aber

$$x'=x,\; y'=y,\; \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial x},\; \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\; \frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

zu setzen. Also

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = b + 2cx + 3dx^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c + 6dx$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6d .$$

Die Differentialquotienten sind, wie immer, aus der gegebenen Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

zu entwickeln. Bestimmt man nun a, b, c, d aus den obigen vier Gleichungen; so erhält man

$$a = y - x\frac{\partial y}{\partial x} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \tfrac{1}{6}x^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

$$b = \frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

$$c = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \tfrac{1}{2}x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

$$d = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} .$$

Folglich ist die gesuchte Gleichung der cubischen parabolischen Curve, welche mit der gegebenen Curve einen Contact der dritten Ordnung in dem Punkte (x, y) hat:

$$y' = y + \frac{x'-x}{1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{(x'-x)^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{(x'-x)^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} .$$

Man sieht leicht, wie sich diese Betrachtungen allgemeiner machen lassen.

II. Curven von doppelter Krümmung.

17. Eine beliebige krumme Linie im Raume, d. h. im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung ist völlig bestimmt, wenn ihre beiden Projectionen auf zwei der drei unter einander senkrechten coordinirten Ebenen, z. B. auf den Ebenen der xy

und xz gegeben sind, weil die in Rede stehende Curve jederzeit als der Durchschnitt der beiden über diesen Projectionen errichteten, auf den entsprechenden Coordinatenebenen senkrechten, Cylinderflächen betrachtet werden kann. Seyen daher

$$f(x, y) = 0, \ F(x, z) = 0$$

die Gleichungen der Projectionen einer beliebigen Curve im Raume auf den Ebenen der xy und xz, wodurch dieselbe also völlig bestimmt ist. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen x, so erhält man eine Gleichung zwischen y und z, welche, wie sogleich erhellet, die Gleichung der Projection der gegebenen Curve im Raume auf der dritten Coordinatenebene seyn wird.

Wir betrachten nun wieder zwei beliebige Curven im Raume, deren Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \ F(x, z) = 0;$$
$$f'(x', y') = 0, \ F'(x', z') = 0;$$

seyn mögen. Sollen dieselben die Punkte

$$(x, y, z) \text{ und } (x', y', z')$$

mit einander gemein haben, so muß

$$x = x', \ y = y', \ z = z'$$

seyn. Verändert sich nun wieder x oder x' um die beliebige Größe $\varDelta$, so sind die entsprechenden Veränderungen von y, z und y', z':

$$\varDelta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\varDelta}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\varDelta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\varDelta^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\varDelta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\varDelta}{1} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\varDelta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot \frac{\varDelta^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

und

$$\varDelta y' = \frac{\partial y'}{\partial x'} \cdot \frac{\varDelta}{1} + \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} \cdot \frac{\varDelta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3} \cdot \frac{\varDelta^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\varDelta z' = \frac{\partial z'}{\partial x'} \cdot \frac{\varDelta}{1} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} \cdot \frac{\varDelta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z'}{\partial x'^3} \cdot \frac{\varDelta^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Die der Abscisse

$$x + \varDelta = x' + \varDelta$$

entsprechenden Coordinaten der beiden Curven sind

$$y + \varDelta y, \ z + \varDelta z \text{ und } y' + \varDelta y', \ z' + \varDelta z'.$$

Also sind, weil $y = y'$, $z = z'$ ist, die Unterschiede zwischen den einander entsprechenden Coordinaten in beiden Curven:

$$D = \varDelta y - \varDelta y', \ D' = \varDelta z - \varDelta z';$$

d. i.

$$D = \left\{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'}\right\} \frac{\varDelta}{1} + \left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}\right\} \frac{\varDelta^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$D' = \left\{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z'}{\partial x'}\right\} \frac{\varDelta}{1} + \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\right\} \frac{\varDelta^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

Hieraus schließt man nun wieder, da die beiden doppelt gekrümmten Curven in der Nähe des Punktes $(x, y, z) = (x', y', z')$ sich offenbar desto inniger an einander anschließen werden, je inniger sich ihre Projectionen in den Ebenen der xy und xz in der Nähe der Punkte $(x, y) = (x', y')$ und $(x, z) = (x', z')$ an einander anschließen, durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie in (1.), daß zwei durch die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, F(x, z) = 0;$$
$$f(x', y') = 0, F'(x', z') = 0$$

bestimmte Curven im Raume in dem Punkte

$$(x, y, z) = (x', y', z')$$

eine Berührung oder einen Contact der nten Ordnung haben, wenn

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y'}{\partial x'^3}, \ldots \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y'}{\partial x'^n};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x'}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 z'}{\partial x'^3}, \ldots \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \frac{\partial^n z'}{\partial x'^n}$$

ist, so daß also z. B. für einen Contact der ersten Ordnung in dem Punkte

$$(x, y, z) = (x', y', z')$$
$$x = x', y = y', z = z', \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x'};$$

für einen Contact der zweiten Ordnung in demselben Punkte dagegen

$$x = x', y = y', z = z';$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x'}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}$$

seyn muß. Mittelst dieser allgemeinen Gleichungen läßt sich die Theorie der Berührung oder Osculation der Curven von doppelter Krümmung auf ganz ähnliche Weise durchführen, wie die Theorie der Berührung der Curven von einfacher Krümmung.

18. Suchen wir demnach zuerst die Gleichung einer geraden Linie zu bestimmen, welche mit der durch die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, F(x, z) = 0$$

gegebenen Curve im Raume in dem Punkte (x, y, z) einen Contact der ersten Ordnung hat. Da die Projectionen einer jeden geraden Linie im Raume auf den Ebenen der xy und xz offenbar ebenfalls gerade Linien sind; so sind die Gleichungen der Projectionen der gesuchten geraden Linien

$$y' = Ax' + B, z' = A'x' + B'.$$

Folglich

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = A, \frac{\partial z'}{\partial x'} = A';$$

und demnach, weil ein Contact der ersten Ordnung Statt finden soll,

$$A = \frac{\partial y}{\partial x}, \; A' = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Aber auch

$$y = Ax + B, \; z = A'x + B'.$$

Also durch Subtraction

$$y' - y = A(x' - x), \; z' - z = A'(x' - x).$$

Also die gesuchten Gleichungen der Berührenden:

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x), \; z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x).$$

Die Differentialquotienten müssen, wie immer, aus den Gleichungen der gegebenen Curve entwickelt werden.

Die Gleichung der Normalebene der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y, z), d. h. einer Ebene, welche durch diesen Punkt geht, und auf der Berührenden in demselben senkrecht steht, sey

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Weil diese Ebene durch den Punkt (x, y, z) gehen soll, hat man:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Folglich mittelst Subtraction:

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0.$$

Weil ferner diese Ebene auf der Berührenden, deren Gleichungen oben bestimmt worden sind, senkrecht seyn soll; so hat man nach bekannten Elementarsätzen der analytischen Geometrie (s. d. Art. Linie und Ebene):

$$B = A\frac{\partial y}{\partial x}, \; C = A\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Folglich, nach gehöriger Substitution und Division durch A,

$$(x' - x) + (y' - y)\frac{\partial y}{\partial x} + (z' - z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

die Gleichung der Normalebene. Weil

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \; \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 1$$

ist; so kann man die Gleichung der Normalebene auch so ausdrücken:

$$(x' - x)\frac{\partial x}{\partial z} + (y' - y)\frac{\partial y}{\partial z} + (z' - z) = 0,$$

$$(x' - x)\frac{\partial x}{\partial y} + (y' - y) + (z' - z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Die Aufgabe, durch den Punkt (x, y, z) auf die gegebene Curve im Raume eine Normale zu ziehen, ist, wie sogleich erhellet, eine unbestimmte. Jede durch den Punkt (x, y, z) in der so eben bestimmten Normalebene gezogene gerade Linie leistet derselben Genüge. Sind.

$$y' = Ax' + B,\; z' = A'x' + B'$$

die Gleichungen der gesuchten Normale; so giebt die Bedingung, daß dieselbe durch den Punkt (x, y, z) gehen soll:

$$y = Ax + B,\; z = A'x + B' .$$

Ferner hat man

$$y' - y = A(x' - x),\; z' - z = A'(x' - x) .$$

Folglich, weil die gesuchte Linie in der Normalebene liegen muß,

$$(x' - x) + A(x' - x)\frac{\partial y}{\partial x} + A'(x' - x)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

$$1 + A\frac{\partial y}{\partial x} + A'\frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Man hat also zur Bestimmung der vier Constanten A, B, A', B' nur die drei Gleichungen:

$$y = Ax + B,\; z = A'x + B' ;$$

$$1 + A\frac{\partial y}{\partial x} + A'\frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Nimmt man die eine dieser vier Constanten willkührlich an, so lassen sich die drei andern bestimmen.

Setzen wir jetzt

$$f(x, y) = s = 0,\; F(x, z) = S = 0 ;$$

so ist

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\; \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial y}},\; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial z}} .$$

Demnach kann man die Gleichungen der Berührenden auch auf folgende Art ausdrücken:

$$(x' - x)\frac{\partial s}{\partial x} + (y' - y)\frac{\partial s}{\partial y} = 0$$

$$(x' - x)\frac{\partial S}{\partial x} + (z' - z)\frac{\partial S}{\partial z} = 0 .$$

Eben so leicht erhält man für die Gleichung der Normalebene:

$$(x' - x)\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial S}{\partial z} - (y' - y)\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial S}{\partial z} - (z' - z)\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial S}{\partial x} = 0 ,$$

und für die Gleichungen einer Normale:

$$y = Ax + B,\ z = A'x + B';$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial S}{\partial z} - A\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial S}{\partial z} - A'\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

woraus die Constanten A, B, A′, B′ bestimmt werden müssen, indem eine derselben willkührlich angenommen wird.

19. Suchen wir nun ferner einen Kreis, welcher mit einer Curve von doppelter Krümmung, deren Gleichungen wieder

$$f(x, y) = 0,\ F(x, z) = 0$$

seyen, eine Berührung der zweiten Ordnung hat. Zur vollständigen Bestimmung dieses Kreises ist es nöthig, sowohl die Lage seines Mittelpunkts im Raume, als auch die Lage seiner Ebene, und die Größe seines Halbmessers zu bestimmen. Man nennt diesen Kreis auch hier den Krümmungskreis, seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben, welcher immer (x, y, z), d. h. durch die Coordinaten x, y, z bestimmt seyn mag. Wir wollen den gesuchten Kreis als einen größten Kreis einer Kugel betrachten, deren Gleichung

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2 = \varrho^2$$

sey. α, β, γ sind die Coordinaten des Mittelpunkts, ϱ der Halbmesser dieser Kugel, also auch des gesuchten Kreises. Die Gleichung einer beliebigen Ebene ist

$$x' + Ay' + Bz' + C = 0.$$

Aus der Bedingung, daß diese Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ergiebt sich

$$\alpha + A\beta + B\gamma + C = 0.$$

Folglich ist überhaupt

$$x'-\alpha + A(y'-\beta) + B(z'-\gamma) = 0$$

die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene. Für alle Punkte des gesuchten Kreises hat man also die beiden Gleichungen:

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2 = \varrho^2,$$
$$x'-\alpha + A(y'-\beta) + B(z'-\gamma) = 0.$$

Da man aus diesen beiden Gleichungen sowohl y', als auch z', eliminiren kann, so ist klar, daß sowohl z', als auch y', eine Function von x' ist, nämlich für alle Punkte in dem gesuchten Kreise. Differentiirt man also diese beiden Gleichungen zweimal nach x'; so erhält man:

$$x'-\alpha + (y'-\beta)\frac{\partial y'}{\partial x'} + (z'-\gamma)\frac{\partial z'}{\partial x'} = 0,$$

$$1 + A\frac{\partial y'}{\partial x'} + B\frac{\partial z'}{\partial x'} = 0,$$

$$1+\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+(y'-\beta)\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}+(z'-\gamma)\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}=0\,,$$

$$A\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}+B\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}=0\,.$$

Da nun zwischen dem gesuchten Kreise und der gegebenen doppelt gekrümmten Curve in dem Punkte (x, y, z) ein Contact der zweiten Ordnung Statt finden soll; so hat man nach (17.) im Berührungspunkte

$$x=x',\ y=y',\ z=z'\,;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial x'},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial x'}\,;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\,.$$

Also

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2\,,$$

$$x-\alpha+A(y-\beta)+B(z-\gamma)=0\,,$$

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,$$

$$1+A\frac{\partial y}{\partial x}+B\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-\gamma)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,,$$

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,.$$

Die Differentialquotienten werden, wie immer, aus den Gleichungen der gegebenen doppelt gekrümmten Curve entwickelt. Aus diesen sechs Gleichungen müssen nun die sechs Größen α, β, γ, ϱ, A, B, welche Lage und Größe des Krümmungskreises der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y, z) vollkommen bestimmen, durch Elimination gefunden werden. Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=p,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=p',\ \frac{\partial z}{\partial x}=q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=q'\,;$$

so wird die vierte und die sechste Gleichung:

$$1+Ap+Bq=0,\ Ap'+Bq'=0\,.$$

Folglich

$$A=-\frac{q'}{pq'-qp'},\ B=\frac{p'}{pq'-qp'}\,.$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung erhält man eben so leicht:

$$y-\beta=\frac{B-q}{Aq-Bp}(x-\alpha),\quad z-\gamma=-\frac{A-p}{Aq-Bp}(x-\alpha)\,;$$

oder, wenn man die gefundenen Werthe von A und B einführt:

$$y-\beta=-\frac{p'-q(pq'-qp')}{pp'+qq'}(x-\alpha),\ z-\gamma=-\frac{q'+p(pq'-qp')}{pp'+qq'}(x-\alpha)\,.$$

Also, mittelst der fünften Gleichung:

$$x - \alpha = \frac{(1 + p^2 + q^2)(pp' + qq')}{p'^2 + q'^2 + (pq' - qp')^2},$$

$$y - \beta = -\frac{(1 + p^2 + q^2)\{p' - q(pq' - qp')\}}{p'^2 + q'^2 + (pq' - qp')^2},$$

$$z - \gamma = -\frac{(1 + p^2 + q^2)\{q' + p(pq' - qp')\}}{p'^2 + q'^2 + (pq' - qp')^2}.$$

Nun ist aber

$$(pp' + qq')^2 + \{p' - q(pq' - qp')\}^2 + \{q' + p(pq' - qp')\}^2$$
$$= (pp' + qq')^2 + 2(pq' - qp')^2 + p'^2 + q'^2 + (p^2 + q^2)(pq' - qp')^2$$
$$= (pp' + qq')^2 + (pq' - qp')^2 + p'^2 + q'^2 + (1 + p^2 + q^2)(pq' - qp')^2$$
$$= p'^2 + q'^2 + (p^2 + q^2)(p'^2 + q'^2) + (1 + p^2 + q^2)(pq' - qp')^2$$
$$= (1 + p^2 + q^2)\{p'^2 + q'^2 + (pq' - qp')^2\}.$$

Folglich mittelst der ersten Gleichung:

$$\varrho = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + (pq' - qp')^2}}.$$

Man könnte die gefundenen Formeln auch auf ähnliche Art ausdrücken, wie in (12.) die analogen Formeln für Curven von einfacher Krümmung. Da die Ausdrücke aber ziemlich weitläufig ausfallen, so mögen dieselben der Kürze wegen hier übergangen werden.

20. Bisher ist ∂x als constant betrachtet worden. Wird aber kein Differential als constant betrachtet, d. h. werden x, y, z als von irgend einer neuen veränderlichen Größe abhängend angesehen; so muß man, wie in (13.), für

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

d. i. für p, p'; q, q' respective

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

setzen. Dadurch erhält man

$$pq' - qp' = \frac{\partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y}{\partial x^3},$$

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial s^2}{\partial x^2},$$

$$pp' + qq' = \frac{(\partial y\,\partial^2 y + \partial z\,\partial^2 z)\,\partial x - (\partial y^2 + \partial z^2)\,\partial^2 x}{\partial x^4},$$

$$p' - q(pq' - qp') = \frac{(\partial x^2 + \partial z^2)\,\partial^2 y - (\partial x\,\partial^2 x + \partial z\,\partial^2 z)\,\partial y}{\partial x^4},$$

$$q' + p(pq' - qp') = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)\,\partial^2 z - (\partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y)\,\partial z}{\partial x^4},$$

$$p'^2 + q'^2 + (pq' - qp')^2 =$$

$$\frac{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}{\partial x^6}$$

$$= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2) - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)^2}{\partial x^6}$$

$$= \frac{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)\partial s^2 - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)^2}{\partial x^6}$$

wo s den Bogen der gegebenen doppelt gekrümmten Linie bezeichnet. Es ist also

$$A = \frac{\partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z}{\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y}, \quad B = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y};$$

$$\alpha - x = \frac{\{(\partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 x - (\partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)\partial x\}\partial s^2}{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}$$

$$\beta - y = \frac{\{(\partial x^2 + \partial z^2)\partial^2 y - (\partial x \partial^2 x + \partial z \partial^2 z)\partial y\}\partial s^2}{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}$$

$$\gamma - z = \frac{\{(\partial x^2 + \partial y^2)\partial^2 z - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y)\partial z\}\partial s^2}{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}$$

$$\varrho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}}$$

oder auch

$$\alpha - x = \frac{\{(\partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 x - (\partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)\partial x\}\partial s^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)\partial s^2 - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)^2}$$

$$\beta - y = \frac{\{(\partial x^2 + \partial z^2)\partial^2 y - (\partial x \partial^2 x + \partial z \partial^2 z)\partial y\}\partial s^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)\partial s^2 - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)^2}$$

$$\gamma - z = \frac{\{(\partial x^2 + \partial y^2)\partial^2 z - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y)\partial z\}\partial s^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)\partial s^2 - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)^2}$$

$$\varrho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)\partial s^2 - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)^2}}$$

oder auch

$$x - \alpha = \frac{\{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)\partial y + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)\partial z\}\partial s^2}{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}$$

$$y - \beta = \frac{\{(\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y)\partial x + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)\partial z\}\partial s^2}{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}$$

$$z - \gamma = \frac{\{(\partial z \partial^2 x - \partial x \partial^2 z)\partial x + (\partial z \partial^2 y - \partial y \partial^2 z)\partial y\}\partial s^2}{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2 + (\partial x \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y \partial^2 z - \partial z \partial^2 y)^2}.$$

Alle diese Formeln sind wegen ihrer Symmetrie sehr merkwürdig und wichtig. Weil ferner

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

ist; so ist

$$\partial s \partial^2 s = \partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z.$$

Folglich

$$\partial s^3 . \partial \frac{\partial x}{\partial s} = \partial s^2 \partial^2 x - \partial x \partial s \partial^2 s$$
$$= (\partial y^2 + \partial z^2)\partial^2 x - (\partial y \partial^2 y + \partial z \partial^2 z)\partial x$$
$$\partial s^3 . \partial \frac{\partial y}{\partial s} = \partial s^2 \partial^2 y - \partial y \partial s \partial^2 s$$
$$= (\partial x^2 + \partial z^2)\partial^2 y - (\partial x \partial^2 x + \partial z \partial^2 z)\partial y$$
$$\partial s^3 . \partial \frac{\partial z}{\partial s} = \partial s^2 \partial^2 z - \partial z \partial s \partial^2 s$$
$$= (\partial x^2 + \partial y^2)\partial^2 z - (\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y)\partial z\,,$$

woraus mittelst des Obigen sogleich folgt:

$$\alpha - x = \frac{\partial s^3 . \partial \frac{\partial x}{\partial s}}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2}$$
$$\beta - y = \frac{\partial s^3 . \partial \frac{\partial y}{\partial s}}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2}$$
$$\gamma - z = \frac{\partial s^3 . \partial \frac{\partial z}{\partial s}}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2}$$
$$\varrho = \frac{\partial s^2}{\sqrt{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2}}\,.$$

Nähme man ∂s als constant an, und setzte folglich $\partial^2 s = 0$; so würde man aus diesen Ausdrücken leicht erhalten:

$$\alpha - x = \frac{\partial s^2 \partial^2 x}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2} = \varrho^2 . \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$$
$$\beta - y = \frac{\partial s^2 \partial^2 y}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2} = \varrho^2 . \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$
$$\gamma - z = \frac{\partial s^2 \partial^2 z}{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2} = \varrho^2 . \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$
$$\varrho = \frac{\partial s^2}{\sqrt{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2}}\,.$$

III. Krumme Flächen.

21. Seyen

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'(x', y', z') = 0$$

die Gleichungen zweier beliebigen krummen Flächen, welche den Punkt (x, y, z) mit einander gemein haben mögen, so daß also in diesem Punkte

$$x = x', \; y = y', \; z = z'$$

ist. Wir betrachten z und z' als Functionen der veränderlichen Größen x, y und x', y', welche als von einander ganz unabhängig anzusehen sind. Verändern nun $x = x'$, $y = y'$ sich

respective um $\varDelta$ und $\varDelta'$; so giebt der Taylor'sche Lehrsatz für mehrere veränderliche Größen:

$$\varDelta z = \frac{\partial z}{\partial x}\varDelta + \frac{\partial z}{\partial y}\varDelta' + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\varDelta^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\varDelta\varDelta' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\varDelta'^2\right\} + \ldots.$$

$$\varDelta z' = \frac{\partial z'}{\partial x'}\varDelta + \frac{\partial z'}{\partial y'}\varDelta' + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\varDelta^2 + 2\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\,\partial y'}\varDelta\varDelta' + \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\varDelta'^2\right\} + \ldots.$$

Der auf der Coordinate $z = z'$ genommene Abstand der beiden Flächen von einander ist $= \varDelta z - \varDelta z'$. Also, wenn wir diesen Abstand durch D bezeichnen:

$$D = \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z'}{\partial x'}\right)\varDelta + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\varDelta'$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\right)\varDelta^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 z'}{\partial x'\,\partial y'}\right)\varDelta\varDelta' + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\right)\varDelta'^2\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je mehr Glieder dieser Reihe vom Anfange an, unabhängig von besondern Werthen von $\varDelta$ und $\varDelta'$, verschwinden, desto inniger werden in der Nähe des Punktes $(x, y, z) = (x', y', z')$ die beiden Flächen sich offenbar an einander anschließen, und man hat folglich für eine Berührung der ersten Ordnung der beiden Flächen in dem in Rede stehenden Punkte:

$$x = x',\ y = y',\ z = z',\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x'},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y'};$$

für eine Berührung der zweiten Ordnung dagegen:

$$x = x',\ y = y',\ z = z',\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x'},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y'};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'\,\partial y'},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}.$$

Wie man zu Berührungen höherer Ordnung fortschreiten muß, fällt sogleich in die Augen.

22. Sey jetzt die Gleichung einer Ebene zu finden, welche mit einer durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

charakterisirten Fläche in dem Punkte (x, y, z) eine Berührung erster Ordnung hat. Die gesuchte Gleichung sey

$$z' = Ax' + By' + D'.$$

Da die Ebene, welcher diese Gleichung entspricht, durch den Punkt (x, y, z) gehen soll, so ist

$$z = Ax + By + D;$$

folglich

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y),$$

und man hat demnach bloß noch A, B zu bestimmen. Nimmt man die partiellen Differentiale von z'; so erhält man

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = A,\ \frac{\partial z'}{\partial y'} = B.$$

Aber, weil eine Berührung erster Ordnung Statt finden soll, nach (21.)

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{\partial z}{\partial y};$$

also auch

$$A = \frac{\partial z}{\partial x},\ B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Folglich ist

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y)$$

die gesuchte Gleichung der berührenden Ebene. Der Berührungspunkt ist (x, y, z). Die Differentialquotienten sind partielle Differentiale, wie sich von selbst versteht. Sind ferner

$$y' = Ax' + B,\ z' = A'x' + B'$$

die Gleichungen der Normale der gegebenen krummen Fläche in dem Punkte (x, y, z); so ist zunächst auch

$$y = Ax + B,\ z = A'x + B'.$$

Also

$$y' - y = A(x' - x),\ z' - z = A'(x' - x),$$

und demnach bloß noch A, A' zu bestimmen. Bringen wir aber die Gleichung der berührenden Ebene auf die Form

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y) - (z' - z) = 0;$$

so folgt aus bekannten Elementarsätzen der analytischen Geometrie auf der Stelle:

$$y' - y = \frac{\partial x}{\partial y}(x' - x),\ z' - z = -\frac{\partial x}{\partial z}(x' - x),$$

oder auch

$$x' - x = -\frac{\partial z}{\partial x}(z' - z),\ y' - y = -\frac{\partial z}{\partial y}(z' - z);$$

$$x' - x + \frac{\partial z}{\partial x}(z' - z) = 0,\ y' - y + \frac{\partial z}{\partial y}(z' - z) = 0.$$

Ist (x_1, y_1, z_1) ein beliebiger Punkt der Normale; so ist

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

$$= (z_1 - z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

die Entfernung des Berührungspunktes von diesem Punkte der Normale. Für $z_1 = 0$ ist also

$$-z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

die Entfernung des Berührungspunktes von dem Punkte, in welchem die Normale die Ebene der xy schneidet.

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher die berührende Ebene die Ebene der xy schneidet, ist

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x'-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y'-y) + z = 0 .$$

Ist z. B. die gegebene krumme Fläche die Oberfläche eines elliptischen Sphäroids, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

ist; so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z};$$

folglich

$$\frac{c^2x}{a^2z}(x'-x) + \frac{c^2y}{b^2z}(y'-y) + z'-z = 0 ,$$

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 ,$$

d. i.

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$$

die Gleichung der berührenden Ebene in dem Punkte (x, y, z). Die Gleichungen der Normale sind

$$x'-x - \frac{c^2x}{a^2z}(z'-z) = 0,\ y'-y - \frac{c^2y}{b^2z}(z'-z) = 0 .$$

Setzt man

$$f(x, y, z) = S = 0 ;$$

so ist bekanntlich nach der Theorie der Differentiation der Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial z}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial y}}{\frac{\partial S}{\partial z}} .$$

Folglich nach dem Obigen die Gleichung der berührenden Ebene:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x'-x) + \frac{\partial S}{\partial y}(y'-y) + \frac{\partial S}{\partial z}(z'-z) = 0 ,$$

eine Gleichung, welche wegen ihrer symmetrischen Form viele Vorzüge hat. Die Gleichungen der Normale sind:

$$\frac{\partial S}{\partial z}(x'-x) - \frac{\partial S}{\partial x}(z'-z) = 0,\ \frac{\partial S}{\partial z}(y'-y) - \frac{\partial S}{\partial y}(z'-z) = 0 ;$$

$$\frac{x'-x}{\frac{\partial S}{\partial x}} = \frac{y'-y}{\frac{\partial S}{\partial y}} = \frac{z'-z}{\frac{\partial S}{\partial z}} .$$

23. Suchen wir jetzt ferner die Gleichung einer Kugel zu finden, welche mit der durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = S = 0$$

charakterisirten Fläche in dem Punkte (x, y, z) eine Berührung der ersten Ordnung hat. Die Gleichung dieser Kugel sey

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2 = \varrho^2 .$$

Da dieselbe durch den Punkt (x, y, z) geht; so ist auch

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varrho^2 .$$

Ferner ist

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = -\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = -\frac{y'-\beta}{z'-\gamma} .$$

Also, weil ein Contact der ersten Ordnung Statt finden soll:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y-\beta}{z-\gamma} .$$

Folglich

$$(z-\gamma)^2\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} = \varrho^2 .$$

Hieraus ergiebt sich leicht:

$$x-\alpha = -\frac{\varrho\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$y-\beta = -\frac{\varrho\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$z-\gamma = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

ϱ bleibt, wie man sieht, unbestimmt. Durch Division erhält man leicht:

$$\frac{\alpha-x}{\gamma-z} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\beta-y}{\gamma-z} = -\frac{\partial z}{\partial y};$$

$$\alpha-x + \frac{\partial z}{\partial x}(\gamma-z) = 0, \quad \beta-y + \frac{\partial z}{\partial y}(\gamma-z) = 0 .$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit den in (22.) gefundenen Gleichungen der dem Punkte (x, y, z) entsprechenden Normale der krummen Fläche; so überzeugt man sich augenblicklich, daß die Mittelpunkte aller Kugeln, welche mit der krummen Fläche in dem Punkte (x, y, z) eine Berührung erster Ordnung haben, in dieser Normale liegen, der Halbmesser derselben aber völlig willkührlich ist. Eine Kugel also, welche mit einer krummen Fläche in einem gegebenen Punkte einen Contact erster Ordnung hat, ist nicht völlig bestimmt. Eine Kugel, welche mit einer krummen Fläche in einem gegebenen Punkte einen vollständigen Contact zweiter Ordnung hat, giebt es nicht. Nach (21.)

müßte nämlich für einen Contact zweiter Ordnung noch den drei Bedingungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}$$

genügt werden, welches im Allgemeinen unmöglich ist, da bloß noch die eine Größe ϱ zu bestimmen übrig ist. Eine eigentliche Krümmungskugel, um uns hier dieses sonst nicht gewöhnlichen Ausdrucks zu bedienen, giebt es also im Allgemeinen für krumme Flächen nicht. Man kann bloß die Krümmung aller der Curven bestimmen, in welchen die krummen Fläche von beliebigen durch den auf ihr gegebenen Punkt (x, y, z) gelegten Ebenen geschnitten wird, wozu wir jetzt übergehen wollen.

24. Um jedoch diese Untersuchung in gehöriger Allgemeinheit anstellen zu können, ist es nöthig, noch einen Augenblick zu der Krümmung ebener Curven zurückzukehren. Die Gleichung der Normale einer ebenen Curve in dem in ihr gegebenen Punkte (x, y) ist nach (6.)

$$y' - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(x' - x),$$

oder, wenn wir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p', \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = p'', \ldots.$$

setzen:

$$y' - y = -\frac{1}{p}(x' - x).$$

Verändert sich nun x um Δ; so gehen nach dem Taylor'schen Lehrsatze y und p respective in

$$y + p\frac{\Delta}{1} + p'\frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots\ldots,$$

$$p + p'\frac{\Delta}{1} + p''\frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

über. Die Gleichung der Normale für den der Abscisse $x + \Delta$ entsprechenden Punkt der Curve ist also:

$$y' - y - p\frac{\Delta}{1} - p'\frac{\Delta^2}{1.2} - \ldots = -\frac{1}{p + p'\frac{\Delta}{1} + \ldots}(x' - x - \Delta)$$

$$= -\left\{\frac{1}{p} - \frac{p'}{p^2}\cdot\frac{\Delta}{1} + \ldots\right\}(x' - x - \Delta),$$

oder, wenn wir Δ sehr klein annehmen, und die höhern Potenzen von Δ, von der zweiten an, $= 0$ setzen:

$$y' - y - p\Delta = -\frac{1}{p}(x' - x) + \frac{p'\Delta}{p^2}(x' - x) + \frac{\Delta}{p},$$

$$y' - y = -\frac{1}{p}(x' - x) + p\Delta + \frac{p'\Delta}{p^2}(x' - x) + \frac{\Delta}{p}.$$

Die Gleichung der dem Punkte (x, y) entsprechenden Normale war

$$y'-y=-\frac{1}{p}(x'-x).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Normalen durch α, β; so ist

$$\beta-y=-\frac{1}{p}(\alpha-x)+p\Delta+\frac{p'\Delta}{p^2}(\alpha-x)+\frac{\Delta}{p},$$

$$\beta-y=-\frac{1}{p}(\alpha-x).$$

Aus diesen beiden Gleichungen muß man α, β bestimmen. Durch Subtraction erhält man auf der Stelle:

$$0=p\Delta+\frac{p'\Delta}{p^2}(\alpha-x)+\frac{\Delta}{p},\ 0=p+\frac{p'}{p^2}(\alpha-x)+\frac{1}{p},$$

woraus sogleich

$$\alpha-x=-\frac{p(1+p^2)}{p'},\ \beta-y=\frac{1+p^2}{p'};$$

$$\alpha=x-\frac{p(1+p^2)}{p'},\ \beta=y+\frac{1+p^2}{p'}.$$

Die Entfernung des Punktes (α, β) von dem Punkte (x, y) sey $=\varrho$; so ist

$$\varrho=\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'}.$$

Durch diese Rechnung findet man also, wie aus (11.), für α, β und ϱ die Coordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser des Krümmungskreises für den Punkt (x, y) der gegebenen Curve, so daß man also auch mittelst der im Folgenden ausgesprochenen Methode Lage und Größe des Krümmungskreises einer ebenen Curve in einem gegebenen Punkte derselben bestimmen kann:

Man lasse sich die Coordinaten des gegebenen Punktes um beliebige einander entsprechende Incremente verändern, wodurch man einen neuen Punkt der gegebenen Curve erhält, suche den Durchschnittspunkt der diesen beiden Punkten der Curve entsprechenden Normalen, indem man sämmtliche Glieder, welche in Bezug auf die in Rede stehenden Incremente von der zweiten Ordnung sind, vernachlässigt, und bestimme die Entfernung dieses Durchschnittspunktes von dem gegebenen Punkte. Letztere Entfernung ist der gesuchte Krümmungshalbmesser für den gegebenen Punkt der Curve, und der Durchschnittspunkt der Normalen selbst der Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Dieses Princip wollen wir nun sogleich auf die in (23.) angedeutete Untersuchung über die Krümmung der Flächen anwenden.

25. Die Gleichung der Fläche sey wie gewöhnlich

$$f(x, y, z) = S = 0,$$

und (x, y, z) sey der gegebene Punkt. Nimmt man diesen Punkt selbst als Anfang eines neuen dem primitiven parallelen Coordinatensystems an, und bezeichnet die Coordinaten in Bezug auf dieses neue System durch t', u', v'; so ist

$$At' + Bu' + Cv' = 0$$

die Gleichung einer jeden durch den Punkt (x, y, z) gehenden Ebene. Man kann, ohne der Allgemeinheit zu schaden, immer voraussetzen, daß

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

ist, wie leicht auf folgende Art gezeigt werden kann. Ist nämlich V der Winkel, unter welchem die in Rede stehende Ebene gegen die Ebene der $t'u'$ geneigt ist; so ist nach Principien der analytischen Geometrie:

$$\cos V = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Man bestimme nun α so, daß $\alpha C = \cos V$ ist, wie offenbar immer möglich. Weil die gegebene Gleichung der Ebene auf die Form

$$\alpha At' + \alpha Bu' + \alpha Cv' = 0,$$

oder, der Kürze wegen, auf die Form

$$A't' + B'u' + C'v' = 0,$$

für

$$\alpha A = A', \alpha B = B', \alpha C = C',$$

gebracht werden kann, so ist auch

$$\cos V = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Aber

$$C' = \alpha C = \cos V.$$

Also

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1.$$

Man kann folglich immer annehmen, daß die Gleichung

$$At' + Bu' + Cv' = 0$$

der gegebenen Ebene schon auf die Form gebracht ist, für welche die Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

Statt findet.

Sey nun (t, u, v) ein beliebiger Punkt der Curve, in welcher die gegebene krumme Fläche von der in Rede stehenden Ebene geschnitten wird; so ist

$$At + Bu + Cv = 0.$$

t, u, v kann man offenbar als Veränderungen oder Incremente von x, y, z betrachten, so daß also offenbar auch

$$f(x+t, y+u, z+v) = 0$$

seyn wird. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze geht

$$f(x, y, z) = S,$$

wenn x, y, z in $x+t$, $y+u$, $z+v$, übergehen, in

$$\begin{aligned}S &+ \frac{\partial S}{\partial x}t + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{t^2}{1.2} + \ldots\ldots\\ &+ \frac{\partial S}{\partial y}u + 2\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{tu}{1.2} + \ldots\ldots\\ &+ \frac{\partial S}{\partial z}v + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\cdot\frac{u^2}{1.2} + \ldots\ldots\\ &\qquad + 2\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{tv}{1.2} + \ldots\ldots\\ &\qquad + 2\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{uv}{1.2} + \ldots\ldots\\ &\qquad + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\cdot\frac{v^2}{1.2} + \ldots\ldots\end{aligned}$$

über, so daß also, da $S=0$ ist, nach dem Obigen, wenn wir vorstehendes Aggregat, mit Weglassung des ersten Gliedes durch Ω bezeichnen,

$$\Omega = 0$$

ist. Wir haben also jetzt die beiden Gleichungen

$$At + Bu + Cv = 0,\quad \Omega = 0.$$

Die Gleichung einer Ebene, welche die gegebene krumme Fläche in dem Punkte (x, y, z) berührt, ist nach (22.)

$$\frac{\partial S}{\partial x}t' + \frac{\partial S}{\partial y}u' + \frac{\partial S}{\partial z}v' = 0,$$

weil offenbar das dortige

$$x'-x = t',\ y'-y = u',\ z'-z = v'$$

ist. Eben so ist nach (22.) die Gleichung einer Ebene, welche die gegebene krumme Fläche in dem Punkte (t, u, v) berührt,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}(t'-t) + \frac{\partial\Omega}{\partial u}(u'-u) + \frac{\partial\Omega}{\partial v}(v'-v) = 0,$$

weil für diesen Punkt die Gleichung

$$\Omega = 0$$

Statt findet. Aus den Gleichungen

$$At' + Bu' + Cv' = 0,\ \frac{\partial S}{\partial x}t' + \frac{\partial S}{\partial y}u' + \frac{\partial S}{\partial z}v' = 0$$

erhält man leicht als Gleichungen des Durchschnitts dieser beiden Ebenen:

$$\frac{t'}{B\frac{\partial S}{\partial z} - C\frac{\partial S}{\partial y}} = \frac{u'}{C\frac{\partial S}{\partial x} - A\frac{\partial S}{\partial z}} = \frac{v'}{A\frac{\partial S}{\partial y} - B\frac{\partial S}{\partial x}}.$$

Die Gleichung der gegebenen Ebene läßt sich offenbar auch auf die Form

$$A(t'-t) + B(u'-u) + C(v'-v) = 0$$

bringen. Verbindet man diese Gleichung mit der obigen Gleichung der die krumme Fläche in dem Punkte (t, u, v) berührenden Ebene; so erhält man eben so als Gleichungen des gemeinschaftlichen Durchschnitts dieser beiden Ebenen:

$$\frac{t'-t}{B\frac{\partial\Omega}{\partial v} - C\frac{\partial\Omega}{\partial u}} = \frac{u'-u}{C\frac{\partial\Omega}{\partial t} - A\frac{\partial\Omega}{\partial v}} = \frac{v'-v}{A\frac{\partial\Omega}{\partial u} - B\frac{\partial\Omega}{\partial t}}.$$

Die beiden Durchschnitte, deren Gleichungen so eben bestimmt worden sind, sind offenbar die Berührenden der Curve, in welcher die krumme Fläche von der gegebenen Ebene geschnitten wird, in den Punkten (x, y, z) und (t, u, v). Um für dieselben Punkte die Normalen zu finden, lege man durch diese Punkte auf die Berührenden ein Paar senkrechte Ebenen, und bestimme deren Durchschnitte mit der gegebenen Ebene. Die Gleichungen dieser senkrechten Ebenen sind nach Principien der analytischen Geometrie, da dieselben durch die Punkte (x, y, z) und (t, u, v), d. h. die erste durch den Anfang der durch t', u', v' bezeichneten Coordinaten, gehen:

$$\left(B\frac{\partial S}{\partial z} - C\frac{\partial S}{\partial y}\right)t' + \left(C\frac{\partial S}{\partial x} - A\frac{\partial S}{\partial z}\right)u' + \left(A\frac{\partial S}{\partial y} - B\frac{\partial S}{\partial x}\right)v' = 0,$$

$$\left(B\frac{\partial\Omega}{\partial v} - C\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)(t'-t) + \left(C\frac{\partial\Omega}{\partial t} - A\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)(u'-u) + \left(A\frac{\partial\Omega}{\partial u} - B\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)(v'-v) = 0.$$

Man müßte nun die Durchschnitte der durch diese Gleichungen charakterisirten Ebenen mit der gegebenen Ebene suchen, welches die gesuchten Normalen seyn würden. Da es nach dem in (24.) aufgestellten Princip aber bloß darauf ankommt, den Durchschnittspunkt der Normalen zu finden, welcher offenbar der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei durch die beiden vorhergehenden Gleichungen und die Gleichung

$$At' + Bu' + Cv' = 0,$$

charakterisirten Ebenen ist; so kommt es jetzt bloß darauf an, aus den drei Gleichungen

$$At' + Bu' + Cv' = 0,$$

$$\left(B\frac{\partial S}{\partial z} - C\frac{\partial S}{\partial y}\right)t' + \left(C\frac{\partial S}{\partial x} - A\frac{\partial S}{\partial z}\right)u' + \left(A\frac{\partial S}{\partial y} - B\frac{\partial S}{\partial x}\right)v' = 0,$$

$$\left(B\frac{\partial\Omega}{\partial v} - C\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)(t'-t) + \left(C\frac{\partial\Omega}{\partial t} - A\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)(u'-u) + \left(A\frac{\partial\Omega}{\partial u} - B\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)(v'-v) = 0$$

durch Elimination t', u', v' zu bestimmen, welches die Coordinaten des gesuchten Durchschnittspunktes der beiden Normalen seyn werden. Führt man diese Elimination wirklich aus; so findet man, da nach dem Obigen

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

ist, wenn der Kürze wegen

$$M = \left\{\begin{array}{l} (Bv - Cu)\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\ + (Ct - Av)\frac{\partial\Omega}{\partial u} \\ + (Au - Bt)\frac{\partial\Omega}{\partial v} \end{array}\right\}, \quad N = \left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{\partial S}{\partial z} - C\frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\ + \left(C\frac{\partial S}{\partial x} - A\frac{\partial S}{\partial z}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial u} \\ + \left(A\frac{\partial S}{\partial y} - B\frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial v} \end{array}\right\},$$

gesetzt wird:

$$t' = \frac{M}{N}\left\{\frac{\partial S}{\partial x} - A\left(A\frac{\partial S}{\partial x} + B\frac{\partial S}{\partial y} + C\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right\},$$

$$u' = \frac{M}{N}\left\{\frac{\partial S}{\partial y} - B\left(A\frac{\partial S}{\partial x} + B\frac{\partial S}{\partial y} + C\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right\},$$

$$v' = \frac{M}{N}\left\{\frac{\partial S}{\partial z} - C\left(A\frac{\partial S}{\partial x} + B\frac{\partial S}{\partial y} + C\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right\}.$$

Nach dem Obigen ist nun

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}t + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}u + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial z}v\right) + \ldots$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}u + \frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z}v + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}t\right) + \ldots$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{\partial S}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}v + \frac{\partial^2 S}{\partial z\partial x}t + \frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z}u\right) + \ldots$$

Diese Werthe von

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}, \frac{\partial\Omega}{\partial u}, \frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

müßte man in die obigen Ausdrücke von M und N einführen. Da es uns hier aber bloß darauf ankommt, die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises für den Punkt (x, y, z) zu finden; so kann man, da t, u, v offenbar als Incremente oder Veränderungen von x, y, z zu betrachten sind, alle Glieder, welche t, u, v in einer höhern Dimension als der ersten enthalten, vernachlässigen. Thut man dies; so erhält man sehr leicht:

$$M = (Bv - Cu)\frac{\partial S}{\partial x} + (Ct - Av)\frac{\partial S}{\partial y} + (Au - Bt)\frac{\partial S}{\partial z}$$

$$= \left(C\frac{\partial S}{\partial y} - B\frac{\partial S}{\partial z}\right)t + \left(A\frac{\partial S}{\partial z} - C\frac{\partial S}{\partial x}\right)u + \left(B\frac{\partial S}{\partial x} - A\frac{\partial S}{\partial y}\right)$$

$$N = \left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{\partial S}{\partial z} - C\frac{\partial S}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}t + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}u + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial z}v\right) \\ + \left(C\frac{\partial S}{\partial x} - A\frac{\partial S}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}u + \frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z}v + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}t\right) \\ + \left(A\frac{\partial S}{\partial y} - B\frac{\partial S}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}v + \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial z}t + \frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z}u\right) \end{array}\right\}.$$

Vernachlässigt man aber auch in der Gleichung $\Omega = 0$ die Glieder, welche t, u, v in einer die erste übersteigenden Dimension enthalten; so wird diese Gleichung

$$\frac{\partial s}{\partial x} t + \frac{\partial s}{\partial y} u + \frac{\partial s}{\partial z} v = 0 .$$

Aber

$$At + Bu + Cv = 0 .$$

Also, wenn man immer eine der drei veränderlichen Größen eliminirt:

$$\frac{t}{B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}} = \frac{u}{C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}} = \frac{v}{A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}} .$$

$$u = \frac{C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}}{B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}} t, \quad v = \frac{A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}}{B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}} t .$$

Führt man nun diese Ausdrücke von u, v in den Bruch $\frac{M}{N}$ ein, und hebt t im Zähler und Nenner auf; so ergiebt sich nach leichter Reduction, wenn der Werth dieses Bruchs, welchen derselbe auf diese Weise erhält, durch $\frac{M'}{N'}$ bezeichnet wird:

$$\frac{M'}{N'} = -\frac{\left(B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + \left(A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}{\left\{\begin{array}{l} \left(B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2\left(C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} \\ + \left(C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + 2\left(A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}\right)\left(B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} \\ + \left(A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + 2\left(B\frac{\partial s}{\partial x} - C\frac{\partial s}{\partial y}\right)\left(C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} \end{array}\right\}} .$$

Also, wenn jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises des Durchschnitts der gegebenen Ebene mit der gegebenen krummen Fläche in dem Punkte (x, y, z) durch α', β', γ' bezeichnet werden, nach dem Obigen:

$$\alpha' = \frac{M'}{N'}\left\{\frac{\partial s}{\partial x} - A\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\beta' = \frac{M'}{N'}\left\{\frac{\partial s}{\partial y} - B\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\gamma' = \frac{M'}{N'}\left\{\frac{\partial s}{\partial z} - C\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right\}.$$

Diese Coordinaten beziehen sich auf das secundäre System. Beziehen sich α, β, γ auf das primitive System; so ist

$$\alpha = x + \alpha', \quad \beta = y + \beta', \quad \gamma = z + \gamma' ;$$

also

$$\alpha = x + \frac{M'}{N'}\left\{\frac{\partial s}{\partial x} - A\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\beta = y + \frac{M'}{N'}\left\{\frac{\partial s}{\partial y} - B\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\gamma = z + \frac{M'}{N'}\left\{\frac{\partial s}{\partial z} - C\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial x}\right)\right\}.$$

Bezeichnet endlich ϱ den Krümmungshalbmesser; so ist nach (24.)

$$\varrho^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

$$= \frac{M'^2}{N'^2}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \\ + (A^2 + B^2 + C^2)\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \\ -2\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \end{array}\right\},$$

$$= \frac{M'^2}{N'^2}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \\ -\left(A\frac{\partial s}{\partial x} + B\frac{\partial s}{\partial y} + C\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \end{array}\right\},$$

$$= \frac{M'^2}{N'^2}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \\ - A^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - B^2\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - C^2\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \\ - 2AB\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} - 2AC\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial z} - 2BC\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial s}{\partial z} \end{array}\right\},$$

$$= \frac{M'^2}{N'^2}\left\{\begin{array}{l} B^2\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 - 2BC\frac{\partial s}{\partial z}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + C^2\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 \\ + C^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 2CA\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial z} + A^2\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \\ + A^2\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 - 2AB\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + B^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \end{array}\right\},$$

$$= \frac{M'^2}{N'^2}\left\{\left(B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + \left(A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right\}.$$

Folglich

$$\varrho = \frac{M'}{N'}\left\{\left(B\frac{\partial s}{\partial z} - C\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(C\frac{\partial s}{\partial x} - A\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + \left(A\frac{\partial s}{\partial y} - B\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

oder nach dem Obigen

$$\varrho = -\frac{\left\{\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\begin{array}{l}\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+2\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}\\+\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+2\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial x}\right)\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial z\,\partial x}\\+\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}+2\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\end{array}\right\}},$$

und

$$\alpha = x + \frac{\varrho\left\{\frac{\partial S}{\partial x}-A\left(A\frac{\partial S}{\partial x}+B\frac{\partial S}{\partial y}+C\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta = y + \frac{\varrho\left\{\frac{\partial S}{\partial y}-B\left(A\frac{\partial S}{\partial x}+B\frac{\partial S}{\partial y}+C\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial}\right)^2}},$$

$$\gamma = z + \frac{\varrho\left\{\frac{\partial S}{\partial z}-C\left(A\frac{\partial S}{\partial x}+B\frac{\partial S}{\partial y}+C\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right\}}{\sqrt{\left(B\frac{\partial S}{\partial z}-C\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(C\frac{\partial S}{\partial x}-A\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\left(A\frac{\partial S}{\partial y}-B\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}}.$$

Hierdurch ist also Lage und Größe des Krümmungskreises für den Punkt (x, y, z) der gegebenen krummen Fläche und die Curve bestimmt, in welcher dieselbe von einer durch den Punkt (x, y, z) gelegten, und durch die Gleichung

$$At' + Bu' + Cv' = 0,$$

oder

$$A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = 0$$

charakterisirten Ebene geschnitten wird, vorausgesetzt, daß diese Gleichung auf eine solche Form gebracht worden ist, daß

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

ist, welches nach dem Obigen immer angenommen werden kann.

26. Wir haben die vorhergehende Rechnung absichtlich sogleich in größter Allgemeinheit geführt, und sind dabei vorzüglich Gergonne in den Annales de Mathém. T. XXI. p. 217. gefolgt. Einfacher fällt die Rechnung aus, wenn man annimmt, daß die Gleichung der krummen Fläche unter der Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist. Die diesem Falle entsprechenden Formeln ergeben sich aus den gefundenen allgemeinen Formeln leicht auf folgende Art. Man setze

$$S = z - f(x, y) = 0;$$

o ist

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial x} = -p$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial y} = -q$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -p'$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -q'$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -s$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial z \partial y} = 0.$$

Also, wenn wir jetzt der Kürze wegen für A, B, C die kleinen Buchstaben a, b, c einführen, wo aber wieder

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ist, nach (25.):

$$\varrho = \frac{\{(b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2\}^{\frac{3}{2}}}{(b+cq)^2 p' + (a+cp)^2 q' - 2(b+cq)(a+cp)s}$$

$$\alpha = x - \frac{\varrho\{p - a(ap+bq-c)\}}{\sqrt{(b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2}},$$

$$\beta = y - \frac{\varrho\{q - b(ap+bq-c)\}}{\sqrt{(b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2}},$$

$$\gamma = z + \frac{\varrho\{1 + c(ap+bq-c)\}}{\sqrt{(b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2}}.$$

Ganz vorzüglich wichtig ist die Betrachtung der normalen Schnitte der krummen Fläche, d. i. der Curven, in welchen dieselbe von Ebenen geschnitten wird, die durch die Normale der krummen Fläche in dem gegebenen Punkte gelegt sind. Die Gleichung der schneidenden Ebene ist nach dem Obigen

$$a(x'-x) + b(y'-y) + c(z'-z) = 0,$$

und die Gleichungen der Normale sind nach (22.)

$$x'-x = -p(z'-z), \quad y'-y = -q(z'-z).$$

Folglich ist für jede durch die Normale gelegte Ebene

$$-ap - bq + c = 0, \quad ap + bq - c = 0.$$

Folglich für die normalen Schnitte, weil

$$(b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2$$
$$= (b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2 + (ap+bq-c)^2$$
$$= (a^2+b^2+c^2)(1+p^2+q^2) = 1+p^2+q^2$$

ist:

$$\varrho = \frac{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{(b+cq)^2 p' + (a+cp)^2 q' - 2(b+cq)(a+cp)s},$$

$$\alpha = x - \frac{\varrho p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\beta = y - \frac{\varrho q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\gamma = z + \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Man kann ϱ auch noch auf einen andern Ausdruck bringen. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\varrho = \frac{(b+cq)^2+(a+cp)^2+(aq-bp)^2}{(b+cq)^2 p' + (a+cp)^2 q' - 2(b+cq)(a+cp)s}\sqrt{1+p^2+q^2},$$

oder der Kürze wegen

$$\varrho = K\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Aber

$$(b+cq)^2 + (a+cp)^2 + (aq-bp)^2$$
$$= (b+cq)^2 + (a+cp)^2 + \{(a+cp)q - (b+cq)p\}^2$$
$$= (b+cq)^2(1+p^2) - 2(b+cq)(a+cp)pq + (a+cp)^2(1+q^2).$$

Also, wenn man Zähler und Nenner von K durch $(b+cq)^2$ dividirt:

$$K = \frac{1+p^2-2pq\frac{a+cp}{b+cq} + (1+q^2)\left(\frac{a+cp}{b+cq}\right)^2}{p' - 2s\frac{a+cp}{b+cq} + q'\left(\frac{a+cp}{b+cq}\right)^2},$$

d. i. für

$$-\frac{a+cp}{b+cq} = X:$$

$$K = \frac{1+p^2+2pqX+(1+q^2)X^2}{p'+2sX+q'X^2},$$

und

$$\varrho = K\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$\alpha = x - \frac{\varrho p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\beta = y - \frac{\varrho q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\gamma = z + \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

oder auch

$$\varrho = K\sqrt{1+p^2+q^2},$$
$$\alpha = x - Kp,$$
$$\beta = y - Kq,$$
$$\gamma = z + K.$$

Setzte man, wie gewöhnlich geschieht,

$$\varrho = -K\sqrt{1+p^2+q^2};$$

so wäre

$$\alpha = x + \frac{\varrho p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\beta = y + \frac{\varrho q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\gamma = z - \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2+p^2}},$$

zu setzen.

Wir wollen nun zunächst die vorher durch X bezeichnete Größe näher bestimmen. Nach (25.) sind die Gleichungen der Berührenden der Curve, in welcher die krumme Fläche von der gegebenen Ebene geschnitten wird, in dem Punkte (x, y, z):

$$\frac{t'}{b+cq} = \frac{u'}{-cp-a} = \frac{v'}{-aq+bp},$$

d. i.

$$\frac{x'-x}{b+cq} = -\frac{y'-y}{a+cp} = -\frac{z'-z}{aq-bp},$$

$$y'-y = -\frac{a+cp}{b+cq}(x'-x),\quad z'-z = -\frac{aq-bp}{b+cq}(x'-x).$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist die Gleichung der Projection der in Rede stehenden Berührenden auf der Ebene der $x'y'$, d. i. die Gleichung der Berührenden der Projection der Curve, in welcher die krumme Fläche von der gegebenen Ebene geschnitten wird, auf der Ebene der $x'y'$ in dem Punkee (x, y), wie leicht erhellen wird. Denkt man sich also diese Projection durch eine Gleichung charakterisirt, so hängt y von x ab, und nach (3.) ist

$$-\frac{a+cp}{b+cq} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also auch

$$X = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Folglich

$$K = \frac{1+p^2+2pq\frac{\partial y}{\partial x}+(1+q^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{p'+2s\frac{\partial y}{\partial x}+q'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

$$\varrho = K\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$\alpha = x - \frac{\varrho p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\beta = y - \frac{\varrho q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\gamma = z + \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Die Lage der Ebene, von welcher man sich die krumme Fläche geschnitten denkt, wird offenbar durch die Größe X bestimmt. Wir wollen jetzt die normalen Schnitte suchen, welchen in dem Punkte (x, y, z) der größte und der kleinste Krümmungshalbmesser entspricht. Man nennt diese Schnitte die Curven der größten und der kleinsten Krümmung in dem Punkt (x, y, z).

27. Man sieht leicht, daß man, um die Curven der größten und kleinsten Krümmung zu finden, bloß

$$\frac{\partial K}{\partial X} = 0$$

zu setzen braucht. Es ist nun

$$K(p' + 2sX + q'X^2) = 1 + p^2 + 2pqX + (1+q^2)X^2.$$

Also, wenn man nach X differentiirt:

$$\left.\begin{array}{l} K(2s + 2q'X) \\ + (p' + 2sX + q'X^2)\dfrac{\partial K}{\partial X} \end{array}\right\} = 2pq + 2(1+q^2)X,$$

und folglich, wenn man

$$\frac{\partial K}{\partial X} = 0$$

setzt:

$$K(2s + 2q'X) = 2pq + 2(1+q^2)X,$$

woraus

$$X = \frac{Ks - pq}{1+q^2 - Kq'},$$

oder

$$K = \frac{pq + (1+q^2)X}{s + q'X}.$$

Man kann sowohl den Werth von K, als auch den Werth von X in die Gleichung

$$K(p' + 2sX + q'X^2) = 1 + p^2 + 2pqX + (1+q^2)X^2$$

einführen. Thut man das Erste, so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \{(1+q^2)s - pqq'\}X^2 + \{(1+q^2)p' - (1+p^2)q'\}X \\ \qquad - (1+p^2)s + pqp' \end{array}\right\} = 0.$$

Thut man dagegen das Zweite, so ergiebt sich:

$$(1+p^2-Kp')(1+q^2-Kq')^2 - (pq-Ks)^2(1+q^2-Kq') = 0,$$
$$(1+p^2-Kp')(1+q^2-Kq') - (pq-Ks)^2 = 0,$$
$$\left.\begin{array}{l}(p'q'-s^2)K^2 - \{(1+p^2)q' - 2pqs + (1+q^2)p'\}K \\ \qquad + 1 + p^2 + q^2\end{array}\right\} = 0.$$

Da nun

$$\varrho = K\sqrt{1+p^2+q^2}$$

ist; so wird

$$\left.\begin{array}{l}(p'q'-s^2)\varrho^2 - \{(1+p^2)q' - 2pqs + (1+q^2)p'\}(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\varrho \\ \qquad + (1+p^2+q^2)^2\end{array}\right\} = 0.$$

Setzt man

$$p'q'-s^2 = \alpha,\ (1+p^2)q' - 2pqs + (1+q^2)p' = \beta,$$
$$1+p^2+q^2 = \gamma^2;$$

so ist

$$\alpha K^2 - \beta K + \gamma^2 = 0,$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$K = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma^2}}{2\alpha},$$

$$\varrho = K\gamma = \frac{\beta\gamma \pm \gamma\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma^2}}{2\alpha}.$$

Da man hier zwei Werthe von ϱ erhält, so muß offenbar, da es immer nur ein Größtes und ein Kleinstes geben kann, der eine Werth einem Maximo, der andere einem Minimo des Krümmungshalbmessers entsprechen. X wird ebenfalls durch eine quadratische Gleichung bestimmt, so daß es also auch immer für X zwei Werthe giebt, welche den Curven der größten und kleinsten Krümmung in dem Punkte (x, y, z) der krummen Fläche entsprechen. Läßt man, wie offenbar verstattet ist, die Ebene der xy mit der berührenden Ebene in dem Punkte (x, y, z) zusammenfallen, und nimmt diesen Punkt selbst als Anfang der Coordinaten an; so ist

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$$

und die Normale fällt mit der Axe der z zusammen. Die Gleichungen der Normale sind aber nach (22.)

$$x'-x = -p(z'-z),\ y'-y = -q(z'-z).$$

Also

$$x' = -pz',\ y' = -qz'.$$

Folglich, weil die Normale mit der Axe der z oder z' zusammenfällt, offenbar auch

$$p = 0,\ q = 0.$$

Also in Bezug auf das neue Coordinatensystem

$$sX^2 + (p'-q')X - s = 0,$$

$$X^2 + \frac{p'-q'}{s}X - 1 = 0.$$

Bezeichnen X' und X'' die beiden Wurzeln dieser Gleichung, so ist nach einer bekannten Eigenschaft der Gleichungen

$$X'X'' = -1,\ 1 + X'X'' = 0.$$

Sind nun φ' und φ'' die Winkel, welche die Berührenden der Curven der größten und kleinsten Krümmung mit der Axe der x einschließen; so ist nach (26.) und (5.)

$$\tang \varphi' = X',\ \tang \varphi'' = X''.$$

Also

$$1 + \tang \varphi' \tang \varphi'' = 0.$$

Aber bekanntlich

$$\cot(\varphi' - \varphi'') = \frac{1 + \tang \varphi' \tang \varphi''}{\tang \varphi' - \tang \varphi''}.$$

Folglich

$$\cot(\varphi' - \varphi'') = 0,\ \varphi' - \varphi'' = 90^0.$$

Hieraus ergiebt sich das merkwürdige Theorem, daß **auf jeder krummen Fläche die Curven der größten und kleinsten Krümmung für einen beliebigen Punkt der Fläche sich rechtwinklig durchschneiden oder auf einander senkrecht sind.**

Hiernach ist es verstattet, die Berührenden der Curven der größten und kleinsten Krümmung in dem gegebenen Punkte der Fläche selbst als Axen der x, y, diesen Punkt als Anfang der Coordinaten, die Normale in demselben als Axe der z anzunehmen. Dann ist wie vorher

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ p = 0,\ q = 0.$$

Die eine der beiden Größen X', X'' ist unter dieser Voraussetzung offenbar immer $= 0$, die andere unendlich. Aus der Gleichung

$$sX^2 + (p' - q')X - s = 0$$

ergiebt sich augenblicklich $s = 0$, wenn man X, welches überhaupt die Werthe X' und X'' repräsentirt, $= 0$ setzt. Bringt man die Gleichung, wenn X unendlich groß ist, auf die Form

$$s + \frac{p' - q'}{X} - \frac{s}{X^2} = 0;$$

so überzeugt man sich leicht, daß hieraus auch $s = 0$ folgt.

Denkt man sich nun eine beliebige Ebene, welche, durch die Normale gelegt, mit der Ebene der xz einen beliebigen Winkel V einschließt, und bezeichnet den Krümmungshalbmesser des von derselben gebildeten Schnitts, wie gewöhnlich, durch ϱ, den größten und kleinsten Krümmungshalbmesser aber durch ϱ' und ϱ''; so ist nach dem Obigen für die in Rede stehende Ebene

$$X = \tang V;$$

also nach (26.), weil

$$p = 0,\ q = 0,\ s = 0$$

ist:

$$K = \frac{1 + \tang V^2}{p' + q' \tang V^2}$$
$$= \frac{1}{p' \cos V^2 + q' \sin V^2}.$$

Folglich auch

$$\varrho = \frac{1}{p' \cos V^2 + q' \sin V^2},$$

da unter den obigen Voraussetzungen

$$1 + p^2 + q^2 = 1$$

ist. Nehmen wir nun an, daß die Axe der x der Berührenden der Curve der größten Krümmung entspricht; so ist für den größten Krümmungshalbmesser $V = 0$, für den kleinsten dagegen $V = 90^\circ$. Also

$$\varrho' = \frac{1}{p'}, \varrho'' = \frac{1}{q'}, p' = \frac{1}{\varrho'}, q' = \frac{1}{\varrho''}.$$

Folglich

$$\varrho = \frac{\varrho' \varrho''}{\varrho'' \cos V^2 + \varrho' \sin V^2}.$$

Mittelst dieser überaus merkwürdigen Gleichung kann ϱ jederzeit aus dem größten und kleinsten Krümmungshalbmesser und dem Winkel V berechnet werden.

Setzt man

$$\cos V^2 = \frac{1 + \cos 2V}{2}, \sin V^2 = \frac{1 - \cos 2V}{2};$$

so wird

$$\varrho = \frac{2\varrho' \varrho''}{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'') \cos 2V}.$$

Ist ϱ_1 der dem Winkel $V + \frac{1}{2}\pi$ entsprechende Krümmungshalbmesser; so ist

$$\varrho_1 = \frac{2\varrho' \varrho''}{\varrho' + \varrho'' + (\varrho' - \varrho'') \cos 2V}.$$

Hieraus ergiebt sich sehr leicht die ebenfalls sehr merkwürdige Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}.$$

Sind r und r_1 die zwei andern beliebigen auf einander senkrechten Ebenen entsprechenden Krümmungshalbmesser; so ist eben so

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}.$$

Also ist immer

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1},$$

wo ϱ, ϱ_1 zwei beliebigen auf einander senkrechten, r und r_1 zwei andern beliebigen auf einander senkrechten Ebenen entsprechen.

Für $V = 45^\circ$ wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varrho' + \varrho''}{2\varrho'\varrho''} = \frac{1}{2\varrho'} + \frac{1}{2\varrho''} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right\}.$$

Sind R und R_1 die Krümmungshalbmesser, welche zwei Ebenen entsprechen, die auf beiden Seiten der Ebene der größten Krümmung gegen dieselbe unter den gleichen Winkeln V geneigt sind; so ist

$$R = \frac{2\varrho'\varrho''}{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2V},$$

$$R_1 = \frac{2\varrho'\varrho''}{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2(2\pi - V)}$$

$$= \frac{2\varrho'\varrho''}{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2V}.$$

Folglich immer

$$R = R_1.$$

Die Ebenen, welche gegen die Ebene der größten Krümmung auf beiden Seiten unter einem Winkel von 45° geneigt sind, kann man **mittlere Krümmungsebenen** nennen. Sind R', R'' die Krümmungshalbmesser, welche zwei gegen eine mittlere Krümmungsebene auf beiden Seiten derselben unter den gleichen Winkeln V geneigten Ebenen entsprechen; so ist

$$\frac{1}{R'} = \frac{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2(45^\circ + V)}{2\varrho'\varrho''}$$

$$= \frac{\varrho' + \varrho'' + (\varrho' - \varrho'')\sin 2V}{2\varrho'\varrho''},$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2(45^\circ - V)}{2\varrho'\varrho''},$$

$$= \frac{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\sin 2V}{2\varrho'\varrho''}.$$

Also

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}.$$

Man sehe über diese Relationen und überhaupt über die Krümmung der Flächen eine Abhandlung der scharfsinnigen Mademoiselle **Sophie Germain** zu Paris in **Crelles** Journal B. VII. S. 1. Einige Bemerkungen zu dieser Abhandlung s. m. im Bulletin des sciences mathém. Janvier 1831. p. 17.

Ist, wie vorher, ϱ der dem Winkel V, ϱ_1 der dem Winkel $V + \frac{1}{2}\pi$ entsprechende Krümmungshalbmesser, so ist nach dem Obigen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2V}{2\varrho'\varrho''},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\varrho' + \varrho'' + (\varrho' - \varrho'')\cos 2V}{2\varrho'\varrho''}.$$

Bezeichnet nun r einen andern beliebigen dem Winkel $V + V'$ entsprechenden Krümmungshalbmesser; so ist

$$r = \frac{2\varrho'\varrho''}{\varrho' + \varrho'' - (\varrho' - \varrho'')\cos 2(V + V')} .$$

Aus den beiden ersten Ausdrücken folgt:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''},$$

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''}\right)\cos 2V ;$$

und hieraus

$$\varrho' = \frac{2\varrho\varrho_1 \cos 2V}{\varrho_1 - \varrho + (\varrho_1 + \varrho)\cos 2V},$$

$$\varrho'' = -\frac{2\varrho\varrho_1 \cos 2V}{\varrho_1 - \varrho - (\varrho_1 + \varrho)\cos 2V},$$

$$\varrho'\varrho'' = -\frac{4\varrho^2 \varrho_1^2 \cos 2V^2}{(\varrho_1 - \varrho)^2 - (\varrho_1 + \varrho)^2 \cos 2V^2},$$

$$\varrho' - \varrho'' = \frac{4\varrho\varrho_1 (\varrho_1 - \varrho)\cos 2V}{(\varrho_1 - \varrho)^2 - (\varrho_1 + \varrho)^2 \cos 2V^2} = -\frac{\varrho'\varrho''(\varrho_1 - \varrho)}{\varrho\varrho_1 \cos 2V},$$

$$\varrho' + \varrho'' = -\frac{4\varrho\varrho_1 (\varrho_1 + \varrho)\cos 2V^2}{(\varrho_1 - \varrho)^2 - (\varrho_1 + \varrho)^2 \cos 2V^2} = \frac{\varrho'\varrho''(\varrho_1 + \varrho)}{\varrho\varrho_1} .$$

Also

$$r = \frac{2\varrho\varrho_1 \cos 2V}{(\varrho + \varrho_1)\cos 2V - (\varrho - \varrho_1)\cos 2(V + V')} .$$

28. Wir wollen jetzt annehmen, daß die gegebene krumme Fläche von einer beliebigen durch den Punkt (x, y, z) gelegten Ebene geschnitten werde. Der Krümmungshalbmesser des Schnitts sey $= \varrho$. Man nehme die schneidende Ebene als Ebene der $x' y'$ eines neuen Coordinatensystems an, in Bezug auf welches wir die Coordinaten des gegebenen Punktes durch t, u, v bezeichnen wollen. Der Neigungswinkel der gegebenen Ebene gegen die Ebene der xy sey $= \Theta$, ihr Durchschnitt mit der Ebene der xy sey die Axe der x', und zugleich wollen wir, welches offenbar verstattet ist, annehmen, daß die beiden Systeme der x, y, z und x', y', z' einerlei Anfangspunkt haben. Der von der Axe der x und der Axe der x' eingeschlossene Winkel sey $= \psi$. Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Artikel Coordinate (21.) i. d. Z., da das dortige φ hier offenbar $= 0$, und auch $v = 0$ zu setzen ist, wenn man die positiven neuen Coordinaten in Bezug auf die primitiven so nimmt, wie a. a. O. in IV:

$$x = t\cos\psi - u\cos\Theta\sin\psi$$
$$y = t\sin\psi + u\cos\Theta\cos\psi$$
$$z = u\sin\Theta .$$

Also

$$\partial x = \cos\psi\,\partial t - \cos\Theta\sin\psi\,\partial u$$
$$\partial y = \sin\psi\,\partial t + \cos\Theta\cos\psi\,\partial u$$
$$\partial z = \sin\Theta\,\partial u .$$

Setzen wir nun wieder die partiellen Differentiale

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

so ist bekanntlich

$$\partial z = p\partial x + q\partial y.$$

Folglich nach gehöriger Substitution

$$\sin\Theta\,\partial u = p(\cos\psi\,\partial t - \cos\Theta\sin\psi\,\partial u) + q(\sin\psi\,\partial t + \cos\Theta\cos\psi\,\partial u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{p\cos\psi + q\sin\psi}{\sin\Theta + p\cos\Theta\sin\psi - q\cos\Theta\cos\psi}.$$

Nach (11.) ist

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}}.$$

Man muß also noch $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ entwickeln. Der Einfachheit wegen wollen wir aber wieder die berührende Ebene der krummen Fläche in dem gegebenen Punkte als Ebene der xy, den gegebenen Punkt selbst als Anfang der Coordinaten, und die Ebenen der größten und kleinsten Krümmung in diesem Punkte als Ebenen der xz und yz annehmen, wie in (27.); so ist

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0.$$

Also für dieses System

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Entwickeln wir nun im Allgemeinen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; so ergiebt sich leicht:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(\sin\Theta + p\cos\Theta\sin\psi - q\cos\Theta\cos\psi)\left(\cos\psi\frac{\partial p}{\partial t} + \sin\psi\frac{\partial q}{\partial t}\right)\\ -(p\cos\psi + q\sin\psi)\left(\cos\Theta\sin\psi\frac{\partial p}{\partial t} - \cos\Theta\cos\psi\frac{\partial q}{\partial t}\right)\end{array}\right\}}{(\sin\Theta + p\cos\Theta\sin\psi - q\cos\Theta\cos\psi)^2}.$$

Folglich in Bezug auf das neue Coordinatensystem, für welches $p = q = 0$ ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\cos\psi\frac{\partial p}{\partial t} + \sin\psi\frac{\partial q}{\partial t}}{\sin\Theta}$$

Aber

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = p'\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = q'\frac{\partial y}{\partial t},$$

und nach dem Obigen, weil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ist:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \cos\psi\,,\; \frac{\partial y}{\partial t} = \sin\psi\,.$$

Folglich

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p'\cos\psi,\; \frac{\partial q}{\partial t} = q'\sin\psi\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{p'\cos\psi^2 + q'\sin\psi^2}{\sin\Theta}\,.$$

Also

$$\varrho = \frac{\sin\Theta}{p'\cos\psi^2 + q'\sin\psi^2}\,.$$

Nach (27.) ist aber

$$p' = \frac{1}{\varrho'},\; q' = \frac{1}{\varrho''}\,.$$

Also

$$\varrho = \frac{\varrho'\varrho''\sin\Theta}{\varrho''\cos\psi^2 + \varrho'\sin\psi^2}\,.$$

Für einen normalen Schnitt ist $\Theta = 90°$, $\psi = V$ (27.). Also

$$\varrho = \frac{\varrho'\varrho''}{\varrho''\cos V^2 + \varrho'\sin V^2}\,,$$

ganz wie in (27.). Die obige allgemeine Formel für ϱ rührt nach Lacroix (Traité du calcul diff. et du calcul int. T. I. Paris 1810. p. 580.) von Meusnier her.

29. Zu den schon oben und Thl. III. S. 400. angeführten Schriften fügen wir hier nur noch die Lehrbücher der analytischen Geometrie von Brandes (Leipzig. 1822.) und Littrow (Wien. 1823.), und Puissant Recueil de diverses propositions de Géometrie. Paris. 1809. p. 365—422. worin die Lehre von der Berührung und Krümmung sehr einfach und deutlich vorgetragen ist. Cauchy Exercices de Mathématiqnes Livr. 5. (Sur un théorême relatif au contact des courbes) und Livr. 7. (Sur les divers ordres de contact des lignes et des surfaces). In gewisser Verbindung mit gegenwärtigem Artikel steht auch der Artikel Caustische Flächen und Linien i. d. Z., auf den wir also hier verweisen. Eine artige Anwendung der Lehre von den Berührungen s. m. in dem Programm: De Horizontibus Spaeroidum (Lips. 1831.) von M. W. Drobisch.

30. Ganz neue Ansichten über die Krümmung der Flächen enthält die wichtige Abhandlung von Gauß: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gotting. 1828. Einen Auszug aus dieser Abhandlung hier in der Kürze zu geben, ist nicht wohl möglich, so viele interessante Untersuchungen dieselbe auch enthält. Alles folgt in derselben aus zwei neuen von Gauß eingeführten Begriffen: der ganzen Krümmung und dem Maaße der Krümmung oder der specifischen Krümmung einer krummen Fläche in einem bestimmten Punkte dersel-

hen. Am wichtigsten ist der Inhalt dieser schönen Abhandlung aber für Geodäsie und sphäroidische Trigonometrie, so daß es fast scheint, daß Gauß's große geodätische Arbeiten derselben das Daseyn gegeben haben. Der Verfasser dieser Zusätze hat ihren ganzen Inhalt, mit Erläuterungen und Zusätzen, in seiner Sphaeroidischen Trigonometrie. Berlin. 1833. 4. wiederzugeben versucht, auf welches Werk daher hier zu verweisen erlaubt seyn mag. Die Abhandlung von Gauß enthält auch mehrere sehr elegante specielle Sätze über die krummen Flächen, und ist ganz geeignet, die Genauigkeit geodätischer Rechnungen zu erhöhen.

Bestimmtes Integral.

1. Wenn man das unbestimmte Integral $\int X\partial x$, wo X eine beliebige, zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ stetige, Function von x bezeichnet, so bestimmt, daß es für $x=a$ verschwindet, und dann $x=A$ setzt; so nennt man den dadurch hervorgehenden Werth des gegebenen unbestimmten Integrals ein bestimmtes Integral, und bezeichnet dasselbe durch

$$\int_a^A X\partial x\,.$$

Indeß sind auch

$$\overset{A}{\underset{a}{\int}} X\partial x,\quad {}^A\!\!\int_a X\partial x,\quad \int X\partial x\begin{bmatrix}a\\A\end{bmatrix},\quad \int X\partial x\begin{bmatrix}x=a\\x=A\end{bmatrix}$$

leicht verständliche und in diesem Wörterbuche zum Theil schon zuweilen angewandte Bezeichnungen. In diesem Artikel soll die erste Bezeichnung durchgängig gebraucht werden. Man sagt auch, daß

$$\int_a^A X\partial x$$

der zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ genommene Werth des unbestimmten Integrals $\int X\partial x$ sey, ein Ausdruck, dessen eigentliche Bedeutung bald näher erhellen wird.

2. Um also ein beliebiges unbestimmtes Integral $\int X\partial x$ zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ zu nehmen, muß man nach dem Vorhergehenden dieses Integral so bestimmen, daß es für $x=a$ verschwindet, und dann $x=A$ setzen. Nehmen wir nun aber an, daß $f(x)$ die Function sey, welche man erhält, wenn man $\int X\partial x$ so bestimmt, daß dieses Integral für $x=a$ verschwindet; so ist nach (1.)

$$\int_a^A X\partial x = f(A) .$$

Allgemein ist, wenn C eine beliebige Constante bezeichnet,

$$\int X\partial x = f(x) + C .$$

Folglich, wenn man $x = A$ setzt:

$$\int_{(x=A)} X\partial x = f(A) + C ,$$

und, wenn man $x = a$ setzt:

$$\int_{(x=a)} X\partial x = f(a) + C .$$

Also

$$\int_{(x=A)} X\partial x - \int_{(x=a)} X\partial x = f(A) - f(a) .$$

Da aber nach der Voraussetzung $f(x)$ die Function ist, welche man erhält, wenn man das Integral $\int X\partial x$ so bestimmt, daß es für $x = a$ verschwindet; so ist $f(a) = 0$, und folglich:

$$\int_{(x=A)} X\partial x - \int_{(x=a)} X\partial x = f(A) .$$

Also nach dem Obigen:

$$\int_a^A X\partial x = \int_{(x=A)} X\partial x - \int_{(x=a)} X\partial x .$$

Man kann demnach das bestimmte Integral

$$\int_a^A X\partial x$$

auch so finden, daß man in dem unbestimmten Integral $\int X\partial x$ zuerst $x = A$, dann $x = a$ setzt, und den letztern Werth von dem erstern subtrahirt, welches in den meisten Fällen leichter zum Zweck führt, als die Anwendung der erstern Methode.

3. Nach (2.) ist:

$$\int_a^A X\partial x = \int_{(x=A)} X\partial x - \int_{(x=a)} X\partial x$$

$$\int_A^a X\partial x = \int_{(x=a)} X\partial x - \int_{(x=A)} X\partial x .$$

Folglich immer:

$$\int_a^A X\partial x + \int_A^a X\partial x = 0 ,$$

oder

$$\int_a^A X\partial x = - \int_A^a X\partial x .$$

4. Um Nichts unerläutert zu lassen, schalten wir hier folgende Bemerkung über die Summirung der positiven ganzen Potenzen der natürlichen Zahlen ein. Nach dem binomischen Lehrsatze ist:

$$(x+1)^{r+1} - x^{r+1} = Ax^r + Bx^{r-1} + Cx^{r-2} + \ldots + Px + Q .$$

Folglich, wenn man nach und nach $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ setzt;

$$2^{r+1} - 1^{r+1} = A.1^r + B.1^{r-1} + C.1^{r-2} + \ldots + P.1 + Q$$
$$3^{r+1} - 2^{r+1} = A.2^r + B.2^{r-1} + C.2^{r-2} + \ldots + P.2 + Q$$
$$4^{r+1} - 3^{r+1} = A.3^r + B.3^{r-1} + C.3^{r-2} + \ldots + P.3 + Q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x+1)^{r+1} - x^{r+1} = A.x^r + B.x^{r-1} + C.x^{r-2} + \ldots + P.x + Q .$$

Setzt man nun allgemein

$$1^r + 2^r + 3^r + \ldots + x^r = \Sigma x^r ,$$

und addirt auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen; so erhält man:

$$(x+1)^{r+1} - 1 = A\Sigma x^r + B\Sigma x^{r-1} + \ldots + P\Sigma x + Qx .$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber bekanntlich $A = r+1$. Also

$$(r+1)\Sigma x^r = (x+1)^{r+1} - 1 - B\Sigma x^{r-1} - C\Sigma x^{r-2} - \ldots - P\Sigma x - Qx .$$

Folglich für $r = 1$:

$$2\Sigma x = (x+1)^2 - 1 - Qx .$$

Nach dem binomischen Lehrsatze aber $Q = 1$. Also

$$2\Sigma x = (x+1)^2 - 1 - x = x^2 + x$$
$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}x^2 + (.)x ,$$

wo (.) einen gewissen bestimmten Coefficienten bezeichnet, auf dessen besondern Werth es jetzt weiter nicht ankommt. Für $r = 2$ findet man leicht:

$$3\Sigma x^2 = (x+1)^3 - 1 - (.)\Sigma x - (.)x$$
$$= x^3 + (.)x^2 + (.)x$$
$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + (.)x^2 + (.)x .$$

Geht man so weiter, so findet man allgemein:

$$\Sigma x^r = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + (.)x^r + (.)x^{r-1} + \ldots + (.)x .$$

5. Man nehme nun an, daß $a < A$, folglich immer $A - a$ positiv sey, und setze $A - a = ni = \alpha$, wo wir annehmen, daß n eine positive ganze Zahl sey, welche beliebig groß, i also, welches ebenfalls positiv ist, beliebig klein genommen werden kann. Ferner sey $X = \varphi(x)$, und

$$Y = \int X\partial x = \int \varphi(x).\partial x .$$

Die Summe

$$\varphi(a+i).i + \varphi(a+2i).i + \varphi(a+3i).i + \ldots + \varphi(a+ni).i$$

bezeichne man durch S, so wie die Summe

$$\varphi(a).i + \varphi(a+i).i + \varphi(a+2i).i + \ldots + \varphi(a+(n-1)i).i$$

durch S'.

Mittelst Entwickelung nach dem Taylor'schen Lehrsatze findet man leicht:

$$\begin{aligned}
S = \;& \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{i^3}{1.2} + \ldots \\
&+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{2i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{2^2i^3}{1.2} + \ldots \\
&+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{3i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{3^2i^3}{1.2} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{ni^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{n^2i^3}{1.2} + \ldots \\
= \;& \varphi(a).ni + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{i^2}{1}\Sigma n + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{i^3}{1.2}\Sigma n^2 \\
&+ \frac{\partial^3\varphi(a)}{\partial a^3}.\frac{i^4}{1.2.3}\Sigma n^3 + \ldots \\
= \;& \varphi(a).ni + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{i^2}{1}\left\{\tfrac{1}{2}n^2 + (.)n\right\} \\
&+ \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{i^3}{1.2}\left\{\tfrac{1}{3}n^3 + (.)n^2 + (.)n\right\} \\
&+ \frac{\partial^3\varphi(a)}{\partial a^3}.\frac{i^4}{1.2.3}\left\{\tfrac{1}{4}n^4 + (.)n^3 + (.)n^2 + (.)n\right\} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= \;& \varphi(a).ni + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\left\{\tfrac{1}{2}(ni)^2 + (.)ni.i\right\}.\frac{1}{1} \\
&+ \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\left\{\tfrac{1}{3}(ni)^3 + (.)(ni)^2.i + (.)ni.i^2\right\}.\frac{1}{1.2} \\
&+ \frac{\partial^3\varphi(a)}{\partial a^3}\left\{\tfrac{1}{4}(ni)^4 + (.)(ni)^3.i + (.)(ni)^2.i^2 + (.)ni.i^3\right\}.\frac{1}{1.2.3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= \;& \varphi(a).\alpha + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\left\{\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (.)\alpha i\right\}.\frac{1}{1} \\
&+ \frac{\partial^2\varphi a}{\partial a^2}\left\{\tfrac{1}{3}\alpha^3 + (.)\alpha^2 i + (.)\alpha i^2\right\}.\frac{1}{1.2} \\
&+ \frac{\partial^3\varphi a}{\partial a^3}\left\{\tfrac{1}{4}\alpha^4 + (.)\alpha^3 i + (.)\alpha^2 i^2 + (.)\alpha i^3\right\}.\frac{1}{1.2.3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist nun

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \varphi(x),\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},\ \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2},\ \ldots$$

Also, wenn man

$$A = x + (A - x)$$

setzt, nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$\underset{(x=A)}{Y} = Y + \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{A-x}{1} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\cdot\frac{(A-x)^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$= Y + \varphi(x)\cdot\frac{A-x}{1} + \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\cdot\frac{(A-x)^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}\cdot\frac{(A-x)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\underset{(x=A)}{Y} - Y = \varphi(x)\cdot\frac{A-x}{1} + \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\cdot\frac{(A-x)^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}\cdot\frac{(A-x)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

und folglich, wenn man $x=a$ setzt:

$$\underset{(x=A)}{Y} - \underset{(x=a)}{Y} = \varphi(a)\cdot\frac{A-a}{1} + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{(A-a)^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{(A-a)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$= \varphi(a)\cdot\alpha + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Aber $Y=\int X\partial x=\int\varphi(x).\partial x$. Also nach (2.).

$$\underset{(x=A)}{Y} - \underset{(x=a)}{Y} = \int_a^A X\partial x = \int_a^A \varphi(x).\partial x\ .$$

Folglich

$$\int_a^A \varphi(x).\partial x = \varphi(a).\alpha + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Denkt man sich nun die oben gefundene Summe S nach Potenzen von i entwickelt; so erhält man sogleich:

$$S = \int_a^A \varphi(x).\partial x + Li + L_1 i^2 + L_2 i^3 + L_3 i^4 + \ldots\ldots$$

$$= \int_a^A X\partial x + Li + L_1 i^2 + L_2 i^3 + L_3 i^4 + \ldots\ldots,$$

wo die Coefficienten der Potenzen von i bloß von a und α abhängen.

Ganz auf ähnliche Weise findet man

$$S' = \quad \varphi(a).i$$

$$+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{i^3}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{2i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{2^2\, i^3}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{3i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{3^2\, i^3}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \varphi(a).i + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}\cdot\frac{(n-1)i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}\cdot\frac{(n-1)^2\, i^3}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$= \varphi(a).ni + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{i^2}{1}\Sigma(n-1) + \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{i^3}{1.2}\Sigma(n-1)^2$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi(a)}{\partial a^3}.\frac{i^4}{1.2.3}\Sigma(n-1)^3 + \ldots\ldots$$

Aber nach (4.)

$$\Sigma(x-1)^r = \frac{1}{r+1}(x-1)^{r+1} + (.)(x-1)^r + \ldots + (.)(x-1)^2 + (.)(x-1),$$

woraus, wenn man sich die Potenzen entwickelt denkt, sogleich folgt, daß $\Sigma(x-1)^r$ die Form

$$\Sigma(x-1)^r = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + (.)x^r + (.)x^{r-1} + \ldots + (.)x + (.)$$

hat, so daß nämlich das letzte Glied constant ist. Man hat also

$$S' = \varphi(a).ni + \frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}.\frac{i^2}{1}\left\{\tfrac{1}{2}n^2 + (.)n + (.)\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi(a)}{\partial a^2}.\frac{i^3}{1.2}\left\{\tfrac{1}{3}n^3 + (.)n^2 + (.)n + (.)\right\}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi(a)}{\partial a^3}.\frac{i^4}{1.2.3}\left\{\tfrac{1}{4}n^4 + (.)n^3 + (.)n^2 + (.)n + (.)\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus man ganz wie vorher

$$S' = \int_a^A \varphi(x).\partial x + L'i + L'_1 i^2 + L'_2 i^3 + L'_3 i^4 + \ldots\ldots$$
$$= \int_a^A X\partial x + L'i + L'_1 i^2 + L'_2 i^3 + L'_3 i^4 + \ldots\ldots$$

erhält. Die Coefficienten der Potenzen von i hängen wieder bloß von a und α ab.

Der Kürze wegen wollen wir

$$S = \int_a^A X\partial x + \Omega\,,\quad S' = \int_a^A X\partial x + \Omega'$$

setzen, wo Ω und Ω' Functionen von i sind, welche für $i=0$ verschwinden. Ist nun $X=\varphi(x)$ eine stetige Function von x, wenigstens zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$, welche also auch zwischen diesen Gränzen nie unendlich wird; so kann man sich die Werthe von X zwischen diesen Gränzen als die rechtwinklichen Ordinaten einer Curve denken, deren Abscissen die entsprechenden Werthe von x sind. Theilt man das Intervall $A-a$ in n gleiche Theile, deren jeder $=i$ ist, zieht durch jeden Theilpunkt eine Ordinate der Curve, und durch die Endpunkte aller Ordinaten Parallelen mit der Abscissenaxe bis zu den Ordinaten, welche der Ordinate, durch deren Endpunkt die Parallele gezogen worden, zunächst liegen; so erhält man zwei Reihen von Rechtecken, deren Summen, wie leicht erhellet, $=S$ und $=S'$ sind. Die

Summen dieser Rechtecke ändern sich aber, wie sogleich in di Augen fällt, stetig, wenn i sich stetig ändert; also werden auc S und S' sich stetig ändern, wenn i sich stetig ändert. Fü $i = 0$ ist

$$\int_a^A X\partial x + \Omega = \int_a^A X\partial x\,,$$

$$\int_a^A X\partial x + \Omega' = \int_a^A X\partial x\,.$$

Läßt man nun i von Null an sich stetig ändern; so ändern sic wie wir so eben gesehen haben,

$$\int_a^A X\partial x + \Omega \text{ und } \int_a^A X\partial x + \Omega'$$

gleichfalls stetig von $\int_a^A X\partial x$ an, und es müssen sich also auc Ω und Ω' von Null an stetig ändern, wenn i von Null an sic stetig ändert. Hieraus folgt nun auch umgekehrt, daß i imme so klein angenommen werden kann, daß Ω und Ω' der Null be liebig nahe kommen, oder daß, wenn man nur i klein genug an nimmt, S und S' dem bestimmten Integral $\int_a^A X\partial x$ beliebig nah gebracht werden können, woraus sich ferner das folgende für di Theorie der bestimmten Integrale überaus wichtige Theorem er giebt:

Wenn $a < A$ und die Function X zwischen den Gränzen $x = a$, $x = A$ stetig ist; so ist das bestimmte Integral $\int_a^A X\partial x$ die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man zwi- schen den gegebenen Gränzen in gleichen Intervallen die Werthe der Function X mit dem immer als positiv zu betrachtenden Werthe eines dieser Intervalle multiplicirt, mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner die Intervalle genommen werden, und es kann die genannte Summe diesem bestimmten Integrale beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur die Intervalle klein genug nimmt.

Das Integralzeichen, als Summenzeichen, verdankt diesem Satze, welcher namentlich auch für alle Anwendungen der Integralrechnung von großer Wichtigkeit ist, seine Entstehung. Da nach (3.)

$$\int_A^a X\partial x = -\int_a^A X\partial x$$

ist; so ist das erstere Integral derselben Summe gleich, wenn man nur jetzt die Intervalle als negativ betrachtet, wie sogleich erhellen wird. Man kann also den obigen Lehrsatz auch auf folgenden allgemeinern Ausdruck bringen.

Wenn die Function X zwischen den beliebigen Gränzen $x=a$, $=A$ stetig ist; so ist das bestimmte Integral $\int_a^A X\partial x$ die Summe er Producte, welche man erhält, wenn man zwischen den gegebenen Gränzen in gleichen Intervallen die Werthe der Function X mit $\frac{A-a}{n}$ multiplicirt, vorausgesetzt, daß n die Anzahl der Intervalle bezeichnet, mit desto mehr Genauigkeit, je größer n ist, und es kann die genannte Summe diesem bestimmten Integrale beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n groß genug nimmt.

Setzen wir also

$$\frac{A-a}{n}=i,\quad A=a+ni,$$

und bezeichnen die den Werthen

$$a,\ a+i,\ a+2i,\ a+3i,\ \ldots.\ a+ni$$

entsprechenden Werthe der Function X der Reihe nach durch

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots\ X_{n-1},\ X_n;$$

so ist

$$\int_a^A X\partial x = i\left\{X_0+X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-2}+X_{n-1}\right\},$$

oder

$$\int_a^A X\partial x = i\left\{X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots+X_{n-1}+X_n\right\}$$

desto genauer, je kleiner i, oder je größer n ist.

6. Alles Bisherige gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Function X zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ stetig oder continuirlich ist. Um aber den in (5.) bewiesenen Satz auch auf discontinuirliche Functionen, zu deren näherer Untersuchung die Mathematiker seit einigen Jahren durch verschiedene physisch-mathematische Fragen geführt worden sind, ausdehnen zu können, ist es nöthig, den Begriff des bestimmten Integrals überhaupt zu erweitern (s. u. A. Cauchy Resumé des Leçons données a l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Th. I. Paris. 1823. p. 96.). Finden nämlich zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ für die Werthe α, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} Unterbrechungen der Continuität der Function X (Solutions de continuité) Statt; so wollen wir mit Cauchy unter dem zwischen den angegebenen Gränzen genommenen Integral von $X\partial x$ die Gränze verstehen, welcher sich die Größe

$$\int_a^{\alpha\mp\varepsilon} X\partial x + \int_{\alpha\pm\varepsilon}^{\alpha_1\mp\varepsilon} X\partial x + \int_{\alpha_1\pm\varepsilon}^{\alpha_2\mp\varepsilon} X\partial x + \ldots + \int_{\alpha_{n-1}\pm\varepsilon}^{A} X\partial x,$$

die obern oder untern Zeichen genommen, jenachdem a kleiner oder größer als A ist, nähert, wenn ε, das immer als positiv

angenommen wird, sich der Null nähert, oder unendlich klein wird. Unter dieser Voraussetzung gilt offenbar der in (5.) bewiesene Satz auch für discontinuirliche Functionen, und zugleich erhellet aus (5), daß jedes bestimmte Integral die Area einer gewissen Fläche darstellt, man sich also auch umgekehrt für jedes bestimmte Integral die Area einer gewissen Fläche gesetzt denken kann.

Jedes bestimmte Integral läßt sich auf zwei verschiedene Arten in andere bestimmte Integrale als Theile zerlegen, welche oft von ganz besonderm Nutzen ist. Kann man zuerst die Function X in gewisse andere Functionen $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... zerlegen, so daß

$$X = \varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots.$$

ist; so ist auch

$$X\partial x = \varphi(x).\partial x + \varphi_1(x).\partial x + \varphi_2(x).\partial x + \varphi_3(x).\partial x + \ldots.$$

Denkt man sich nun, daß x nach und nach alle Werthe von $x=a$ bis $x=A$ durchlaufe; so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Betrachtungen und aus (5.) augenblicklich, daß allgemein

$$\int_a^A X\partial x = \int_a^A \varphi(x).\partial x + \int_a^A \varphi_1(x).\partial x + \int_a^A \varphi_2(x).\partial x + \ldots.$$

ist.

Anstatt die Function X in Theile zu zerlegen, kann man aber auch das Intervall $A - a$ in Theile zerlegen, zu welchem Ende wir uns eine Reihe von a bis A fortwährend zu= oder abnehmender Größen

$$a,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots.\ \alpha_{n-1},\ A$$

in endlicher Anzahl denken wollen, so daß das Intervall $A-a$ in die Theile

$$\alpha - a,\ \alpha_1 - \alpha,\ \alpha_2 - \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2},\ A - \alpha_{n-1},$$

deren Anzahl $= n + 1$ ist, getheilt wird. Theilt man nun jedes dieser Intervalle wieder in unendlich kleine Elemente, und bezeichnet die Summen der mit dem Werthe eines solchen unendlich kleinen Elements multiplicirten Werthe der Function X in den einzelnen Intervallen, d. i. die entsprechenden Flächenräume, der Reihe nach durch

$$S,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots.\ S_{n-1},\ S_n\ ;$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\int_a^\alpha X\partial x = S$$

$$\int_\alpha^{\alpha_1} X\partial x = S_1$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} X\partial x = S_2$$

. . . .

$$\int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} X\partial x = s_{n-1}$$

$$\int_{\alpha_{n-1}}^{A} X\partial x = s_n \,.$$

Aber offenbar nach dem Obigen

$$\int_a^A X\partial x = s + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n \,.$$

Also

$$\int_a^A X\partial x = \int_a^\alpha X\partial x + \int_\alpha^{\alpha_1} X\partial x + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} X\partial x + \ldots + \int_{\alpha_{n-1}}^{A} X\partial x \,.$$

So ist z. B. immer

$$\int_{-a}^{+a} X\partial x = \int_{-a}^{0} X\partial x + \int_0^{+a} X\partial x \,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X\partial x = \int_{-\infty}^{0} X\partial x + \int_0^{+\infty} X\partial x \,,$$

oder überhaupt

$$\int_a^A X\partial x = \int_a^\alpha X\partial x + \int_\alpha^A X\partial x \,,$$

wenn α eine zwischen a und A liegende Größe ist. Es ist klar, daß diese Sätze, welche in der Theorie der bestimmten Integrale sehr häufig ihre Anwendung finden, so wie der in (5.) bewiesene Satz, sowohl für continuirliche, als auch für discontinuirliche Functionen gelten, unter Voraussetzung des vorher erweiterten Begriffs des bestimmten Integrals. Der Kürze wegen wollen wir aber im Folgenden, wenn es nicht besonders erinnert wird, immer bloß continuirliche Functionen betrachten.

Nachdem nun die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften bestimmter Integrale bewiesen worden sind, wollen wir versuchen, im Folgenden einen Begriff von den verschiedenen Methoden und Kunstgriffen zu geben, welche zu der Entwickelung ihrer Werthe angewandt worden sind, wobei zugleich die wichtigsten Resultate angezeigt werden sollen, zu denen man auf diesen verschiedenen Wegen gelangt ist.

7. Die erste und allgemeinste Methode zur Entwickelung der Werthe bestimmter Integrale ist offenbar die in (1.) und (2.) angedeutete, nach welcher man auf die dort angezeigte Art von den allgemeinen Ausdrücken unbestimmter Integrale zu den gesuchten bestimmten Werthen derselben übergeht, wobei sich jedoch oft Abkürzungen der Rechnung darbieten werden, wenn man nur auf den Gang der allgemeinen Integration gehörig Rücksicht nimmt. So überzeugt man sich z. B. leicht durch Differentiation von der Richtigkeit der Gleichung:

$$\int\frac{x^{n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{n}{n+1}\int\frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}x^n\sqrt{1-x^2}.$$

Mittelst derselben gelangt man, wie in dem Art. Integralform[el] (62. 63.) gezeigt worden ist, leicht zu dem allgemeinen Au[s]drucke des unbestimmten Integrals

$$\int\frac{x^{n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

von welchem man dann nach der in (1.) und (2.) gezeigte[n] Methode zu beliebigen bestimmten Werthen übergehen kann. B[ei] näherer Betrachtung obiger Gleichung erhellet aber augenblickli[ch], daß dieselbe zwischen den Gränzen 0 und 1 folgende einfache[re] Gestalt annimmt:

$$(1.)\quad \int_0^1\frac{x^{n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bekanntlich ist

$$\partial\,\mathrm{Arc}\sin x=\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \mathrm{Arc}\sin x=\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Folglich

$$\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man ferner $1-x^2=z^2$; so ist $x\partial x=-z\partial z$. Also

$$\int\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{z\partial z}{z}=-z=-\sqrt{1-x^2},$$

$$\int_0^1\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=0-(-1)=1.$$

Aus diesen beiden bestimmten Integralen erhält man nun durch successive Anwendung der obigen Relation leicht nach und nach:

$$\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\qquad \int_0^1\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

$$\int_0^1\frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.\pi}{2.2}\qquad \int_0^1\frac{x^3\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^1\frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.\pi}{2.4.2}\qquad \int_0^1\frac{x^5\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5}$$

$$\int_0^1\frac{x^6\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.\pi}{2.4.6.2}\qquad \int_0^1\frac{x^7\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7}$$

u. s. f. u. s. f.

Also allgemein

$$(2.)\quad \int_0^1\frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$(3.)\quad \int_0^1\frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8\ldots 2n}{3.5.7.9\ldots(2n+1)},$$

voraus sogleich die merkwürdige Relation folgt:

$$(4.)\quad \int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

oder auch

$$(5.)\quad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} : \int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5 \ldots (2n-1)(2n-1)(2n+1)}.$$

8. Man setze jetzt $\alpha i = 1$, so daß α eine positive ganze Zahl ist, und bezeichne die den Werthen

$$0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i,\ \ldots\ \alpha i$$

von x entsprechenden Werthe von

$$\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

respective durch

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots\ X_\alpha;$$

so ist nach (5.):

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = i\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_\alpha\}$$

desto genauer, je kleiner i ist. Da nun

$$\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 \cdot \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist; so sind die den Werthen

$$0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i,\ \ldots\ \alpha i$$

von x entsprechenden Werthe von

$$\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

respective:

$$X_0,\ iX_1,\ 2iX_2,\ 3iX_3,\ \ldots\ \alpha iX_\alpha,$$

und

$$X_0,\ i^2X_1,\ (2i)^2X_2,\ (3i)^2X_3,\ \ldots\ (\alpha i)^2X_\alpha.$$

Da aber $\alpha i = 1$ ist, und folglich die übrigen Vielfachen von i sämmtlich echte Brüche sind; so ist

$$\begin{array}{ll}
X_0 = X_0 & X_0 = X_0 \\
iX_1 < X_1 & i^2X_1 < iX_1 \\
2iX_2 < X_2 & (2i)^2X_2 < 2iX_2 \\
3iX_3 < X_3 & (3i)^2X_3 < 3iX_3 \\
\ldots & \ldots \\
\alpha iX_\alpha = X_\alpha & (\alpha i)^2X_\alpha = \alpha iX_\alpha.
\end{array}$$

Folglich, weil $X_0, X_1, X_2, \ldots X_\alpha$ offenbar alle positiv sind:

$$X_0 + iX_1 + 2iX_2 + 3iX_3 + \ldots \alpha i X_\alpha$$
$$< X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_\alpha$$
$$X_0 + iX_1 + 2iX_2 + 3iX_3 + \ldots + \alpha i X_\alpha$$
$$> X_0 + i^2 X_1 + (2i)^2 X_2 + (3i)^2 X_3 + \ldots + (\alpha i)^2 X_\alpha$$

d. i., wenn man nur in diesen beiden Vergleichungen auf beiden Seiten der Zeichen noch mit i multiplicirt, nach (5.) und dem Obigen:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} < \int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}, \int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} > \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da nun nach (7.)

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} : \int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{2n+1},$$

und

$$\frac{2n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

ist; so ist klar, daß das Verhältniß

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} : \int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

dem Verhältniß der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt. Da aber, wie wir so eben gesehen haben,

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

zwischen den Gränzen

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

enthalten ist; so kann offenbar auch das Verhältniß

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} : \int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

dem Verhältniß der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n groß genug nimmt. Also kann man n auch immer so groß nehmen, daß die Gleichung

$$1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots\ldots\ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5..(2n-1)(2n-1)(2n+1)}$$

ohne merklichen Fehler erfüllt wird. Demnach kann man n auch immer so groß nehmen, daß ohne merklichen Fehler

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots\ldots\ldots 2n.2n}{1.3.3.5.5 ..(2n-1)(2n-1)(2n+1)}$$

ist, und der Fehler kann immer beliebig klein gemacht werden, wenn man nur n groß genug nimmt. Dies führt auf den bekannten von **Wallis** gefundenen merkwürdigen Ausdruck:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10\,.....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11\,.....},$$

wobei aus dem Vorhergehenden zugleich mit völliger Deutlichkeit der eigentliche Sinn der unendlichen Factorenfolgen im Zähler und Nenner dieses Bruchs erhellet.

9. Setzt man $x = z^p$, $\partial x = pz^{p-1}\partial z$; so wird die in 7.) bewiesene Relation (4.), weil $z = 0$ für $x = 0$, $z = 1$ für $x = 1$ ist:

$$(6.)\quad p^2\int_0^1 \frac{z^{2np+p-1}\partial z}{\sqrt{1-z^{2p}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^{2np+2p-1}\partial z}{\sqrt{1-z^{2p}}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

oder, wenn wir $2np + p - 1 = q$, $2np + 2p - 1 = p + q$, $2n + 1 = \frac{q+1}{p}$ setzen:

$$(7.)\quad \int_0^1 \frac{z^q\partial z}{\sqrt{1-z^{2p}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^{p+q}\partial z}{\sqrt{1-z^{2p}}} = \frac{1}{p(q+1)}\cdot\frac{\pi}{2},$$

woraus z. B. für $q = 0$, $p = 2$; $q = 0$, $p = 3$; $q = 1$, $p = 3$; $q = 0$, $p = 4$; $q = 2$, $p = 4$; $q = 0$, $p = 5$; $q = 1$, $p = 5$; $q = 2$, $p = 5$; $q = 3$, $p = 5$:

$$(8.)\quad \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^4}}\cdot\int_0^1 \frac{z^2\partial z}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$(9.)\quad \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^6}}\cdot\int_0^1 \frac{z^3\partial z}{\sqrt{1-z^6}} = \frac{\pi}{6}$$

$$(10.)\quad \int_0^1 \frac{z\,\partial z}{\sqrt{1-z^6}}\cdot\int_0^1 \frac{z^4\partial z}{\sqrt{1-z^6}} = \frac{\pi}{12}$$

$$(11.)\quad \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^8}}\cdot\int_0^1 \frac{z^4\partial z}{\sqrt{1-z^8}} = \frac{\pi}{8}$$

$$(12.)\quad \int_0^1 \frac{z^2\partial z}{\sqrt{1-z^8}}\cdot\int_0^1 \frac{z^6\partial z}{\sqrt{1-z^8}} = \frac{\pi}{24}$$

$$(13.)\quad \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^5\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}} = \frac{\pi}{10}$$

$$(14.)\quad \int_0^1 \frac{z\,\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^6\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}} = \frac{\pi}{20}$$

$$(15.)\quad \int_0^1 \frac{z^2\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^7\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}} = \frac{\pi}{30}$$

$$(16.)\quad \int_0^1 \frac{z^3\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^8\partial z}{\sqrt{1-z^{10}}} = \frac{\pi}{40},$$

welche Sätze, deren Zahl, sich leicht vermehren ließe, gewiß alle Aufmerksamkeit verdienen.

10. Setzen wir in (2.) $x = z^{\frac{1}{2}}$, $\partial x = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\partial z$, $1 - x^2 = 1 - z$; so wird

$$\frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^n\partial z}{\sqrt{z-z^2}}.$$

Folglich, weil $z = 0$ für $x = 0$, $z = 1$ für $x = 1$ ist:

$$\int_0^1 \frac{z^n \partial z}{\sqrt{z - z^2}} = 2\int_0^1 \frac{x^{2n} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. i.

$$(17.)\quad \int_0^1 \frac{z^n \partial z}{\sqrt{z - z^2}} = \frac{1.3.5.7 \ldots (2n-1)}{2.4.6.8 \ldots\ldots 2n}.\pi\,.$$

11. Es ist ferner

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^4}} = \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

da $1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2)$. Also nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^4}} =$$

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^{n+2} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\int \frac{x^{n+4} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\int \frac{x^{n+6} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ldots\ldots$$

und folglich auch:

$$\int_0^1 \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^4}} =$$

$$\int_0^1 \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+2} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\int_0^1 \frac{x^{n+4} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\int_0^1 \frac{x^{n+6} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ldots\ldots$$

Also nach (2.) und (3.):

$$(18.)\quad \int_0^1 \frac{x^{2n} \partial x}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots\ldots 2n} \\ - \frac{1}{2}.\frac{1.3.5 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots (2n+2)} \\ + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1.3.5 \ldots (2n+3)}{2.4.6 \ldots (2n+4)} \\ - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1.3.5 \ldots (2n+5)}{2.4.6 \ldots (2n+6)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

$$(19.)\quad \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \partial x}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2n}{3.5.7 \ldots (2n+1)} - \frac{1}{2}.\frac{2.4.6 \ldots (2n+2)}{3.5.7 \ldots (2n+3)}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}.\frac{2.4.6 \ldots (2n+4)}{3.5.7 \ldots (2n+5)}$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{2.4.6 \ldots (2n+6)}{3.5.7 \ldots (2n+7)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Insbesondere bemerken wir noch:

20.) $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots\right\}$

$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right\}$,

(21.) $\int_0^1 \frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7} + \ldots$

$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}$,

s. d. Art. Cyklometrie (30.) in diesen Zusätzen.

12. Da

$\sqrt{1+ax^2} = 1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1.1}{2.4}a^2x^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}a^3x^6 - \ldots$

ist; so ist

$$\int_0^1 \partial x \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}} =$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}a\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1.1}{2.4}a^2\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.1.3}{2.4.6}a^3\int_0^1 \frac{x^6\partial x}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots,$$

d. i. nach (2.)

(22.) $\int_0^1 \partial x \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1.1}{2.2}a - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}a^2 + \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}a^3 - \ldots\ldots\right\}$.

13. Ferner ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}\partial x}{\sqrt{x-x^2}},$$

d. i.

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x^2)}} =$$

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x\partial x}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{\sqrt{x-x^2}} - \ldots$$

oder nach (17.):

(23.) $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \pi\left\{1 - \frac{1}{4} + \frac{1.9}{4.16} - \frac{1.9.25}{4.16.36} + \ldots\right\}$.

14. Eins der wichtigsten bestimmten Integrale, welches aus den bisherigen Sätzen auch abgeleitet werden kann, ist $\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t$. Setzt man nämlich in der Gleichung (4.)

$$x = e^{-qt^2},\ q(2n+1) = 1;$$

so ist $t = \infty$ für $x = 0$, $t = 0$ für $x = 1$, wie leicht erhellet. Ferner ist

$$x^{2n} = e^{-2nqt^2} = e^{-(1-q)t^2}, \quad x^{2n+1} = e^{-t^2};$$
$$\partial x = -2qte^{-qt^2}\partial t, \quad x^{2n}\partial x = -2qte^{-t^2}\partial t;$$
$$x^{2n+1}\partial x = -2qte^{-(q+1)t^2}\partial t, \quad 1 - x^2 = 1 - e^{-2qt^2}.$$

Folglich nach (4.)

$$4q^2 \int_\infty^0 \frac{e^{-t^2}t\partial t}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}} \cdot \int_\infty^0 \frac{e^{-(q+1)t^2}t\partial t}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}} = \frac{q\pi}{2},$$

oder

$$2\int_\infty^0 \frac{e^{-t^2}t\partial t}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} \cdot \int_\infty^0 \frac{e^{-(q+1)t^2}t\partial t}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Durch Entwickelung in eine Reihe erhält man:

$$\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q} = t^2 - \frac{2qt^4}{1.2} + \frac{4q^2t^6}{1.2.3} - \ldots\ldots$$

Denkt man sich nun, daß q sich fortwährend der Gränze Null nähert; so nähert sich diese Reihe fortwährend der Gränze t^2. Obige Gleichung wird offenbar auch noch dann Statt finden, wenn man sich vorstellt, daß q die Gränze Null wirklich erreicht habe, so daß also, wenn man $q = 0$ setzt:

$$2\int_\infty^0 \frac{e^{-t^2}t\partial t}{t} \cdot \int_\infty^0 \frac{e^{-t^2}t\partial t}{t} = \frac{\pi}{2}, \quad \left\{\int_\infty^0 e^{-t^2}\partial t\right\}^2 = \frac{\pi}{4},$$

woraus sogleich folgt:

$$\int_\infty^0 e^{-t^2}\partial t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Da nun aber, wenn man ∂t positiv nimmt, $e^{-t^2}\partial t$ immer positiv ist; so ist $\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t$ nach dem in (5.) bewiesenen Satze positiv; also $\int_\infty^0 e^{-t^2}\partial t$ nach (3.) negativ, so daß in der obigen Gleichung das untere Zeichen zu nehmen, d. i.

$$\int_\infty^0 e^{-t^2}\partial t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

folglich

$$(24.) \quad \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

zu setzen ist. Nimmt man t negativ, so ändert, ∂t immer als positiv angenommen, $e^{-t^2}\partial t$ sein Zeichen nicht, und es ist also nach (5.)

$$(25.) \quad \int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist. Aber nach (6.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\partial t = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t + \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\partial t .$$

lso nach (24.) und (25.):

$$(26.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\partial t = \sqrt{\pi} .$$

Wir werden späterhin zu diesem merkwürdigen bestimmten Integral noch auf andere Art gelangen, und wollen jetzt zunächst inige Folgerungen aus demselben ziehen.

15. Vorher machen wir jedoch auf einen sich übrigens ehr leicht ergebenden Satz aufmerksam, welcher in der Folge oft gebraucht werden wird. Ist nämlich

$$\int_{a}^{A} X\partial x = B ,$$

und C eine constante Größe; so ist

$$\int_{a}^{A} CX\partial x = BC .$$

Denn es ist bekanntlich

$$\int CX\partial x = C\int X\partial x .$$

Folglich

$$\int_{a}^{A} CX\partial x = C\int_{(x=A)} X\partial x - C\int_{(x=a)} X\partial x$$

$$= C\left\{\int_{(x=A)} X\partial x - \int_{(x=a)} X\partial x\right\} = C\int_{a}^{A} X\partial x .$$

16. Nach (14.) ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\partial z = \pi^{\frac{1}{2}} .$$

Setzen wir nun

$$z = a^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right),\ \partial z = a^{\frac{1}{2}}\partial x ,$$

wobei wir annehmen, daß a positiv sey, damit z einen reellen Werth behalte; so überzeugt man sich leicht, daß $z = \pm\infty$ ist, wenn $x = \pm\infty$ ist. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\partial z = a^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right)}\partial x = \pi^{\frac{1}{2}} ,$$

$$(27.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right)}\partial x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Folglich nach (15.), wenn man auf beiden Seiten mit

$$e^{-c+\frac{b^2}{4a}}$$

multiplicirt:

$$(28.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\partial x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} . e^{-c+\frac{b^2}{4a}} .$$

Für $b = c = 0$ wird, wenn man zugleich a^2 für a setzt:

$$(29.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

$$(30.)\quad \int_{0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} .$$

17. Auch die Entwickelung in Reihen führt häufig auf eine leichte Art zu den Werthen bestimmter Integrale, welches vorher schon an ein Paar Beispielen gezeigt worden ist, hier aber noch an einem Paar anderen merkwürdigen Fällen erläutert werden soll.

Durch Entwickelung in eine Reihe und dann durch Integration findet man leicht:

$$\frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = x^{a-1}\partial x - x^{a+n-1}\partial x + x^{a+2n-1}\partial x - \dots ,$$

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{x^a}{a} - \frac{x^{a+n}}{a+n} + \frac{x^{a+2n}}{a+2n} - \frac{x^{a+3n}}{a+3n} + \dots ,$$

woraus sich sogleich für jedes a und n ergiebt:

$$(31.)\quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a+2n} - \frac{1}{a+3n} + \dots$$

Es ist also auch

$$(32.)\quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} - \frac{1}{3+a} + \frac{1}{4+a} - \dots$$

$$(33.)\quad \int_0^1 \frac{x^{-a}\partial x}{1+x} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{3-a} - \frac{1}{4-a} + \dots$$

Folglich

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} + \int_0^1 \frac{x^{-a}\partial x}{1+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2-a}$$
$$+ \frac{1}{2+a} + \frac{1}{3-a} - \frac{1}{3+a} - \frac{1}{4-a} + \dots$$

Setzt man aber in dem Art. Cyklometrie in diesen Zusätzen (44.) $x = \frac{a\pi}{n}$, so wird:

$$\frac{1}{\sin\frac{a\pi}{n}} =$$

$$\frac{n}{a\pi} + \frac{n}{(n-a)\pi} - \frac{n}{(n+a)\pi} - \frac{n}{(2n-a)\pi} + \frac{n}{(2n+a)\pi}$$
$$+ \frac{n}{(3n-a)\pi} - \dots$$

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{a\pi}{n}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{n-a} - \frac{1}{n+a} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \ldots.$$

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2-a} - \frac{1}{2+a} + \ldots.$$

lso nach (6.)

$$(34.)\quad \int_0^1 \frac{(x^{a-1} + x^{-a})\partial x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

ferner ist, wenn man im Zähler und Nenner mit x^n dividirt:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \int \frac{x^{a-n-1}\partial x}{1+x^{-n}},$$

d. i., wenn man im Obigen $a-n$ für a, $-n$ für n setzt:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{x^{a-n}}{a-n} - \frac{x^{a-2n}}{a-2n} + \frac{x^{a-3n}}{a-3n} - \ldots.$$

Ist nun n positiv und $> a$; so ist diese Reihe $= 0$, für $x = \infty$, und

$$= \frac{1}{a-n} - \frac{1}{a-2n} + \frac{1}{a-3n} - \frac{1}{a-4n} + \ldots.$$

für $x = 1$. Also, wenn n positiv und $> a$ ist:

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = -\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a-2n} - \frac{1}{a-3n} + \frac{1}{a-4n} - \ldots.$$

Aber nach (6.)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^a} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n}.$$

Also

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-2n} + \frac{1}{a+2n} - \ldots.$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{n-a} - \frac{1}{n+a} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-a} - \ldots.$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$(35.)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{a\pi}{n}},$$

wenn n positiv und $> a$ ist. Dieses merkwürdige Integral hat Euler in den Inst. Calc. int. T. I. §. 351. auf andere Art bewiesen. Setzt man $n = 1$, so erhält man für jedes $a < 1$:

$$(36.)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Die hier gezeigte Methode ist in vielen Fällen anwendbar.

Wäre n positiv und $= a$; so wäre, für $x = \infty$, offenbar

$$\frac{x^{a-n}}{a-n} - \frac{x^{a-2n}}{a-2n} + \frac{x^{a-3n}}{a-3n} - \ldots = \infty.$$

Also nach dem Obigen

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \infty - \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a-2n} - \frac{1}{a-3n} + \ldots.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \infty + \frac{1}{a} + \frac{1}{n-a} - \frac{1}{n+a} - \frac{1}{2n-a} + \ldots.$$

$$= \infty + \frac{\pi}{n \sin \frac{a\pi}{n}}.$$

Unter der obigen Voraussetzung, nach welcher n positiv und $= a$ ist, ist aber offenbar auch

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{a\pi}{n}} = \infty,$$

also

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \infty,$$

und folglich auch, wenn n positiv und $= a$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{a\pi}{n}},$$

wodurch die Formel (35.) noch etwas erweitert wird. Also ist auch für $a = 1$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Folglich ist, wenn n positiv und $\geqq a$ ist,

$$(35^a.) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{a\pi}{n}},$$

und, wenn $a \leqq 1$ ist:

$$(36^a.) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Für $a = 1$ ist z. B.

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \int \frac{\partial x}{1+x} = \log n(1+x).$$

Also in diesem Falle

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \infty,$$

übereinstimmend mit dem Obigen, da auch

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \infty$$

ist, für $a = 1$.

Auch durch Reihen-Summirungen werden oft bestimmte Integrale vortheilhaft gefunden, wie an folgenden Beispielen gezeigt werden soll. Die gegebene Reihe sey z. B.

$$y = 1 + \frac{n}{1} z \cos\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} z^3 \cos 3\varphi + \ldots$$

Setzt man für die Cosinus der vielfachen Winkel ihre imaginären Ausdrücke, so erhält man, für $i = \sqrt{-1}$:

$$y = 1 + \frac{n}{1} z . \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 . \frac{e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}}{2} + \ldots.$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{1 + \frac{n}{1} e^{\varphi i} z + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{2\varphi i} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{3\varphi i} z^3 + \ldots\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{1 + \frac{n}{1} e^{-\varphi i} z + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{-2\varphi i} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{-3\varphi i} z^3 + \ldots\right\}$$

$$2y = (1 + z e^{\varphi i})^n + (1 + z e^{-\varphi i})^n$$

$$= (1 + z\cos\varphi + iz\sin\varphi)^n + (1 + z\cos\varphi - iz\sin\varphi)^n .$$

Für

$$1 + z\cos\varphi = \gamma\cos\psi, \quad z\sin\varphi = \gamma\sin\psi$$

wird

$$2y = \gamma^n(\cos\psi + i\sin\psi)^n + \gamma^n(\cos\psi - i\sin\psi)^n$$

$$= \gamma^n(e^{ni\psi} + e^{-ni\psi}) = 2\gamma^n \cos n\psi .$$

Aber

$$(1 + z\cos\varphi)^2 + z^2 \sin\varphi^2 = 1 + 2z\cos\varphi + z^2 = \gamma^2 ,$$

$$\tang\psi = \frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi}, \quad \psi = \text{Arc tang}\frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi} .$$

Also

$$y = (1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{n}{2}} \cos n \,\text{Arc tang}\frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi} .$$

Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich, wenn wir

$$y' = \frac{n}{1} z\sin\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} z^3 \sin 3\varphi + \ldots$$

setzen, die Summation

$$y' = (1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{n}{2}} \sin n \,\text{Arc tang}\frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi} .$$

Aus beiden Reihen, wenn man die erste mit $\cos\alpha\varphi$, die zweite mit $\sin\alpha\varphi$ multiplicirt, und dann addirt, folgt:

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(\alpha\varphi - n\,\text{Arc tang}\frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi}\right)$$

$$= \cos\alpha\varphi + \frac{n}{1} z\cos(\alpha-1)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2} z^2 \cos(\alpha-2)\varphi + \ldots.$$

Nun ist allgemein

$$\int \cos\alpha\varphi\,\partial\varphi = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\varphi .$$

Folglich für jedes positive oder negative ganze α

$$\int_0^\pi \cos\alpha\varphi\,\partial\varphi = 0\,,$$

wenn α nicht selbst $= 0$ ist. Für $\alpha = 0$ wird

$$\int \cos\alpha\varphi\,\partial\varphi = \int\partial\varphi = \varphi\;;$$

also

$$\int_0^\pi \cos\alpha\varphi\,\partial\varphi = \pi\,.$$

Multiplicirt man nun, unter der Voraussetzung, daß α eine positive ganze Zahl ist, die obige Reihe mit $\partial\varphi$, und integrirt zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, so erhält man sehr leicht

$$\int_0^\pi (1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(\alpha\varphi - n\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{z\sin\varphi}{1 + z\cos\varphi}\right)\partial\varphi$$
$$= \frac{n(n-1)\,\ldots\,(n-\alpha+1)}{1.2.3\,\ldots\,\alpha}\pi z^\alpha\,,$$

oder für $z = \frac{x}{a}$:

$$(35^{aa}.)\quad \int_0^\pi (a^2 + 2ax\cos\varphi + x^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(\alpha\varphi - n\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{x\sin\varphi}{a + x\cos\varphi}\right)\partial\varphi$$
$$= \frac{n(n-1)\,\ldots\,(n-\alpha+1)}{1.2.3\,\ldots\,\alpha}\pi a^{n-\alpha} x^\alpha\,,$$

wo, wie schon erinnert, α immer eine positive ganze Zahl seyn muß.

Sey ferner

$$y = z\cos\varphi + \tfrac{1}{2}z^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}z^3\cos 3\varphi + \tfrac{1}{4}z^4\cos 4\varphi + \ldots\,,$$

so erhält man leicht:

$$2y = z e^{\varphi i} + \tfrac{1}{2}z^2 e^{2\varphi i} + \tfrac{1}{3}z^3 e^{3\varphi i} + \tfrac{1}{4}z^4 e^{4\varphi i} + \ldots$$
$$+ z e^{-\varphi i} + \tfrac{1}{2}z^2 e^{-2\varphi i} + \tfrac{1}{3}z^3 e^{-3\varphi i} + \tfrac{1}{4}z^4 e^{-4\varphi i} + \ldots$$
$$= -\,\mathrm{logn}(1 - z e^{\varphi i}) - \mathrm{logn}(1 - z e^{-\varphi i})\,,$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\mathrm{logn}(1 - 2z\cos\varphi + z^2)\,,$$

und für $z = 1$:

$$\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi + \tfrac{1}{4}\cos 4\varphi + \ldots$$
$$= -\tfrac{1}{2}\mathrm{logn}\,2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{logn}(1 - \cos\varphi)$$
$$= -\,\mathrm{logn}\,2 - \mathrm{logn}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,,$$

$$-\,\mathrm{logn}\sin\varphi = \mathrm{logn}\,2 + \cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi + \ldots$$

$$-\int\partial\varphi\,\mathrm{logn}\sin\varphi = \varphi\,\mathrm{logn}\,2 + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{8}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{18}\sin 6\varphi + \ldots$$

$$-\int\partial\varphi\int\partial\varphi\,\mathrm{logn}\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi^2\,\mathrm{logn}\,2 - \tfrac{1}{4}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{32}\cos 4\varphi - \ldots$$

Ist nun n eine ganze positive oder negative Zahl, so ist für $\varphi = n\pi$:

$$\varphi \int \partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi = -n^2\pi^2 \operatorname{logn} 2,$$

und für $\varphi = 0$:

$$\varphi \int \partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi = 0.$$

Aber

$$\int_0^{n\pi} \partial\varphi \int \partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi = -\tfrac{1}{2} n^2\pi^2 \operatorname{logn} 2,$$

und

$$\int \varphi\,\partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi = \varphi \int \partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi - \int \partial\varphi \int \partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi.$$

Also

$$\int_0^{n\pi} \varphi\,\partial\varphi \operatorname{logn} \sin\varphi = -\tfrac{1}{2} n^2\pi^2 \operatorname{logn} 2,$$

oder

$$(36^{aa}.) \quad \int_0^{n\pi} \varphi\,\partial\varphi \operatorname{logn} (\sin\varphi)^2 = -n^2\pi^2 \operatorname{logn} 2.$$

M. s. über die beiden letzten Integrale einen Aufsatz von Clausen in Crelles Journal. B. VII. S. 309. Die Integrale selbst sind von Hill gefunden.

18. Eine andere ganz allgemeine und sehr fruchtbare Methode, bestimmte Integrale zu finden, beruht auf Folgendem. Sey $f(x, y)$ eine Function zweier von einander unabhängiger veränderlicher Größen, von denen man jedoch die eine, z. B. y, zuerst als constant betrachtet, und nun auf irgend einem Wege findet:

$$\int_a^A f(x, y)\partial x = \varphi(y);$$

so ist, wenn sich jetzt y um Δy ändert:

$$\Delta \int_a^A f(x, y)\partial x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$$

$$\Delta f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta f(x, y).\partial x = f(x, y + \Delta y).\partial x - f(x, y).\partial x$$

$$\int_a^A \Delta f(x, y).\partial x = \int_a^A f(x, y + \Delta y)\partial x - \int_a^A f(x, y)\partial x.$$

So wie aber nach der Voraussetzung

$$\int_a^A f(x, y)\partial x = \varphi(y)$$

ist; so ist natürlich auch

$$\int_a^A f(x, y + \Delta y)\partial y = \varphi(y + \Delta y),$$

wobei nur zu bemerken, daß immer Δy als constant betrachtet wird. Also ist

$$\int_a^A \Delta f(x, y).\partial x = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y),$$

und folglich

$$\Delta \int_a^A f(x, y).\partial x = \int_a^A \Delta f(x, y).\partial x.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist aber:

$$\Delta \int_a^A f(x, y).\partial x = \frac{\Delta y}{1}.\frac{\partial}{\partial y}\int_a^A f(x, y)\partial x + \frac{\Delta y^2}{1.2}.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_a^A f(x, y)\partial x + \frac{\Delta y^3}{1.2.3}.\frac{\partial^3}{\partial y^3}\int_a^A f(x, y)\partial x + \ldots\ldots$$

$$\Delta f(x, y).\partial x = \frac{\Delta y}{1}.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x + \frac{\Delta y^2}{1.2}.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\partial x + \frac{\Delta y^3}{1.2.3}.\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}\partial x + \ldots.$$

$$\int_a^A \Delta f(x, y).\partial x = \frac{\Delta y}{1}\int_a^A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x + \frac{\Delta y^2}{1.2}\int_a^A \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\partial x + \frac{\Delta y^3}{1.2.3}\int_a^A \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}\partial x + \ldots\ldots$$

Folglich mittelst der oben bewiesenen Gleichung, da Δy ganz willkührlich ist:

$$\int_a^A \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\partial x = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\int_a^A f(x, y)\partial x.$$

Hat man also ein von mehrern allgemeinen Größen abhängendes bestimmtes Integral gefunden, so kann man jede dieser Größen offenbar als veränderlich betrachten, und nach derselben das gefundene bestimmte Integral auf der einen, die Größe unter dem Integralzeichen auf der andern Seite des Gleichheitszeichens willkührlich oft nach einander differentiiren. Jede Differentiation wird ein neues bestimmtes Integral geben. Größerer Deutlichkeit wegen wenden wir diese Methode auf das merkwürdige bestimmte Integral

$$\int_0^\infty e^{-s^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2s}$$

in (30.) an, indem wir hier nur s für das dortige a setzen. Differentiirt man nach s, auf der linken Seite unter dem Integralzeichen; so wird:

$$\int_0^\infty (-2sx^2 e^{-s^2x^2} \partial x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2s^2},$$

$$-2s\int_0^\infty x^2 e^{-s^2x^2} \partial x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2s^2},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-s^2x^2} \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2 . s^3}.$$

Differentiirt man auf dieselbe Weise von Neuem; so wird:

$$\int_0^\infty (-2sx^4 e^{-s^2x^2} \partial x) = -\frac{3\sqrt{\pi}}{2^2 . s^4},$$

$$-2s\int_0^\infty x^4 e^{-s^2x^2} \partial x = -\frac{3\sqrt{\pi}}{2^2 . s^4},$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-s^2x^2} \partial x = \frac{3\sqrt{\pi}}{2^3 . s^5},$$

$$\int_0^\infty (-2sx^6 e^{-s^2x^2} \partial x) = -\frac{3.5\sqrt{\pi}}{2^3 . s^6},$$

$$-2s\int_0^\infty x^6 e^{-s^2x^2} \partial x = -\frac{3.5\sqrt{\pi}}{2^3 . s^6},$$

$$\int_0^\infty x^6 e^{-s^2x^2} \partial x = \frac{3.5\sqrt{\pi}}{2^4 . s^7},$$

$$\int_0^\infty (-2sx^8 e^{-s^2x^2} \partial x) = -\frac{3.5.7\sqrt{\pi}}{2^4 . s^8},$$

$$-2s\int_0^\infty x^8 e^{-s^2x^2} \partial x = -\frac{3.5.7\sqrt{\pi}}{2^4 . s^8},$$

$$\int_0^\infty x^8 e^{-s^2x^2} \partial x = \frac{3.5.7\sqrt{\pi}}{2^5 . s^9}.$$

Auf diese Art weiter gehend, überzeugt man sich leicht, daß allgemein:

$$(37.)\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-s^2x^2} \partial x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1} s^{2n+1}}\sqrt{\pi},$$

$$(38.)\quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-sx^2} \partial x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1} s^{n+\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi}.$$

Diese Methode ist allezeit anwendbar, wenn außer der veränderlichen Größe, auf welche sich die Gränzen des gefundenen bestimmten Integrals, von welchem man ausgeht, beziehen, noch andere allgemeine Größen in demselben vorkommen.

Wir wollen jetzt noch im Allgemeinen den Fall betrachten, wenn die eine Gränze A selbst veränderlich ist. Sey also Y eine beliebige Function von y, und

$$\int_a^Y f(x, y) \partial x = \varphi(y);$$

so ist

$$\varDelta\int_a^Y f(x, y)\partial x = \varphi(y+\varDelta y) - \varphi(y).$$

Aber, da Y in Y + $\varDelta$Y übergeht, wenn y sich um $\varDelta$y ändert:

$$\int_a^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x = \varphi(y+\varDelta y);$$

also

$$\int_a^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x - \int_a^Y f(x, y)\partial x$$

$$= \varphi(y+\varDelta y) - \varphi(y) = \varDelta\int_a^Y f(x, y)\partial x.$$

Man kann aber offenbar $\varDelta$y immer so (positiv oder negativ) annehmen, daß $\varDelta$Y positiv oder negativ, d. i. $Y + \varDelta Y >$ oder $< Y$ wird, jenachdem $Y >$ oder $< a$ ist, und kann demnach immer setzen:

$$\int_a^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x$$

$$= \int_a^Y f(x, y+\varDelta y)\partial x + \int_Y^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x \quad (6.);$$

also

$$\int_a^Y f(x, y+\varDelta y)\partial x - \int_a^Y f(x, y)\partial x$$

$$= \varDelta\int_a^Y f(x, y)\partial x - \int_Y^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x.$$

Aber ferner:

$$\varDelta f(x, y) = f(x, y+\varDelta y) - f(x, y)$$

$$\int_a^Y \varDelta f(x, y).\partial x = \int_a^Y f(x, y+\varDelta y)\partial x - \int_a^Y f(x, y)\partial x.$$

Folglich

$$\varDelta\int_a^Y f(x, y)\partial x$$

$$= \int_a^Y \varDelta f(x, y).\partial x + \int_Y^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist aber, wenn man bloß bis auf die in die erste Potenz von $\varDelta$y multiplicirten Glieder geht:

$$\varDelta\int_a^Y f(x, y)\partial x = \frac{\varDelta y}{1}.\frac{\partial}{\partial y}\int_a^Y f(x, y)\partial x + \ldots$$

$$\int_a^Y \varDelta f(x, y).\partial x = \frac{\varDelta y}{1}\int_a^Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x + \ldots.$$

Auch ist

$$\int_Y^{Y+\varDelta Y} f(x, y+\varDelta y)\partial x$$

$$= \int_Y^{Y+\varDelta Y} f(x, y)\partial x + \frac{\varDelta y}{1}\int_Y^{Y+\varDelta Y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x + \ldots.$$

und, wenn wir überhaupt

$$\int f(x, y)\partial x = \psi(x, y)$$

setzen:

$$\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y)\partial x = \psi(Y+\Delta Y, y) - \psi(Y, y)$$

$$= \frac{\Delta Y}{1}.\frac{\partial\psi(Y, y)}{\partial Y} + \ldots = \frac{\Delta y}{1}.\frac{\partial Y}{\partial y}.\frac{\partial\psi(Y, y)}{\partial Y} + \ldots.$$

Aber

$$f(x, y) = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}, \; f(Y, y) = \frac{\partial\psi(Y, y)}{\partial Y};$$

also

$$\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y)\partial x = \frac{\Delta y}{1} f(Y, y).\frac{\partial Y}{\partial y} + \ldots.$$

und demnach, wenn man immer bloß Glieder berücksichtigt, welche die erste Potenz von Δy enthalten:

$$\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)\partial x = \frac{\Delta y}{1} f(Y, y).\frac{\partial Y}{\partial y} + \ldots..$$

Also nach der oben gefundenen Gleichung:

$$\frac{\Delta y}{1}.\frac{\partial}{\partial y}\int_a^Y f(x, y)\partial x + \ldots.$$

$$= \frac{\Delta y}{1}\left\{\int_a^Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x + f(Y, y).\frac{\partial Y}{\partial y}\right\} + \ldots..$$

Folglich, mittelst Vergleichung der einzelnen Glieder:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^Y f(x, y)\partial x$$

$$= \int_a^Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x + f(Y, y).\frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand mitzutheilen, verbietet die Beschränktheit des Raumes.

19. Zuweilen lassen sich auch mittelst dieser Methode Differentialgleichungen bilden, durch deren Integration die gesuchten bestimmten Integrale erhalten werden.

Sey z. B.

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos rx\,\partial x = y.$$

Man differentiire nach r; so wird nach (18.)

$$-\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin rx\,\partial x = \frac{\partial y}{\partial r}.$$

Aber bekanntlich

$$\int x e^{-a^2x^2} \sin rx \,\partial x$$

$$= \sin rx \int e^{-a^2x^2} x \partial x - r \int \cos rx \,\partial x \int e^{-a^2x^2} x \partial x \,.$$

Für $-a^2x^2 = z$ ist $-2a^2 x \partial x = \partial z$. Also

$$\int e^{-a^2x^2} x \partial x = -\frac{1}{2a^2}\int e^z \partial z = -\frac{1}{2a^2} e^{-a^2x^2} ,$$

und folglich

$$\int x e^{-a^2x^2} \sin rx \,\partial x$$

$$= -\frac{1}{2a^2} e^{-a^2x^2} \sin rx + \frac{r}{2a^2}\int e^{-a^2x^2} \cos rx \,\partial x \,.$$

Also, weil der von dem Integralzeichen befreite Theil zwischen den Gränzen 0 und ∞ offenbar verschwindet:

$$\int_0^\infty x e^{-a^2x^2} \sin rx \,\partial x = \frac{r}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos rx \,\partial x \,,$$

oder nach dem Obigen:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{r}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos rx \,\partial x \,,$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{r}{2a^2} y, \quad \frac{\partial y}{y} = -\frac{r\partial r}{2a^2} ;$$

woraus durch Integration:

$$\log y = -\frac{r^2}{4a^2} + c, \quad y = e^{-\frac{r^2}{4a^2}+c} = e^c . e^{-\frac{r^2}{4a^2}} ,$$

d. i.

$$y = Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}} .$$

Um die Constante zu bestimmen, setze man $r = 0$; so wird

$$y = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \partial x = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (30.) \,.$$

Folglich

$$(39.) \quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos rx \,\partial x = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a} ,$$

und, da $\cos rx = \cos(-rx)$ ist:

$$(40.) \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2} \cos rx \,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} .$$

Da immer

$$e^{-a^2(-x)^2} \sin(-rx)\partial x = - e^{-a^2x^2} \sin rx \,\partial x$$

ist; so ist klar, daß

$$(41.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \sin rx\,\partial x = 0$$

ist.

Differentiirt man in (39.) nach r unter dem Integralzeichen; so wird:

$$\int_0^\infty x\,e^{-a^2x^2} \sin rx\,\partial x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r},$$

$$\int_0^\infty x^2\,e^{-a^2x^2} \cos rx\,\partial x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^2},$$

$$\int_0^\infty x^3\,e^{-a^2x^2} \sin rx\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^3 e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^3},$$

$$\int_0^\infty x^4\,e^{-a^2x^2} \cos rx\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^4 e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^4},$$

$$\int_0^\infty x^5\,e^{-a^2x^2} \sin rx\,\partial x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^5 e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^5},$$

$$\int_0^\infty x^6\,e^{-a^2x^2} \cos rx\,\partial x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^6 e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^6},$$

u. s. f. u. s. f.

Also allgemein:

$$(42.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty x^{2n}\,e^{-a^2x^2} \cos rx\,\partial x = (-1)^n\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^{2n} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^{2n}}, \\ \int_0^\infty x^{2n-1}\,e^{-a^2x^2} \sin rx\,\partial x = (-1)^n\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot\frac{\partial^{2n-1} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{\partial r^{2n-1}}. \end{cases}$$

20. Wir wollen jetzt der Kürze wegen, um nicht immer a^2 schreiben zu müssen, annehmen, daß a positiv sey. Setzen wir $-ax = z$, $-a\partial x = \partial z$; so ist

$$\int e^{-ax}\partial x = -\frac{1}{a}\int e^z \partial z = -\frac{1}{a}e^z = -\frac{1}{a}e^{-ax}.$$

Für $x = 0$ und $x = \infty$ ist unter der Voraussetzung, daß a positiv ist, respective:

$$-\frac{1}{a}e^{-ax} = -\frac{1}{a},\ -\frac{1}{a}e^{-ax} = 0.$$

Also

$$(43.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a}.$$

Setzen wir s für a, wo also s auch positiv seyn muß; so ist

$$\int_0^\infty e^{-sx}\partial x = \frac{1}{s},$$

und folglich, wenn man nach s unter dem Integralzeichen differentiirt:

$$\int_0^\infty x\, e^{-sx}\partial x = \frac{1}{s^2},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-sx}\partial x = \frac{1.2}{s^3},$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-sx}\partial x = \frac{1.2.3}{s^4},$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-sx}\partial x = \frac{1.2.3.4}{s^5},$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. allgemein:

$$(44.)\quad \int_0^\infty x^n e^{-sx}\partial x = \frac{1.2.3.4\ldots n}{s^{n+1}},$$

$$(45.)\quad \int_0^\infty x^n e^{-x}\partial x = 1.2.3.4\ldots n\,.$$

21. Durch theilweise Integration findet man:

$$\int e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x =$$

$$\cos\alpha x\int e^{-ax}\partial x + \alpha\int\sin\alpha x\,\partial x\int e^{-ax}\partial x$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos\alpha x - \frac{\alpha}{a}\int e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x$$

$$\int e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x =$$

$$\sin\alpha x\int e^{-ax}\partial x - \alpha\int\cos\alpha x\,\partial x\int e^{-ax}\partial x$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-ax}\sin\alpha x + \frac{\alpha}{a}\int e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x\,.$$

Folglich

$$a\int e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x + \alpha\int e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = -\,e^{-ax}\cos\alpha x,$$

$$\alpha\int e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x - a\int e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = e^{-ax}\sin\alpha x\,.$$

Für $x = 0$ ist:

$$-\,e^{-ax}\cos\alpha x = -1,\quad e^{-ax}\sin\alpha x = 0\,;$$

und für $x = \infty$:

$$-\,e^{-ax}\cos\alpha x = 0,\quad e^{-ax}\sin\alpha x = 0\,,$$

immer unter der Voraussetzung, daß a positiv ist. Also

$$a\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x + \alpha\int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = 1 ,$$

$$\alpha\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x - a\int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = 0 .$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man:

$$(46.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x = \frac{a}{a^2+\alpha^2} ,$$

$$(47.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2} .$$

Lacroix (Traité du Calcul diff. et du Calcul int. T. III. p. 492.) schließt hieraus für $a = 0$:

$$\int_0^\infty \cos\alpha x\,\partial x = 0$$

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\,\partial x = \frac{1}{\alpha} .$$

Betrachtet man aber die Rechnung, durch welche die Gleichungen (46.) und (47.) gefunden worden sind, näher; so sieht man leicht, daß dieselbe ihre Gültigkeit verliert, wenn $a = 0$ ist. Für $a = 0$ ist nämlich

$$\int \cos\alpha x\,\partial x = \cos ax\int\partial x + \alpha\int \sin\alpha x\,\partial x\int\partial x$$

$$= x\cos\alpha x + \alpha\int x\sin\alpha x\,\partial x ,$$

$$\int \sin\alpha x\,\partial x = \sin\alpha x\int\partial x - \alpha\int\cos\alpha x\,\partial x\int\partial x$$

$$= x\sin\alpha x - \alpha\int x\cos\alpha x\,\partial x ,$$

woraus erhellet, daß die obige Rechnung nun nicht weiter Anwendung findet. Daher bedürfen auch die Formeln, welche Lacroix a. a. O. mittheilt, einer Berichtigung. Es ist aber, wie man sogleich findet:

$$\int \cos\alpha x\,\partial x = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x + C ,\quad \int \sin\alpha x\,\partial x = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + C .$$

Hieraus ergiebt sich sogleich, wenn $\varkappa$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$(48.)\quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\varkappa\pi}{\alpha}} \cos\alpha x\,\partial x = 0 \\ \int_0^{\frac{(2\varkappa+1)\pi}{2\alpha}} \cos\alpha x\,\partial x = \frac{1}{\alpha}(-1)^\varkappa , \end{cases}$$

$$(49.)\quad\begin{cases}\int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}}\sin\alpha x\,\partial x = 0\\ \int_0^{\frac{(2\varkappa+1)\pi}{\alpha}}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{2}{\alpha}\\ \int_0^{\frac{(2\varkappa+1)\pi}{2\alpha}}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{1}{\alpha}.\end{cases}$$

Bloß diese Formeln, welche natürlich gelten, wie groß man auch die ganze Zahl $\varkappa$ annehmen mag, scheinen auf vollständige Richtigkeit Anspruch machen zu können. Man sieht hieraus auch, wie vorsichtig man bei Untersuchungen über bestimmte Integrale zu Werke gehen muß.

22. Bevor wir weiter gehen, beweisen wir folgenden merkwürdigen Ausdruck. Wenn

$$z = \frac{x}{x^2+y^2}$$

und x positiv ist; so ist

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (-1)^n.\frac{1.2.3..n\cos\left\{(n+1)\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

wo der absolute Werth von $\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}$ den vierten Theil der Peripherie nicht übersteigt. Differentiirt man von Neuem; so wird

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = (-1)^n.\frac{1.2...n(n+1)y\sin\left\{(n+1)\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)+1}}$$

$$-(-1)^n.\frac{1.2...n(n+1)x\cos\left\{(n+1)\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)+1}}$$

$$= (-1)^{n+1}.\frac{1.2..(n+1)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}}\left\{\begin{array}{l}\cos\left\{(n+1)\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right\}.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\sin\left\{(n+1)\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right\}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}.$$

Nach einfachen trigonometrischen Gründen ist nun:

$$\sin\left(\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\left(\mathrm{Arc\,tang}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

wobei zu bemerken ist, daß die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, da der absolute Werth von Arc tang $\frac{y}{x}$ den vierten Theil der Peripherie nicht übersteigt, also der Cosinus, so wie x, positiv ist, und das Zeichen des Sinus, so wie das der Tangente, von y abhängt. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung; so ergiebt sich augenblicklich:

$$\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1}} = (-1)^{n+1}.\frac{1.2\ldots(n+1)\cos\left\{(n+2)\,\text{Arc tang}\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}},$$

so daß also das Gesetz für $n+1$ gilt, wenn es für n gilt, und demnach bloß noch für $n=1$ bewiesen zu werden braucht. Man erhält aber durch Differentiation leicht:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{x^2+y^2}\left\{\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{x^2+y^2}\left\{\left(\cos\text{Arc tang}\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\sin\text{Arc tang}\frac{y}{x}\right)^2\right\}$$

$$= (-1).\frac{1.\cos 2\,\text{Arc tang}\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

so daß also das Gesetz wirklich für $n=1$ gilt, und demnach allgemein ist.

Differentiirt man z nach y; so erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{x^2+y^2}.2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -\frac{1}{x^2+y^2}.2\sin\text{Arc tang}\frac{y}{x}\cos\text{Arc tang}\frac{y}{x},$$

d. i.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-1).\frac{\sin 2\,\text{Arc tang}\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}}.$$

Entwickelt man ferner die zweiten Differentialquotienten von z in Bezug auf x und auf y; so erhält man:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3};$$

also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-1).\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-1)^3.\frac{1.2\cos 3\,\text{Arc tang}\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}}.$$

Wir wollen nun überhaupt

$$\frac{\cos\left\{(n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

und

$$\frac{\sin\left\{(n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

nach y differentiiren. Den ersten Differentialquotienten findet man

$$= -\frac{n+1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}}\left\{\begin{array}{l}\sin\left\{(n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ +\cos\left\{(n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$

$$= -\frac{(n+1)\sin\left\{(n+2)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}}.$$

Der zweite Differentialquotient wird eben so:

$$= \frac{n+1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}}\left\{\begin{array}{l}\cos\left\{(n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\sin\left\{(n+1)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)\cos\left\{(n+2)\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}}.$$

Es ist folglich:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-1)\cdot\frac{1\,.\sin 2\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-1)\cdot\frac{1\,.\,2\cos 3\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\sin 4\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\cos 5\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(4+1)}},$$

$$\frac{\partial^5 z}{\partial y^5} = (-1)\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\sin 6\,\text{Arc tang}\,\frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(5+1)}},$$

$$\frac{\partial^6 z}{\partial y^6} = (-1) . \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \cos 7 \operatorname{Arc tang} \frac{y}{x}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(6+1)}},$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich allgemein:

$$\frac{\partial^{2n-1} z}{\partial y^{2n-1}} = (-1)^n . \frac{1 . 2 . 3 . . (2n-1) \sin \left\{ 2n \operatorname{Arc tang} \frac{y}{x} \right\}}{(x^2+y^2)^n},$$

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}} = (-1)^n . \frac{1 . 2 . 3 \ldots 2n \cos \left\{ (2n+1) \operatorname{Arc tang} \frac{y}{x} \right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(2n+1)}}.$$

Aus der Formel

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos \alpha x \, \partial x = \frac{a}{a^2+\alpha^2} \quad (46.)$$

erhält man nach dem Vorhergehenden, wenn man nach a differentiirt:

$$\int_0^\infty x \, e^{-ax} \cos \alpha x \, \partial x = \frac{1 . \cos 2 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^2 \, e^{-ax} \cos \alpha x \, \partial x = \frac{1 . 2 \cos 3 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^3 \, e^{-ax} \cos \alpha x \, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 \cos 4 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^4 \, e^{-ax} \cos \alpha x \, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 . 4 \cos 5 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(4+1)}},$$

u. s. f. u. s. f.

Also allgemein:

$$(50.) \quad \int_0^\infty x^n \, e^{-ax} \cos \alpha x \, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 . . n \cos \left\{ (n+1) \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a} \right\}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Die Formel

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2} \quad (47.)$$

giebt auf ähnliche Weise:

$$\int_0^\infty x \, e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = \frac{1 . \sin 2 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = -\frac{1.2 \cos 3 \,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = -\frac{1.2.3 \sin 4 \,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = \frac{1.2.3.4 \cos 5 \,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(4+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^5 e^{-ax} \sin \alpha x \, \partial x = \frac{1.2.3.4.5 \sin 6 \,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha}}{(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}(5+1)}},$$

u. s. f. u. s. f.

Es ist aber

$$\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$2\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = \pi - 2\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$4\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = 2\pi - 4\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$6\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = 3\pi - 6\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$8\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = 4\pi - 8\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

u. s. f. u. s. f.

$$\sin 2\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = \sin 2\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$\sin 4\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = -\sin 4\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$\sin 6\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = \sin 6\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$\sin 8\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = -\sin 8\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

u. s. f. u. s. f.

$$3\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = \pi + \tfrac{1}{2}\pi - 3\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$5\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = 2\pi + \tfrac{1}{2}\pi - 5\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$7\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = 3\pi + \tfrac{1}{2}\pi - 7\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$9\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{a}{\alpha} = 4\pi + \tfrac{1}{2}\pi - 9\,\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{\alpha}{a},$$

u. s. f. u. s. f.

$$\cos 3 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = - \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - 3 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}\right),$$

$$\cos 5 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - 5 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}\right),$$

$$\cos 7 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = - \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - 7 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}\right),$$

$$\cos 9 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - 9 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}\right),$$

u. s. f. u. s. f.

d. i.

$$\cos 3 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = - \sin 3 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a},$$

$$\cos 5 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = \sin 5 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a},$$

$$\cos 7 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = - \sin 7 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a},$$

$$\cos 9 \operatorname{Arc tang} \frac{a}{\alpha} = \sin 9 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a},$$

u. s. f. u. s. f.

Also

$$\int_0^\infty x\, e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . \sin 2 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}(1+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 \sin 3 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}(2+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 \sin 4 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}(3+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 . 4 \sin 5 \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}}{(a^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}(4+1)}},$$

u. s. f. u. s. f.

und folglich allgemein:

$$(51.)\quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin \alpha x\, \partial x = \frac{1 . 2 . 3 .. n \sin \left\{(n+1) \operatorname{Arc tang} \frac{\alpha}{a}\right\}}{(a^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Die beiden letzten äußerst merkwürdigen bestimmten Integrale hat Euler gefunden. Die Richtigkeit derselben blieb aber einigen Zweifeln unterworfen, da Euler sich bei der Entwickelung der imaginären Größen bedient hatte. Dadurch ward Poisson veranlaßt, einen andern Beweis zu geben (s. Lacroix

Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 490.), von welchem der obige, von mir hier geführte, ganz verschieden ist.

22. Wir fügen hier noch den Beweis der folgenden bestimmten Integrale bei. Durch partikulare Integration erhält man:

$$\int \sin x^n \partial x = \sin x^{n-1} \int \sin x \partial x - (n-1) \int \sin x^{n-2} \cos x \partial x \int \sin x \partial x$$

$$= - \sin x^{n-1} \cos x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \cos x^2 \partial x$$

$$= - \sin x^{n-1} \cos x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \partial x - (n-1) \int \sin x^n \partial x ,$$

$$n \int \sin x^n \partial x = - \sin x^{n-1} \cos x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \partial x ;$$

folglich, wenn man die Integrale zwischen den Gränzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ nimmt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^{n-2} \partial x .$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so kommt man durch successive Anwendung dieser Relation endlich auf

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 6.4.2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial x ,$$

d. i.

$$(52.) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^{2n} \partial x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2} . \tfrac{1}{2}\pi .$$

Ist n eine ungerade Zahl; so ergiebt sich mittelst successiver Anwendung obiger Relation endlich:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 7.5.3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \partial x .$$

Aber

$$\int \sin x \partial x = - \cos x , \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \partial x = 1 .$$

Also

$$(53.) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^{2n+1} \partial x = \frac{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3.1} .$$

Auf ähnliche Art ist:

$$\int \cos x^n \partial x = \cos x^{n-1} \int \cos x \partial x + (n-1) \int \cos x^{n-2} \sin x \partial x \int \cos x \partial x$$

$$= \cos x^{n-1} \sin x + (n-1) \int \cos x^{n-2} \sin x^2 \partial x$$

$$= \cos x^{n-1} \sin x + (n-1) \int \cos x^{n-2} \partial x - (n-1) \int \cos x^n \partial x ,$$

$$n\int \cos x^n \partial x = \cos x^{n-1} \sin x + (n-1)\int \cos x^{n-2} \partial x,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^{n-2} \partial x.$$

Ist n gerade, so kommt man endlich auf:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\dots 3.1}{n(n-2)\dots 6.4.2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial x,$$

d. i.

$$(54.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^{2n} \partial x = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1}{2n(2n-2)\dots 6.4.2}.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ist n ungerade, so kommt man endlich auf

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4.2}{n(n-2)\dots 7.5.3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \partial x.$$

Aber

$$\int \cos x \partial x = \sin x, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \partial x = 1.$$

Also

$$(55.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^{2n+1} \partial x = \frac{2n(2n-2)\dots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5.3.1},$$

$$(56.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x.$$

Da ferner

$$\tan x^n = \tan x^{n-2} \tan x^2 = \frac{\tan x^{n-2}}{\cos x^2} - \tan x^{n-2},$$

$$\tan x^n \partial x = \tan x^{n-2} \partial \tan x - \tan x^{n-2} \partial x$$

ist; so ist

$$\int \tan x^n \partial x = \frac{\tan x^{n-1}}{n-1} - \int \tan x^{n-2} \partial x.$$

Folglich

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x^n \partial x = \frac{1}{n-1} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x^{n-2} \partial x.$$

Ist n eine gerade Zahl; so erhält man hieraus endlich:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x^n \partial x = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \dots \mp \tfrac{1}{3} \pm \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x^2 \partial x.$$

Aber

$$\int \tan x^2 \partial x = \int \frac{1-\cos x^2}{\cos x^2} \partial x = \int \frac{\partial x}{\cos x^2} - x = \tan x - x$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x^2 \partial x = 1 - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Folglich, wenn n gerade ist:

Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 490.), von welchem der obige, von mir hier geführte, ganz verschieden ist.

22. Wir fügen hier noch den Beweis der folgenden bestimmten Integrale bei. Durch partikulare Integration erhält man:

$$\int \sin x^n \partial x = \sin x^{n-1} \int \sin x \,\partial x - (n-1) \int \sin x^{n-2} \cos x \,\partial x \int \sin x \,\partial x$$

$$= -\sin x^{n-1} \cos x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \cos x^2 \,\partial x$$

$$= -\sin x^{n-1} \cos x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \partial x - (n-1) \int \sin x^n \partial x \,,$$

$$n \int \sin x^n \partial x = -\sin x^{n-1} \cos x + (n-1) \int \sin x^{n-2} \partial x \,;$$

folglich, wenn man die Integrale zwischen den Gränzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ nimmt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^{n-2} \partial x \,.$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so kommt man durch successive Anwendung dieser Relation endlich auf

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 6.4.2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial x \,,$$

d. i.

$$(52.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^{2n} \partial x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi \,.$$

Ist n eine ungerade Zahl; so ergiebt sich mittelst successiver Anwendung obiger Relation endlich:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 7.5.3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \,\partial x \,.$$

Aber

$$\int \sin x \,\partial x = -\cos x, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \,\partial x = 1 \,.$$

Also

$$(53.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^{2n+1} \partial x = \frac{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3.1} \,.$$

Auf ähnliche Art ist:

$$\int \cos x^n \partial x = \cos x^{n-1} \int \cos x \,\partial x + (n-1) \int \cos x^{n-2} \sin x \,\partial x \int \cos x \,\partial x$$

$$= \cos x^{n-1} \sin x + (n-1) \int \cos x^{n-2} \sin x^2 \,\partial x$$

$$= \cos x^{n-1} \sin x + (n-1) \int \cos x^{n-2} \partial x - (n-1) \int \cos x^n \partial x,$$

$$n\int \cos x^n \partial x = \cos x^{n-1}\sin x + (n-1)\int \cos x^{n-2}\partial x\,,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^{n-2}\partial x\,.$$

Ist n gerade, so kommt man endlich auf:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 6.4.2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial x\,,$$

d. i.

$$(54.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^{2n} \partial x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1}{2n(2n-2)\ldots 6.4.2}.\tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Ist n ungerade, so kommt man endlich auf

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n \partial x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 7.5.3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\partial x\,.$$

Aber

$$\int \cos x\partial x = \sin x,\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\partial x = 1\,.$$

Also

$$(55.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^{2n+1} \partial x = \frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5.3.1}\,,$$

$$(56.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x^n \partial x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x^n\partial x\,.$$

Da ferner

$$\operatorname{tang} x^n = \operatorname{tang} x^{n-2}\operatorname{tang} x^2 = \frac{\operatorname{tang} x^{n-2}}{\cos x^2} - \operatorname{tang} x^{n-2}\,,$$

$$\operatorname{tang} x^n\partial x = \operatorname{tang} x^{n-2}\partial\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x^{n-2}\partial x$$

ist; so ist

$$\int \operatorname{tang} x^n\partial x = \frac{\operatorname{tang} x^{n-1}}{n-1} - \int \operatorname{tang} x^{n-2}\partial x\,.$$

Folglich

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^n\partial x = \frac{1}{n-1} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^{n-2}\partial x\,.$$

Ist n eine gerade Zahl; so erhält man hieraus endlich:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^n\partial x = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{3} \pm \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^2\partial x\,.$$

Aber

$$\int \operatorname{tang} x^2\partial x = \int \frac{1-\cos x^2}{\cos x^2}\partial x = \int \frac{\partial x}{\cos x^2} - x = \operatorname{tang} x - x$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^2\partial x = 1 - \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Folglich, wenn n gerade ist:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^n \partial x = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{3} \pm 1 \mp \tfrac{1}{4}\pi$$

d. i.

(57.) $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^{2n} \partial x = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{3} \pm 1 \mp \tfrac{1}{4}\pi .$$

Ist n ungerade; so kommt man endlich auf:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^n \partial x = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{2} \mp \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x \, \partial x.$$

Aber

$$\int \operatorname{tang} x \, \partial x = \int \frac{\sin x \, \partial x}{\cos x} = -\int \frac{\partial \cos x}{\cos x} = -\operatorname{logn} \cos x$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{logn} \cos x^2 ,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x \, \partial x = -\tfrac{1}{2} \operatorname{logn} \tfrac{1}{2} .$$

Also, wenn n ungerade ist:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^n \partial x = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \operatorname{long} \tfrac{1}{2} ,$$

oder

(58.) $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang} x^{2n+1} \partial x = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + \ldots \mp \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \operatorname{logn} \tfrac{1}{2} .$$

Auf ähnliche Art ist:

$$\cot x^n = \cot x^{n-2} \cot x^2 = \frac{\cot x^{n-2}}{\sin x^2} - \cot x^{n-2} ,$$

$$\cot x^n \partial x = -\cot x^{n-2} \partial \cot x - \cot x^{n-2} \partial x ,$$

$$\int \cot x^n \partial x = -\frac{\cot x^{n-1}}{n-1} - \int \cot x^{n-2} \partial x ,$$

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cot x^n \partial x = \frac{1}{n-1} - \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cot x^{n-2} \partial x .$$

Da nun

$$\int \cot x^2 \partial x = \int \frac{1 - \sin x^2}{\sin x^2} \partial x = \int \frac{\partial x}{\sin x^2} - x = -\cot x - x$$

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cot x^2 \partial x = -\tfrac{1}{2}\pi - (-1 - \tfrac{1}{4}\pi) = 1 - \tfrac{1}{4}\pi ,$$

$$\int \cot x \, \partial x = \int \frac{\cos x \, \partial x}{\sin x} = \int \frac{\partial \sin x}{\sin x} = \operatorname{logn} \sin x = \tfrac{1}{2} \operatorname{logn} \sin x^2 ,$$

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cot x \, \partial x = -\tfrac{1}{2} \operatorname{logn} \tfrac{1}{2}$$

ist; so überzeugt man sich leicht, daß allgemein

$$(59.)\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tang x^n \partial x = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cot x^n \partial x$$

ist, wie übrigens auch leicht aus dem in (5.) bewiesenen Satze geschlossen werden kann.

24. Zu einer neuen Methode zur Entwickelung der Werthe bestimmter Integrale führen folgende Betrachtungen. Nach (18.) ist für $n = 1$:

$$\int_a^A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \partial x = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^A f(x, y)\, \partial x,$$

$$\partial y \int_a^A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \partial x = \partial \int_a^A f(x, y) \partial x,$$

$$\int_a^A f(x, y) \partial x = \int \partial y \int_a^A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \partial x + \text{Const}.$$

Setzen wir nun

$$\int f(x, y) \partial x = \psi(x, y);$$

so ist

$$\int_a^A f(x, y) \partial x = \psi(A, y) - \psi(a, y).$$

Also

$$\psi(A, y) - \psi(a, y) = \int \partial y \int_a^A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \partial x + \text{Const}$$

und, wenn wir

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x, y)$$

setzen:

$$\int_b^B \partial y \int_a^A \varphi(x, y) \partial x$$
$$= \psi(A, B) - \psi(a, B) - \psi(A, b) + \psi(a, b).$$

Aber

$$\partial f(x, y) = \varphi(x, y) \partial y,$$

$$f(x, y) = \int \varphi(x, y)\, \partial y,$$

$$f(x, B) - f(x, b) = \int_b^B \varphi(x, y) \partial y,$$

$$f(x, B) \partial x - f(x, b) \partial x = \partial x \int_b^B \varphi(x, y) \partial y,$$

$$\int_a^A f(x, B) \partial x - \int_a^A f(x, b) \partial x = \int_a^A \partial x \int_b^B \varphi(x, y) \partial y.$$

Ferner nach dem Obigen

$$\int f(x, y) \partial x = \psi(x, y);$$

also

$$\int f(x, B)\partial x = \psi(x, B),\ \int f(x, b)\partial x = \psi(x, b),$$

$$\int_a^A f(x, B)\partial x = \psi(A, B) - \psi(a, B),$$

$$\int_a^A f(x, b)\partial x = \psi(A, b) - \psi(a, b),$$

und folglich

$$\int_a^A \partial x \int_b^B \varphi(x, y)\partial y$$
$$= \psi(A, B) - \psi(a, B) - \psi(A, b) + \psi(a, b).$$

Also

$$\int_a^A \partial x \int_b^B \varphi(x, y)\partial y = \int_b^B \partial y \int_a^A \varphi(x, y)\partial x,$$

welches man kürzer auch so zu schreiben pflegt:

$$\int_b^B \int_a^A \varphi(x, y)\partial x \partial y = \int_a^A \int_b^B \varphi(x, y)\partial y \partial x.$$

Dieses Satzes bedient man sich oft mit Vortheil bei der Entwickelung der Werthe bestimmter Integrale. So ist z. B.

$$\int x^{\alpha-1}\partial x = \frac{x^\alpha}{\alpha},\ \int_0^1 x^{\alpha-1}\partial x = \frac{1}{\alpha}.$$

Folglich

$$\int \partial\alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}\partial x = \int \frac{\partial\alpha}{\alpha} = \operatorname{logn}\alpha,$$

$$\int_\gamma^\alpha \partial\alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}\partial x = \operatorname{logn}\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Aber nach unserm Satze:

$$\int_\gamma^\alpha \partial\alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}\partial x = \int_0^1 \partial x \int_\gamma^\alpha x^{\alpha-1}\partial\alpha,$$

und bekanntlich

$$\int x^{\alpha-1}\partial\alpha = \int x^{\alpha-1}\partial(\alpha-1) = \frac{x^{\alpha-1}}{\operatorname{logn} x},$$

$$\int_\gamma^\alpha x^{\alpha-1}\partial\alpha = \frac{x^{\alpha-1} - x^{\gamma-1}}{\operatorname{logn} x},$$

$$\int_0^1 \partial x \int_\gamma^\alpha x^{\alpha-1}\partial\alpha = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\gamma-1}}{\operatorname{logn} x}\partial x.$$

Also

$$(60.)\quad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\gamma-1}}{\operatorname{logn} x}\partial x = \int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\gamma}{\operatorname{logn} x}\cdot\frac{\partial x}{x} = \operatorname{logn}\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Ferner ist nach (43.), wenn α positiv ist:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a}.$$

Also

$$\int\partial a\int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \int\frac{\partial a}{a} = \log n\, a$$

$$\int_\alpha^a \partial a\int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \log n\frac{a}{\alpha}.$$

Aber

$$\int_\alpha^a \partial a\int_0^\infty e^{-ax}\partial x = \int_0^\infty \partial x\int_\alpha^a e^{-ax}\partial a,$$

$$\int e^{-ax}\partial a = -\frac{1}{x}e^{-ax},\quad \int_\alpha^a e^{-ax}\partial a = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-ax}}{x}.$$

Folglich

$$(61.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-ax}}{x}\partial x = \log n\frac{a}{\alpha}.$$

Nach (46.) und (47.) ist

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x = \frac{a}{a^2+\alpha^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2},$$

$$\int\partial a\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x = \int\frac{a\,\partial a}{a^2+\alpha^2},$$

$$\int\partial a\int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \int\frac{\alpha\,\partial a}{a^2+\alpha^2}.$$

Für $a^2+\alpha^2 = z$ ist $2a\,\partial a = \partial z$; also

$$\int\frac{a\,\partial a}{a^2+\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial z}{z} = \tfrac{1}{2}\log n\, z = \tfrac{1}{2}\log n(a^2+\alpha^2),$$

$$\int_b^a\frac{a\,\partial a}{a^2+\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\log n\left(\frac{a^2+\alpha^2}{b^2+\alpha^2}\right).$$

Ferner ist

$$\int\frac{\alpha\,\partial a}{a^2+\alpha^2} = \int\frac{\frac{\partial a}{\alpha}}{1+\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2} = \operatorname{Arc\,tang}\frac{a}{\alpha}.$$

$$\int_b^a\frac{\alpha\,\partial a}{a^2+\alpha^2} = \operatorname{Arc\,tang}\frac{a}{\alpha} - \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{\alpha}.$$

Also haben wir

$$\int_b^a\partial a\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial x = \tfrac{1}{2}\log n\left(\frac{a^2+\alpha^2}{b^2+\alpha^2}\right),$$

$$\int_b^a\partial a\int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial x = \operatorname{Arc\,tang}\frac{a}{\alpha} - \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{\alpha}.$$

Aber

$$\int e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial a = -\frac{1}{x}e^{-ax}\cos\alpha x\,,$$

$$\int e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial a = -\frac{1}{x}e^{-ax}\sin\alpha x\,,$$

$$\int_b^a e^{-ax}\cos\alpha x\,\partial a = \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\cos\alpha x\,,$$

$$\int_b^a e^{-ax}\sin\alpha x\,\partial a = \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\sin\alpha x\,.$$

Folglich, ganz wie vorher:

$$(62.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\cos\alpha x\,\partial x = \tfrac{1}{2}\operatorname{logn}\left(\frac{a^2+\alpha^2}{b^2+\alpha^2}\right),$$

$$(63.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\sin\alpha x\,\partial x = \operatorname{Arc tang}\frac{a}{\alpha} - \operatorname{Arc tang}\frac{b}{\alpha}\,.$$

Für $a=\infty$, $b=0$ erhält man aus den zwei letzten Resultaten:

$$(64.)\quad \int_0^\infty \cos\alpha x\frac{\partial x}{x} = \infty\,,$$

$$(65.)\quad \int_0^\infty \sin\alpha x\frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

und für $a=\infty$, $\alpha=0$ aus (61.)

$$(66.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{x} = \infty\,.$$

25. Wir wollen nach Laplace noch das doppelte Integral

$$\iint e^{-s(1+x^n)}\partial s\,\partial x$$

betrachten, wobei wir annehmen, daß s positiv und $n \overline{\overline{>}} 1$ sey. Betrachten wir zuerst s als veränderlich, und setzen

$$-s(1+x^n)=z\,,\quad \partial s = -\partial z:(1+x^n)\,;$$

so ist

$$\int e^{-s(1+x^n)}\partial s = -\frac{\int e^z\partial z}{1+x^n} = -\frac{e^z}{1+x^n} = -\frac{e^{-s(1+x^n)}}{1+x^n}\,,$$

woraus sogleich folgt:

$$\int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial s = \frac{1}{1+x^n}\,,$$

wenn man nur beobachtet, daß s positiv ist. Also nach (35.)

$$\int_0^\infty \partial x\int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial s = \int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\,,$$

oder, nach einer kürzern Art zu schreiben, auch:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial s\,\partial x = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}.$$

Man kehre nun die Ordnung der Integration um, so daß man s als constant, x als veränderlich betrachtet, und setze $sx^n = t^n$, $x = ts^{-\frac{1}{n}}$, $\partial x = s^{-\frac{1}{n}}\partial t$; so ist

$$\int e^{-s(1+x^n)}\partial x = \int e^{-s} s^{-\frac{1}{n}} e^{-t^n}\partial t = e^{-s} s^{-\frac{1}{n}} \int e^{-t^n}\partial t.$$

Folglich, weil $t = 0$, wenn $x = 0$, $t = \infty$, wenn $x = \infty$:

$$\int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial x = e^{-s} s^{-\frac{1}{n}} \int_0^\infty e^{-t^n}\partial t,$$

$$\int_0^\infty \partial s \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial x = \int_0^\infty e^{-s} s^{-\frac{1}{n}}\partial s \int_0^\infty e^{-t^n}\partial t.$$

Setzt man nun ferner, welches offenbar verstattet ist, $s = t^n$, $\partial s = nt^{n-1}\partial t$, $s^{-\frac{1}{n}} = t^{-1}$; so wird

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial x\,\partial s = n\int_0^\infty e^{-t^n} t^{n-2}\partial t \int_0^\infty e^{-t^n}\partial t.$$

Aber nach (24.):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial x\,\partial s = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(1+x^n)}\partial s\,\partial x.$$

Also

$$n\int_0^\infty e^{-t^n} t^{n-2}\partial t \int_0^\infty e^{-t^n}\partial t = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}.$$

Da nun

$$\int_0^\infty e^{-t^n}\partial t$$

offenbar eine constante Größe ist; so läßt sich diese Gleichung auch so schreiben:

$$(67.)\quad n\left(\int_0^\infty e^{-t^n}\partial t\right)\left(\int_0^\infty e^{-t^n} t^{n-2}\partial t\right) = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}.$$

Für $n = 2$ wird

$$2\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t\right)\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t\right) = 2\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t\right)^2 = \frac{\pi}{2 \sin\frac{1}{2}\pi},$$

d. i.

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

wie schon in (24.) auf anderem Wege gefunden worden ist.

Setzt man zuerst $\frac{n}{r-1}$ für n, dann t^{r-1} für t; so wird:

$$n^2\left(\int_0^\infty e^{-t^{\frac{n}{r-1}}}\partial t\right)\left(\int_0^\infty e^{-t^{\frac{n}{r-1}}}t^{\frac{n}{r-1}-2}\partial t\right)=\frac{(r-1)^2\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right)\pi},$$

$$(68.)\quad n^2\left(\int_0^\infty e^{-t^n}t^{r-2}\partial t\right)\left(\int_0^\infty e^{-t^n}t^{n-r}\partial t\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right)\pi}.$$

26. Cauchy hat in seinen Exercices de Mathématiques. 2mo Livraison. Paris. 1826. einen Satz bewiesen, welcher seiner Allgemeinheit wegen merkwürdig ist, und ebenfalls häufig bei der Entwickelung bestimmter Integrale mit Vortheil angewandt wird. Dieser Satz ist folgender:

Wenn f(x) eine beliebige Function von x, und das bestimmte Integral

$$A_{2n}=\int_0^\infty x^{2n}f(x^2)\partial x,$$

wo n eine willkührliche ganze Zahl bezeichnet, bekannt ist; so läßt sich immer das bestimmte Integral

$$B_{2n}=\int_0^\infty x^{2n}f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\partial x$$

finden, indem nämlich

$$(69.)\quad B_{2n}=$$

$$A_0+\frac{(n+1)n}{1.2}A_2+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}A_4+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{(2n-2)(2n-3)}{1.2}A_{2n-4}+\frac{2n-1}{1}A_{2n-2}+A_{2n}$$

ist.

Um dies zu beweisen, setze man der Kürze wegen

$$x-\frac{1}{x}=y.$$

Nun ist offenbar

$$A_{2n}=\int_0^\infty x^{2n}f(x^2)\partial x=\int_0^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y,$$

$$\int_0^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y=\int_{-\infty}^0 y^{2n}f(y^2)\partial y,$$

$$\int_{-\infty}^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y=\int_0^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y+\int_{-\infty}^0 y^{2n}f(y^2)\partial y,$$

d. i.

$$\int_{-\infty}^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y=2\int_0^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y,$$

$$2A_{2n}=\int_{-\infty}^\infty y^{2n}f(y^2)\partial y.$$

Ist $x=0$, so ist $y=-\infty$. Für $x=\infty$ ist auch $y=\infty$. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} f(y^2)\partial y = \int_0^\infty \left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\partial x,$$

$$2A_{2n} = \int_0^\infty \left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}\left(x+\frac{1}{x}\right) f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{x}.$$

Setzt man ferner

$$\frac{1}{x} = z,\ x = \frac{1}{z},\ \partial z = -\frac{\partial x}{x^2};$$

so ist $z = \infty$ für $x = 0$, $z = 0$ für $x = \infty$; also

$$B_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\partial x = \int_0^\infty z^{2n} f\left\{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2\right\}\partial z$$

$$= \int_\infty^0 -\frac{1}{x^{2n}} f\left\{\left(\frac{1}{x}-x\right)^2\right\}\frac{\partial x}{x^2} = -\int_\infty^0 \frac{1}{x^{2n+1}} f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{x};$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x^{2n+1}} f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{x},$$

$$2B_{2n} = \int_0^\infty \left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right) f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{x}.$$

Nun ist aber, wie in dem Artikel Goniometrie in diesen Zusätzen gezeigt werden wird:

$$\cos(2n+1)\Theta =$$

$$\cos\Theta\left\{1-\frac{(2n+2)2n}{1.2}\sin\Theta^2+\frac{(2n+4)(2n+2)2n(2n-2)}{1.2.3.4}\sin\Theta^4-\ldots\right\}$$

und, wenn man

$$e^{\Theta\sqrt{-1}} = x$$

setzt:

$$\cos\Theta = \tfrac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right),\quad \sin\Theta = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(x-\frac{1}{x}\right),$$

$$\cos(2n+1)\Theta = \tfrac{1}{2}\left(x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

(Cyklometrie in d. Z. 17.); also

$$x^{2n+1}+\frac{1}{x^{2n+1}} =$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{1+\frac{(n+1)n}{1.2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+\ldots\right\}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit

$$f\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{x},$$

und integrirt zwischen den Gränzen 0 und ∞; so erhält man mittelst des Obigen sogleich die zu beweisende Gleichung. Der Coefficient von A_{2m} in dieser Gleichung ist

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(2m)} = \frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots(n-m)},$$

wie leicht erhellet, wenn man über Kreuz multiplicirt.

Sey z. B.

$$f(x) = e^{-sx} ,$$

wo s positiv ist; so ist nach (30.)

$$A_0 = \int_0^\infty e^{-sx^2}\, \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{}}$$

und nach (38.)

$$A_{2m} = \int_0^\infty x^{2m} e^{-sx^2}\, \partial x = \frac{1.3.}{2}$$

Ferner ist

$$B_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \partial x = e^{2s} \int_0$$

Also nach (69.):

$$(70.) \int_0 x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right.}$$

$$\frac{e^{-2s}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}} \Big\{ 1 + \frac{(n+1)n}{2} \cdot \left(\frac{1}{2s}\right) + \frac{(n+2)(n+}{2.}$$

$$+ \frac{(n+3)(n+}{2.4}$$

$$+ \ldots .$$

eine ebenfalls sehr merkwürdige Formel.

Für

$$f(x^2) = e^{-sx^2} \cos tx$$

wo s wieder positiv seyn muß, ist nach (

$$A_{2m} = \int_0^\infty x^{2m} e^{-sx^2} \cos tx . \partial x = (-1)$$

$$A_0 = \int_0^\infty e^{-sx^2} \cos tx . \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}} e^{-}$$

Ferner ist

$$B_{2n} = \int^\infty x^{2n} e^{-s\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \cos t \left(x - \frac{1}{x}\right.$$

$$= e^{2s} \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Folglich nach (69.):

$$(71.) \int_0^\infty x^{2n} e^{-s\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \cos t \left(x - \right.$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}} e^{-2s} \Big\{ e^{-\frac{t^2}{4s}} - \frac{(n+1)n}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 e^{-\frac{t^2}{4s}}}{\partial t^2}$$

$$+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-}{1.2.3.4}$$

$$- \frac{(n+3)(n+2)\ldots(n}{1.2.3.4.5.}$$

$$+ \ldots \ldots$$

Man übersieht leicht, daß der von Cauchy gefundene Satz eine neue reiche Quelle bestimmter Integrale ist, die auf anderen Wegen sich nicht so leicht ergeben würden. Wir wollen nun einige besonders merkwürdige und wichtige bestimmte Integrale etwas ausführlicher betrachten.

27. Zuerst beschäftigen wir uns mit den Integralen, welche Legendre aus leicht zu begreifenden Gründen Euler'sche Integrale genannt hat.

Euler'sche Integrale der ersten Art nennt Legendre die in dem Ausdruck

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

wo n, p, q ganze positive Zahlen bezeichnen, enthaltenen bestimmten Integrale.

Euler'sche Integrale der zweiten Art heißen die in dem Ausdruck

$$\int_0^1 \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1},$$

wo l immer den natürlichen Logarithmus bezeichnen soll, und a als positiv angenommen wird, sonst jede rationale Größe bezeichnen kann, enthaltenen bestimmten Integrale.

Euler und Legendre haben für diese Integrale ihrer Wichtigkeit wegen besondere Bezeichnungen eingeführt. Dem Letztern folgend setzen wir

$$\int_0^1 \frac{x_{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right), \int_0^1 \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} = \Gamma(a).$$

28. Beide Arten von Integralen gestatten eine Transformation. Setzen wir nämlich in den Integralen der ersten Art

$$x^n = z,\ nx^{n-1}\partial x = \partial z,\ x = z^{\frac{1}{n}};$$

so wird

$$x^{p-1}\partial x = \frac{1}{n} z^{\frac{p}{n}-1}\partial z,\ \sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}} = (1-z)^{1-\frac{q}{n}}.$$

Folglich, weil $z=0$ für $x=0$, $z=1$ für $x=1$ ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 z^{\frac{p}{n}-1}\partial z(1-z)^{\frac{q}{n}-1},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(72.)\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{p}{n}-1}\partial x(1-x)^{\frac{q}{n}-1}.$$

Unter der Voraussetzung, daß p und q positiv, sonst beliebige rationale Größen sind, setzt Legendre

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = (p, q),$$

so daß also in dieser und der in (27.) angegebenen Bezeichnung immer

$$(73.)\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$$

ist, die durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ bezeichneten bestimmten Integrale folglich immer auf die durch (p, q) bezeichneten gebracht werden können.

Ferner setze man in den Integralen der zweiten Art

$$l\frac{1}{x} = z,\ \frac{1}{x} = e^z,\ x = e^{-z},\ \partial x = -e^{-z}\partial z;$$

so ist

$$\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} = -z^{a-1}e^{-z}\partial z.$$

Für $x = 0$ und $x = 1$ ist respective $z = \infty$, $z = 0$. Also ist

$$\int_0^1 \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} = -\int_\infty^0 z^{a-1}e^{-z}\partial z,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(74.)\quad \int_0^1 \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1} = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\partial x = \Gamma(a).$$

29. Besonders merkwürdig und wichtig ist es, daß die Euler'schen Integrale der ersten Art, oder vielmehr die durch (p, q) bezeichneten Größen, immer durch Euler'sche Integrale der zweiten Art ausgedrückt werden können, welches wir jetzt, nach einigen nöthigen Vorbereitungen, zunächst beweisen wollen. Setzen wir nämlich

$$y = x\left(l\frac{1}{x}\right)^a;$$

so ist:

$$\partial y = \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^a - a\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}.$$

Folglich

$$y = \int\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^a - a\int\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}.$$

Für $x = 0$ ist aber $y = 0$, und auch, weil a positiv ist, $y = 0$ für $x = 1$. Also

$$0 = \int_0^1 \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^a - a\int_0^1 \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1},$$

$$\int_0^1 \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^a = a\int_0^1 \partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}.$$

Dies giebt in der eingeführten Bezeichnung die merkwürdige und wichtige Relation

$$(75.)\quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Für $a=1$ ist $\Gamma(1) = \int_0^1 \partial x = 1$, und man erhält also, wenn a eine ganze Zahl ist, durch mehrfache Anwendung vorstehender Relation sogleich den merkwürdigen Ausdruck:

$$(76.)\quad \Gamma(a) = 1.2.3.4 \ldots (a-1).$$

30. Wir wollen jetzt

$$y = x^p(1-x)^{q-1}$$

setzen, und annehmen, daß q eine ganze Zahl sey. Durch Differentiation erhält man:

$$\begin{aligned}\partial y &= px^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} - (q-1)x^p\partial x(1-x)^{q-2}\\ &= px^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} + (q-1)x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1}\\ &\quad - (q-1)x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} - (q-1)x^p\partial x(1-x)^{q-2}\\ &= (p+q-1)x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} - (q-1)x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-2}\end{aligned}$$

$$y = (p+q-1)\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} - (q-1)\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-2}.$$

Für $x=0$ ist $y=0$, und auch für $x=1$ ist $y=0$, weil $q-1$ positiv ist. Also ist

$$0 = (p+q-1)\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} - (q-1)\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-2}$$

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = \frac{q-1}{p+q-1}\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-2}.$$

Durch mehrfache Anwendung dieser Relation erhält man:

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = \frac{(q-1)(q-2)\ldots 1}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+1)}\int_0^1 x^{p-1}\partial x.$$

Aber $\int x^{p-1}\partial x = \frac{1}{p}x^p$. Also, weil p positiv ist, $\int_0^1 x^{p-1}\partial x = \frac{1}{p}$. Folglich nach der eingeführten Bezeichnung, wenn q eine ganze Zahl ist:

$$(77.)\quad (p, q) = \frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{p}.$$

Für $1-x=z$ ist $x=1-z$, $\partial x = -\partial z$. Also

$$\int x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = -\int z^{q-1}\partial z(1-z)^{p-1}.$$

Für $x=0$ ist $z=1$, für $x=1$ ist $z=0$. Also

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = -\int_1^0 z^{q-1}\partial z(1-z)^{p-1},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = \int_0^1 x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-1}.$$

Ist nun p eine ganze Zahl; so ist nach

$$\int_0^1 x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-1} = \frac{(p-1)(p}{(p+q-1)(p+}$$

Also, wenn p eine ganze Zahl ist:

$$(78.)\quad (p, q) = \frac{(p-1)(p-}{(p+q-1)(p+q}$$

Daß die beiden in (77.) und (78.) ge ander gleich sind, erhellet leicht, wenn plicirt.

Ist q eine ganze Zahl, so folgt au

$$\Gamma(p+q) = (p+q-1)(p+q-2$$

und nach (76.) ist $\Gamma(q) = 1.2.3\ldots(q$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(q-1)(q-2)}{(p+q-1)(p+q-2}$$

Folglich überhaupt, wenn eine der beide ganze Zahl ist:

$$(79.)\quad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Nun ist aber nach dem binomischen Lehr

$$x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1}$$

$$x^{p-1}\partial x - \frac{q-1}{1}x^p\partial x + \frac{(q-1)(q-2}{1.2}$$

Folglich, da p eine positive Größe ist:

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{q-1}{1}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{p+2} -$$

$$+ \ .$$

eine Reihe, welche in's Unendliche fortläu Zahl ist. In diese Reihe muß sich also

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

wo wir uns unter den mit Γ bezeichnete mein die entsprechenden Euler'schen Inte denken, entwickeln lassen, wenn z. B.

Denken wir uns aber nun die Entwickelu

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

für jedes p und q ganz allgemein ausgefü so lange p und q ganz allgemeine Sym Entwickelung in dieser Rücksicht ganz a wird, die Form der allgemeinen Reihe der Reihe für einen besondern Fall vers

lange nämlich, welches wiederholt erinnert werden muß, p und q ganz allgemeine Symbole bleiben, auch in dem in Rede stehenden besondern Falle. Man sieht also, daß auch für jedes positive p und q sich

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

in die obige Reihe entwickeln lassen muß, und daß folglich die allgemeinen Entwickelungen von

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1} = (p, q)$$

für jedes positive p und q, und

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

zu denselben Reihen führen müssen, welches uns berechtigt, für jedes positive p und q zu setzen:

$$(80.)\quad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Mittelst dieser Relation kann also immer das mit (p, q) bezeichnete bestimmte Integral durch Euler'sche Integrale der zweiten Art ausgedrückt werden. Auch lassen sich die Euler'schen Integrale der ersten Art sogleich auf Euler'sche Integrale der zweiten Art bringen, da aus (73.) und (80.) folgt:

$$(81.)\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

Die Entwickelung der Eigenschaften der Euler'schen Integrale kommt also lediglich auf die nähere Betrachtung der Euler'schen Integrale der zweiten Art zurück.

31. Man kann aber auch umgekehrt die Euler'schen Integrale der zweiten Art durch Euler'sche Integrale der ersten Art ausdrücken. Aus (81.) erhält man nämlich:

$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)},$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)},$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},$$

. . . .

$$\left(\frac{1}{n-2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)}.$$

Multiplicirt man die ersten $a-1$ Glieder in einander; so erhält man:

$$(\tfrac{1}{1})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{4})\ldots\left(\frac{1}{a-1}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^a}{n^{a-1}\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)},$$

woraus:

$$(82.)\quad \Gamma\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^a}{n^{a-1}(\frac{1}{1})(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})(\frac{1}{4})\ldots\left(\frac{1}{a-1}\right)}.$$

Multiplicirt man alle Glieder obiger Reihe in einander; so erhält man, weil nach (29.) $\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)=\Gamma(1)=1$ ist:

$$(\tfrac{1}{1})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{4})\ldots\left(\frac{1}{n-1}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n}{n^{n-1}},$$

$$(83.)\quad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=n\sqrt[n]{\left\{\frac{1}{n}(\tfrac{1}{1})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{4})\ldots\left(\frac{1}{n-1}\right)\right\}}.$$

Folglich nach (82.):

$$(84.)\quad \Gamma\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{n\left\{\frac{1}{n}(\frac{1}{1})(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})\ldots\left(\frac{1}{n-1}\right)\right\}^{\frac{a}{n}}}{(\frac{1}{1})(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})(\frac{1}{4})\ldots\left(\frac{1}{a-1}\right)}.$$

Die Euler'schen Integrale beider Arten lassen sich also wechselseitig auf einander reduciren.

32. Auch das Integral

$$\int x^{m-1}\partial x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^n$$

kann immer durch bloße Euler'sche Integrale der zweiten Art ausgedrückt werden. Durch partikuläre Integration erhält man nämlich:

$$\int x^{m-1}\partial x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^n=\frac{x^m}{m}\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^n+\frac{n}{m}\int x^{m-1}\partial x\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

Folglich, wenn nur n positiv ist:

$$\int_0^1 x^{m-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^n=\frac{n}{m}\int_0^1 x^{m-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

Ist nun n eine ganze Zahl; so erhält man durch mehrfache Anwendung dieser Relation:

$$(85.)\quad \int_0^1 x^{m-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{m^{n+1}}.$$

Ist aber n keine ganze Zahl, so setze man $x^m=z$, $mx^{m-1}\partial x=\partial z$. Also

$$x^{m-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{m}\partial z\left(l\frac{1}{\sqrt[m]{z}}\right)=\frac{1}{m^{n+1}}\partial z\left(l\frac{1}{z}\right)^n:$$

Folglich, weil $z=0$ für $x=0$, wenn nur m positiv ist, $z=1$ für $x=1$:

$$(86.)\quad \int_0^1 x^{m-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{m^{n+1}}\int_0^1\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^n,$$

so daß es also auch hier nur auf die Betrachtung der Euler'schen Integrale der zweiten Art ankommt.

33. Die Euler'schen Integrale der zweiten Art haben mehrere merkwürdige Eigenschaften, von denen wir jetzt die wichtigsten beweisen wollen. Für $a<1$ setze man $p=a$, $q=1-a$; so ist

$$x^{p-1}\partial x(1-x)^{q-1}=x^{a-1}\partial x(1-x)^{-a},$$

$$(a,1-a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}\partial x}{(1-x)^a}.$$

Sey nun

$$1-x=\frac{x}{z},\ z=\frac{x}{1-x},\ x=\frac{z}{1+z},\ 1-x=\frac{1}{1+z};$$

so ist $z=0$ für $x=0$, $z=\infty$ für $x=1$. Also

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}\partial x}{(1-x)^a}=\int_0^\infty\frac{z^{a-1}\partial z}{1+z}.$$

Aber nach (35.), da $a<1$ ist:

$$\int_0^\infty\frac{z^{a-1}\partial z}{1+z}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Also

$$(87.)\quad (a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Da nun nach (80.)

$$(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}=\Gamma(a)\Gamma(1-a)$$

ist; so ist für jedes positive a, welches <1 ist:

$$(88.)\quad \Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Setzt man $a=\frac{1}{2}$, so ist

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{\pi}{\sin \frac{1}{2}\pi} = \pi .$$

Also nach (88.)

$$(89.) \quad \left\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \pi ,$$

oder

$$(90.) \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} ,$$

da $\Gamma(\frac{1}{2})$ offenbar positiv ist.

Nach (75.) ist

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right),$$

$$= \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right),$$

$$= \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}.\frac{2n-5}{2}\Gamma\left(\frac{2n-5}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}.\frac{2n-5}{2}\cdots\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

d. i. nach (90.)

$$(91.) \quad \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}.\sqrt{\pi} .$$

Hieraus kann man auch einen neuen Beweis der schon in (24.) und (38.) gefundenen merkwürdigen bestimmten Integrale ableiten. Setzt man nämlich $e^{-sx^2} = z$; so ist

$$-2se^{-sx^2}x\partial x = \partial z .$$

Folglich

$$x^{2n}e^{-sx^2}\partial x = -x^{2n-1}.\frac{\partial z}{2s} .$$

Aber

$$-sx^2 = lz,\ x^2 = \frac{1}{s}l\frac{1}{z},\ x = \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(l\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Folglich

$$x^{2n}e^{-sx^2}\partial x = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\left(l\frac{1}{z}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\partial z .$$

Für $x = 0$ ist $z = 1$, für $x = \infty$ dagegen ist $z = 0$, wobei wir voraussetzen, daß s positiv sey. Also ist

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-sx^2}\partial x$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\int_1^0\left(l\frac{1}{z}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\partial z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\int_0^1\left(l\frac{1}{z}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\partial z,$$

d. i. nach der eingeführten Bezeichnung:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-sx^2} \partial x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2^{n+1} s^{n+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi} \quad (91.)$$

übereinstimmend mit (38.). Für $n = 0$ wird

$$\int_0^\infty e^{-sx^2} \partial x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \quad (90.),$$

und für $s = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \partial x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

übereinstimmend mit (24.).

34. Nach (88.) ist:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Also durch Multiplication:

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Nach dem Cotesischen Lehrsatze (s. auch d. Art. Goniometrie in diesen Zusätzen) ist nun, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\begin{aligned} x^n - a^n = (x^2 - a^2)&\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2n}{\pi} + a^2\right) \\ &\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right) \\ &\left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right). \end{aligned}$$

Also, wenn man mit $x^2 - a^2$ dividirt:

$$x^{n-2} + x^{n-4}a^2 + \ldots + x^2 a^{n-4} + a^{n-2}$$

$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right)$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right).$$

Folglich, für $x = a = 1$:

$$\frac{n}{2} = 2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1 - \cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right),$$

oder, wenn wir $\frac{n}{2} = \alpha$, $n = 2\alpha$ setzen:

$$\alpha = 2^{\alpha-1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\alpha}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi}{\alpha}\right)\ldots\left(1 - \cos\frac{(\alpha-1)\pi}{\alpha}\right)$$

$$= 2^{2(\alpha-1)}\left\{\sin\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{3}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2$$

$$\sqrt{\alpha} = 2^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{3}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Aber allgemein

$$\sin\frac{x\pi}{\alpha} = 2\sin\left(\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-x}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Also

$$\sin\frac{\pi}{\alpha}\sin\frac{2\pi}{\alpha}\sin\frac{3\pi}{\alpha}\ldots\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{\alpha}$$

$$= 2^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{3}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times\sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-3}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2^{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha}{2^{2(\alpha-1)}} = \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}.$$

Demnach

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},$$

$$(92.)\quad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$$

Ferner ist nach (75.)

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right) = \frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{n+3}{n}\right) = \frac{3}{n}\Gamma\left(\frac{3}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma\left(\frac{2n-1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1.2.3.4\ldots(n-1)}{n^{n-1}}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

d. i. nach (92.):

$$(93.)\ \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{n}\right)..\Gamma\left(\frac{2n-1}{n}\right)=\frac{1.2..(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}},$$

oder, wie Lacroix (Traité du Calc. diff. et int. T. III. p. 480.) die nach seiner Angabe von Euler gefundene Formel darstellt:

$$(94.)\ \int_0^1\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}.\int_0^1\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}}.\int_0^1\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$=\frac{1.2..(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$$

35. Bevor wir zu andern merkwürdigen Relationen übergehen, wollen wir, um den Zusammenhang der Darstellung nicht durch Hinweisung auf andere Artikel dieses Wörterbuchs zu unterbrechen, einige Sätze aus der Integralrechnung kurz erläutern. Zunächst bemerken wir, daß, wenn die endlichen Integrale, wie gewöhnlich, durch Σ bezeichnet werden, immer

$$\Sigma\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial\Sigma y}{\partial x},$$

d. h. $\frac{\partial\Sigma y}{\partial x}$ ein Werth von $\Sigma\frac{\partial y}{\partial x}$ ist. Es ist nämlich nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\Delta\frac{\partial\Sigma y}{\partial x}=\frac{\partial^2\Sigma y}{\partial x^2}.\frac{\Delta x}{1}+\frac{\partial^3\Sigma y}{\partial x^3}.\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots\ldots,$$

und eben so:

$$\Delta\Sigma y=\frac{\partial\Sigma y}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1}+\frac{\partial^2\Sigma y}{\partial x^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots\ldots,$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial\Delta\Sigma y}{\partial x}=\frac{\partial^2\Sigma y}{\partial x^2}.\frac{\Delta x}{1}+\frac{\partial^3\Sigma y}{\partial x^3}.\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots.$$

Also

$$\Delta\frac{\partial\Sigma y}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\Sigma y}{\partial x}.$$

Aber nach dem bekannten Begriffe eines endlichen Integrals $\Delta\Sigma y=y$. Also

$$\Delta\frac{\partial\Sigma y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich:

$$\frac{\partial \Sigma y}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial y}{\partial x},$$

oder allgemeiner:

$$\Sigma \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \Sigma y}{\partial x} + C.$$

Da nun bekanntlich

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{h}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

ist, wenn wir $\Delta x = h$ setzen; so ist

$$y = \frac{h}{1} \Sigma \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots.$$

und folglich für

$$z = \frac{\partial y}{\partial x},\ y = \int z \partial x:$$

$$\int z \partial x = \frac{h}{1} \Sigma z + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\Sigma z = \frac{1}{h} \int z \partial x - \alpha h \Sigma \frac{\partial z}{\partial x} - \beta h^2 \Sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \gamma h^3 \Sigma \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \ldots.,$$

wenn wir die numerischen Coefficienten der Kürze wegen durch α, β, γ, δ, ... bezeichnen, und die Beifügung einer Constante, welche sich von selbst versteht, unterlassen. Durch Differentiation dieser Reihen erhält man mittelst des oben bewiesenen Satzes:

$$\Sigma \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{h} \cdot z - \alpha h \Sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \beta h^2 \Sigma \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \gamma h^3 \Sigma \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \ldots$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha h \Sigma \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \beta h^2 \Sigma \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \gamma h^3 \Sigma \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} - \ldots$$

$$\Sigma \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha h \Sigma \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \beta h^2 \Sigma \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} - \gamma h^3 \Sigma \frac{\partial^6 z}{\partial x^6} - \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

Durch Substitution in obige Reihe ergiebt sich hieraus eine Reihe von folgender Form:

$$\Sigma z = \frac{1}{h} \int z \partial x + Az + Bh \frac{\partial z}{\partial x} + Ch^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Dh^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \ldots$$

wo A, B, C, D, ... gewisse numerische Coefficienten bezeichnen, die sich auf folgende Art bestimmen lassen. Da nämlich

$$\int e^x \partial x = e^x,\ \frac{\partial^n e^x}{\partial x^n} = e^x$$

ist; so ist

$$\Sigma e^x = \frac{1}{h} e^x + Ae^x + Bhe^x + Ch^2 e^x + Dh^3 e^x + \ldots.$$

Aber auch

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1},$$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Differenz nimmt, da

$$\Delta\left(\frac{e^x}{e^h-1}\right) = \frac{\Delta e^x}{e^h-1} = \frac{e^{x+h}-e^x}{e^h-1} = e^x$$

ist. Da nun beide Ausdrücke von Σe^x in allen Gliedern e^x enthalten, oder beide Ausdrücke für $e^x = 0$ verschwinden; so ist

$$\frac{e^x}{e^h-1} = \frac{1}{h}e^x + Ae^x + Bhe^x + Ch^2e^x + Dh^3e^x + \ldots$$

indem die beizufügende Constante in diesem Falle $= 0$ ist. Also

$$\frac{1}{e^h-1} = \frac{1}{h} + A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots.,$$

so daß man folglich die numerischen Coefficienten A, B, C, D, ... erhält, wenn man die Function $(e^h-1)^{-1}$ nach Potenzen von h in eine Reihe entwickelt. Diese Entwickelung ist aber in dem Art. Bernoullische Zahlen (6.) i. d. Z. gegeben, und das Gesetz der Coefficienten ist dort allgemein bestimmt worden. Setzen wir nun, wie a. a. O.,

$$\frac{1}{e^h-1} = \frac{1}{h}A_0 + A_1 + A_2h + A_3h^2 + A_4h^3 + A_5h^4 + \ldots,$$

so ist a. a. O. (8.) gezeigt worden, daß

$$A_3 = A_5 = A_7 = A_9 = \ldots. = 0,$$

und folglich

$$\frac{1}{e^h-1} = \frac{1}{h} + A_1 + A_2h + A_4h^3 + A_6h^5 + \ldots.$$

ist. Vergleicht man aber den a. a. O. in (6.) gefundenen Ausdruck mit dem allgemeinen Ausdruck der nten Bernoullischen Zahl $\overset{2n-1}{B}$ in (9.); so findet man leicht:

$$\frac{1.2\ldots(2n-1)(2^{2n}-1)2^{2n}A_{2n}}{(-1)^{2n}} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\overset{2n-1}{B}}{2n(-1)^{n-1}}$$

$$A_{2n} = (-1)^{n+1}.\frac{\overset{2n-1}{B}}{1.2.3\ldots2n}.$$

A_1 ist, wie man leicht findet, $= -\frac{1}{2}$. Aus allem Bisherigen ergiebt sich:

$$A = A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$B = A_2 = \frac{\overset{1}{B}}{1.2}$$

$$C = A_3 = 0$$

$$D = A_4 = -\frac{\overset{3}{B}}{1.2.3.4}$$

$$E = A_5 = 0$$

$$F = A_6 = \frac{\overset{5}{B}}{1.2.3.4.5.6}$$

$$G = A_7 = 0$$

u. s. f. u. s. f.

Also

$$\Sigma z = \frac{1}{h}\int z\partial x - \tfrac{1}{2}z + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}h\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\overset{3}{B}}{1.2.3.4}h^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$$+ \frac{\overset{5}{B}}{1.2.3..6}h^5\frac{\partial^5 z}{\partial x^5} - \ldots\ldots$$

Ist nun $z = \varphi(x)$ das allgemeine Glied einer Reihe, deren Summe in Bezug auf ihre x ersten Glieder wir durch S_x bezeichnen wollen; so ist

$$S_x = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(x-1) + \varphi(x),$$

$$S_{x-1} = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(x-1),$$

$$S_x - S_{x-1} = \varphi(x).$$

Folglich, wenn wir $S_{x-1} = f(x)$ setzen, für $h = 1$:

$$\Delta S_{x-1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = S_x - S_{x-1} = \varphi(x),$$

und umgekehrt

$$S_{x-1} = \Sigma\varphi(x) + \text{Const},$$

$$S_x = \Sigma\varphi(x) + \varphi(x) + \text{Const},$$

$$= \Sigma z + z + \text{Const}.$$

Also, $S_x = Sz$ gesetzt:

$$Sz = \int z\partial x + \tfrac{1}{2}z + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}.\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\overset{3}{B}}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$$+ \frac{\overset{5}{B}}{1\ldots.6}.\frac{\partial^5 z}{\partial x^5} - \ldots\ldots.$$

Die beizufügende Constante ist schon in $\int z\partial x$ begriffen.

36. Für $z = lx$ ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{1.2}{x^3},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\frac{1.2.3}{x^4}, \quad \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} = \frac{1.2.3.4}{x^5}, \text{ u. s. f.}$$

$$\int \partial x\, lx = x\,lx - \int \partial x = x\,lx - x.$$

Also

$$Slx = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx$$

$$= C + xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} - \frac{\overset{7}{B}}{7.8x^7} + \ldots$$

Zur Bestimmung der Constante gelangt man auf folgende Art. Nach (8.) ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots.(2x-2)2x}{1.3.3.5.5.7.7.9..(2x-1)(2x-1)},$$

desto genauer, je größer x ist. Also

$$l\pi - l2 = \left\{ \begin{array}{l} 2l2 + 2l4 + 2l6 + .. + 2l(2x-2) + l2x \\ - l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - \ldots - 2l(2x-1) \end{array} \right.$$

desto genauer, je größer x ist, völlig genau, für $x = \infty$. Für $x = \infty$ ist aber nach dem Obigen:

$$Slx = C - x + (x + \tfrac{1}{2})lx\,,$$
$$Sl2x = C - 2x + (2x + \tfrac{1}{2})l2x\,,$$

wo nämlich

$$Sl2x = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l2x$$

ist. Auch ist

$$l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots + l2x$$
$$= l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx + xl2$$
$$= Slx + xl2\,.$$

Folglich

$$Sl2x = C - 2x + (2x + \tfrac{1}{2})l2x$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} l1 + l3 + l5 + l7 + \ldots + l(2x-1) \\ + l2 + l4 + l6 + l8 \ldots + l2x \end{array} \right.$$
$$= l1 + l3 + l5 + \ldots + l(2x-1) + Slx + xl2$$
$$= l1 + l3 + l5 + l7 + \ldots + l(2x-1)$$
$$+ C - x + (x + \tfrac{1}{2})lx + xl2\,.$$

$$l1 + l3 + l5 + l7 + \ldots + l(2x-1)$$
$$= -x + xlx + (x + \tfrac{1}{2})l2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2l2 + 2l4 + 2l6 + \ldots + 2l(2x-2) + 2l2x \\ - l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - \ldots - 2l(2x-1) \end{array} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} 2C - 2x + (2x+1)lx + 2xl2 + 2x \\ - 2xlx - (2x+1)l2 \end{array} \right.$$
$$= 2C + lx - l2\,.$$

Also, wenn man auf beiden Seiten l2x abzieht, nach dem Vorhergehenden

$$l\pi - l2 = 2C + lx - l2 - l2x$$
$$= 2C + lx - l2 - lx - l2 = 2C - 2l2$$
$$C = \tfrac{1}{2}(l\pi + l2) = \tfrac{1}{2}l2\pi = l\sqrt{2\pi}\,.$$

Folglich

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx$$
$$= l\sqrt{2\pi} + xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \ldots$$
$$= l\sqrt{2\pi} + (x + \tfrac{1}{2})lx - x + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \ldots$$
$$= xlx + \tfrac{1}{2}l(2\pi x) - x + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \ldots$$

37. Nach (76.) ist

$$\Gamma(x+1) = 1.2.3.4\ldots\ldots x$$

$$l\Gamma(x+1) = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx$$

$$= xlx + \tfrac{1}{2}l(2\pi x) - x + \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \ldots$$

Setzen wir

$$l(1+\varepsilon) = \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} - \ldots.$$

so ist klar, daß $l(1+\varepsilon)$ sich der Null, d. i. ε sich der Null desto mehr nähert, je größer x ist. Es ist folglich

$$l\Gamma(x+1) = xlx + l(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}lx - x + l(1+\varepsilon)$$

$$= lx^{x+\frac{1}{2}} + l(2\pi)^{\frac{1}{2}} + le^{-x} + l(1+\varepsilon)$$

$$= l\left\{(2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\varepsilon)\right\},$$

oder

$$\Gamma(x+1) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\varepsilon),$$

wo ε eine Größe ist, die sich der Null desto mehr nähert, je größer x ist. Da nach (75.)

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

ist; so ist

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\varepsilon),$$

eine Gleichung, welche zuerst von Laplace gefunden worden ist. Diese Gleichung ist hier allerdings nur für den Fall bewiesen worden, wenn x eine ganze Zahl ist. Da aber die Function auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine stetige Function von x ist; so erhellet leicht die Richtigkeit obiger Gleichung für alle Werthe von x. Wir haben also für jedes positive x:

$$(95.)\quad \begin{cases} \Gamma(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\varepsilon), \\ \Gamma(x+1) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}(1+\varepsilon). \end{cases}$$

Auch Legendre hat diese Formeln bewiesen, in den Exercices de calcul intégral. T. I. p. 290.

38. Aus diesen Formeln läßt sich nun noch eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Euler'schen Integrale der zweiten Art ableiten. Es ist nämlich immer

$$(96.)\quad \begin{cases} n^{nx}\dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{\Gamma(nx)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}, \\ \Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right) = \Gamma(nx).(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}. \end{cases}$$

Nach (75.) ist

$$n^{n(x+1)}.\frac{\Gamma(x+1)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x+1\right)..\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x+1\right)}{\Gamma\{n(x+1)\}}$$

$$=n^{n(x+1)}.\frac{\frac{nx}{n}.\frac{nx+1}{n}..\frac{nx+n-1}{n}\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)..\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{(nx+n-1)(nx+n-2)\ldots nx\Gamma(nx)}$$

$$=n^{nx}.\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{\Gamma(nx)},$$

so daß sich also diese letztere Function nicht ändert, wenn man $x+1$ für x setzt, und daher überhaupt ungeändert bleibt, wie sehr man auch x wachsen lassen mag. Kann man also den Werth dieser Function für $x=\infty$ bestimmen, so wird ihr Werth überhaupt bestimmt seyn. Für $x=\infty$ ist aber $s=0$ in (95.). Also für $x=\infty$:

$$\Gamma(x)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

Folglich

$$\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{2}{n}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}}\ldots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}$$

$$\times e^{-nx-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)},$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{2}{n}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}}\ldots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}$$

$$\times e^{-nx-\frac{n-1}{2}},$$

$$\Gamma(nx)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{nx-\frac{1}{2}}x^{nx-\frac{1}{2}}e^{-nx}$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{nx-\frac{1}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}x^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}}\ldots x^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}e^{-nx},$$

weil

$$(x-\tfrac{1}{2})+\left(x+\frac{1}{n}-\tfrac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{2}{n}-\tfrac{1}{2}\right)..+\left(x+\frac{n-1}{n}-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$=nx-\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2}=nx-\tfrac{1}{2}$$

ist. Folglich, wenn man die einzelnen Factoren durch einander dividirt:

$$n^{nx}.\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{\Gamma(nx)}$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{n-1}{2}}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}}..\left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$Q=\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}}\cdot\cdot\left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}};$$

so ist:

$$\begin{aligned}lQ = \; & \left(x+\frac{1}{n}-\tfrac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{nx}\right)\\ & +\left(x+\frac{2}{n}-\tfrac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{2}{nx}\right)\\ & +\left(x+\frac{3}{n}-\tfrac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{3}{nx}\right)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\left(x+\frac{n-1}{n}-\tfrac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{n-1}{nx}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \; & \left(x+\frac{1}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{nx}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{nx}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{nx}\right)^3-\ldots\right\}\\ & +\left(x+\frac{2}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{nx}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{nx}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{nx}\right)^3-\ldots\right\}\\ & +\left(x+\frac{3}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\left\{\frac{3}{nx}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{nx}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{3}{nx}\right)^3-\ldots\right\}\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\left(x+\frac{n-1}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\left\{\frac{n-1}{nx}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{n-1}{nx}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{n-1}{nx}\right)^3-\ldots\right\}.\end{aligned}$$

Multiplicirt man wirklich; so erhält man einen Ausdruck von folgender Form:

$$lQ=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\ldots$$

Folglich, weil $x=\infty$ ist:

$$lQ=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2},$$

$$Q=e^{\frac{n-1}{2}}.$$

Also, weil $e^{\frac{n-1}{2}}.e^{-\frac{n-1}{2}}=1$ ist, für $x=\infty$, d. i. nach dem Obigen für jedes x:

$$n^{nx}.\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{\Gamma(nx)}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}},$$

w. z. b. w. Legendre hat a. a. O. T. II. p. 23. diese merkwürdige Formel auf ganz anderm Wege bewiesen. Der obige sinnreiche Beweis ist von Cauchy entlehnt aus dessen Exercices de Mathématiques. 15me Livraison. Paris. 1827. p. 91. 92. Man vergleiche hier die Formel (92.), welche auf ganz andere Weise gefunden worden ist. Die bisher bewiesenen Formeln ent-

halten die wichtigsten und merkwürdigsten Eigenschaften der Euler'schen Integrale der zweiten Art.

39. Die Theorie der Euler'schen Integrale der ersten Art ist, wie wir oben gesehen haben, in der Theorie der Euler'schen Integrale der zweiten Art enthalten, und es wird daher hinreichend seyn, in Bezug auf jene hier nur einige Relationen aufzustellen. Nach (80.) ist

$$(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Da sich in dem zweiten Theile dieser Gleichung die Buchstaben versetzen lassen; so erhält man:

$$(97.)\quad (p, q) = (q, p).$$

Nach (73.) ist

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{q}{n}, \frac{p}{n}\right).$$

Folglich nach (97.):

$$(98.)\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right).$$

Ferner ist nach (80.):

$$(p+q, r) = \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

Folglich durch Multiplication:

$$(99.)\quad (p, q)(p+q, r) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

Also, weil in dem zweiten Theile dieser Gleichung die Buchstaben sich versetzen lassen:

$$(100.)\quad (p, q)(p+q, r) = (p, r)(p+r, q) = (q, r)(q+r, p).$$

Aber nach (73.):

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)\left(\frac{p+q}{n}, \frac{r}{n}\right),$$

$$\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}\right)\left(\frac{p+r}{n}, \frac{q}{n}\right),$$

$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{n}, \frac{r}{n}\right)\left(\frac{q+r}{n}, \frac{p}{n}\right).$$

Also nach (100.):

$$(101.)\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right).$$

Nach (75.) ist:

$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1),$$

$$\Gamma(p+q) = (p+q-1)\,\Gamma(p+q-1),$$

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{p-1}{p+q-1}\cdot\frac{\Gamma(p-1)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q-1)},$$

$$(102.)\quad (p, q) = \frac{p-1}{p+q-1}(p-1, q),\quad (80.)$$

$$\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{n}, \frac{q}{n}\right),$$

d. i., wenn man nur noch auf beiden Seiten mit $\frac{1}{n}$ multiplicirt, nach (73.):

$$(103.)\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right).$$

Für $q = n$ ist nach (27.)

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 x^{p-1}\partial x = \frac{1}{p}.$$

Also

$$(104.)\quad \left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}.$$

Nach (87.) ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{p}{n}, \frac{n-p}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}},$$

d. i. nach (73.), wenn wir ein für alle Mal $\frac{1}{n}\pi = \Theta$ setzen:

$$(105.)\quad \left(\frac{p}{n-p}\right) = \frac{\Theta}{\sin p\Theta}.$$

Mittelst der beiden letzten Formeln erhält man den genauen Werth von $\left(\frac{p}{q}\right)$ in allen den Fällen, wo eine der beiden Größen p, q, oder deren Summe $= n$ ist. Man hat hierbei nur noch zu merken, daß nach (98.) und (104.)

$$(106.)\quad \left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \frac{1}{q}$$

ist.

Wir wollen jetzt einmal voraussetzen, daß der Werth von $\left(\frac{p}{q}\right)$ auch in allen den Fällen bekannt sey, wo $p + q = n - 1$ ist; so ergeben sich neue merkwürdige Reductionsformeln, wobei wir der Kürze wegen

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right) = A_a$$

setzen wollen, wie auch Legendre thut. Es ist also

$$\left(\frac{n-2}{1}\right) = \left(\frac{1}{n-2}\right) = A_1 = A_{n-2},$$

$$\left(\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{2}{n-3}\right) = A_2 = A_{n-3}\,,$$
$$\left(\frac{n-4}{3}\right) = \left(\frac{3}{n-4}\right) = A_3 = A_{n-4}\,,$$
$$\left(\frac{n-5}{4}\right) = \left(\frac{4}{n-5}\right) = A_4 = A_{n-5}\,,$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. allgemein:

$$A_a = A_{n-a-1}\,.$$

Die Anzahl der Werthe der durch A_a bezeichneten Größen ist also $= \frac{n-2}{2}$ oder $= \frac{n-1}{2}$, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Für $n = 9$ z. B. sind diese Größen:

$$A_1 = \left(\tfrac{7}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{7}\right)\,,$$
$$A_2 = \left(\tfrac{6}{2}\right) = \left(\tfrac{2}{6}\right)\,,$$
$$A_3 = \left(\tfrac{5}{3}\right) = \left(\tfrac{3}{5}\right)\,,$$
$$A_4 = \left(\tfrac{4}{4}\right) = \left(\tfrac{4}{4}\right)$$

an der Zahl $= 4$. Für $n = 10$ sind dieselben:

$$A_1 = \left(\tfrac{8}{1}\right) = \left(\tfrac{1}{8}\right)\,,$$
$$A_2 = \left(\tfrac{7}{2}\right) = \left(\tfrac{2}{7}\right)\,,$$
$$A_3 = \left(\tfrac{6}{3}\right) = \left(\tfrac{3}{6}\right)\,,$$
$$A_4 = \left(\tfrac{5}{4}\right) = \left(\tfrac{4}{5}\right)\,,$$

an der Zahl ebenfalls $= 4$.

Sey nun zunächst $p + q < n$. Nach (101.) ist

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) = \left(\frac{n-a-1}{1}\right)\left(\frac{n-a}{a}\right),$$

d. i. nach (98.) und (105.)

$$A_a \cdot \frac{\Theta}{\sin\Theta} = \left(\frac{n-a-1}{1}\right) \cdot \frac{\Theta}{\sin a\Theta}\,,$$

$$(107.)\quad \left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \frac{A_a \sin a\Theta}{\sin\Theta}\,,$$

oder, wenn man a für $n - a - 1$ setzt:

$$(108.)\quad \left(\frac{a}{1}\right) = \frac{A_{n-a-1} \sin(n-a-1)\Theta}{\sin\Theta}\,.$$

Aber nach dem Obigen

$$A_{n-a-1} = A_a\,,$$

und, weil $\Theta = \frac{1}{n}\pi$ ist:

$$\sin(n-a-1)\Theta = \sin\{\pi - (a+1)\Theta\} = \sin(a+1)\Theta\,.$$

Also

$$(109.)\quad \left(\frac{a}{1}\right) = \frac{A_a \sin(a+1)\Theta}{\sin\Theta}.$$

Allgemein ist nach (101.)

$$\left(\frac{n-a-x}{a}\right)\left(\frac{n-x}{1}\right) = \left(\frac{n-a-x}{1}\right)\left(\frac{n-a-x+1}{a}\right),$$

d. i. nach (107.)

$$\left(\frac{n-a-x}{a}\right)\cdot\frac{A_{x-1}\sin(x-1)\Theta}{\sin\Theta} = \frac{A_{a+x-1}\sin(a+x-1)\Theta}{\sin\Theta}\cdot\left(\frac{n-a-x+1}{a}\right),$$

$$\left(\frac{n-a-x}{a}\right) = \frac{A_{a+x-1}\sin(a+x-1)\Theta}{A_{x-1}\sin(x-1)\Theta}\cdot\left(\frac{n-a-x+1}{a}\right).$$

Durch successive Anwendung dieser Relation ergiebt sich

$$\left(\frac{n-\ -x}{a}\right) = \frac{A_{a+x-1}\ \ldots\ A_{a+1}}{A_{x-1}A_{x-2}\ldots A_1}\cdot\frac{\sin(a+x-1)\Theta\ldots\sin(a+1)\Theta}{\sin(x-1)\Theta\ldots\sin 2\Theta\sin\Theta}\cdot\left(\frac{n-a-1}{a}\right).$$

Aber

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right) = A_a.$$

Also

$$(110.)\quad \left(\frac{n-a-x}{a}\right) = \frac{A_a A_{a+1}\ldots A_{a+x-1}}{A_1 A_2 A_3\ \ldots\ A_{x-1}}\cdot\frac{\sin(a+1)\Theta\ldots\sin(a+x-1)\Theta}{\sin\Theta\sin 2\Theta\ \ldots\ \sin(x-1)\Theta}.$$

Mittelst dieser merkwürdigen, von Legendre gefundenen, Gleichung läßt sich also der Werth von $\left(\frac{p}{q}\right)$, wenn $p+q<n$ ist, immer mittelst der durch A_a bezeichneten Größen darstellen.

Sey ferner $p+q>n$. Nach (101.) ist

$$\left(\frac{n-a+x}{a}\right)\left(\frac{n+x}{1}\right) = \left(\frac{n-a+x}{1}\right)\left(\frac{n-a+x+1}{a}\right).$$

Nach (103.), (109.), (107.) ist aber:

$$\left(\frac{n+x}{1}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{1}\right),$$

$$\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{A_x\sin(x+1)\Theta}{\sin\Theta},$$

$$\left(\frac{n-a+x}{1}\right) = \frac{A_{a-x-1}\sin(a-x-1)\Theta}{\sin\Theta}.$$

Dies giebt:

$$\left(\frac{n-a+x+1}{a}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{A_x\sin(x+1)\Theta}{A_{a-x-1}\sin(a-x-1)\Theta}\cdot\left(\frac{n-a+x}{a}\right).$$

Da nun nach (101.), (105.), (106.), (107.)

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{1}\right) = \left(\frac{n-a}{1}\right)\left(\frac{n-a+1}{a}\right),$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right) = \frac{\Theta}{\sin a\Theta}, \left(\frac{n}{1}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{n-a}{1}\right) = \frac{A_{a-1}\sin(a-1)\Theta}{\sin\Theta}$$

ist; so ist

$$\left(\frac{n-a+1}{a}\right) = \frac{\Theta\sin\Theta}{A_{a-1}\sin a\Theta\sin(a-1)\Theta}.$$

Durch successive Anwendung der vorher gefundenen Relation ergiebt sich aber:

$$\left(\frac{n-a+x+1}{a}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\times\frac{A_x A_{x-1} A_{x-2}\ldots A_1}{A_{a-x-1}A_{a-x-2}\ldots A_{a-3}A_{a-2}}$$

$$\times\frac{\sin(x+1)\Theta\sin x\Theta\ldots\sin 2\Theta}{\sin(a-x-1)\Theta\sin(a-x-2)\Theta\ldots\sin(a-2)\Theta}\cdot\left(\frac{n-a+1}{a}\right).$$

Also

$$(111.)\quad \left(\frac{n-a+x+1}{a}\right) =$$

$$\frac{1}{x+1}\cdot\frac{A_1 A_2\ldots A_x}{A_{a-1}A_{a-2}\ldots A_{a-x-1}}\cdot\frac{\Theta\sin\Theta\sin 2\Theta\ldots\sin(x+1)\Theta}{\sin a\Theta\sin(a-1)\Theta\ldots\sin(a-x-1)\Theta},$$

oder

$$(112.)\quad \left(\frac{n-a+x}{a}\right) =$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{A_1 A_2\ldots A_{x-1}}{A_{-a1}A_{a-2}\ldots A_{a-x}}\cdot\frac{\Theta\sin\Theta\sin 2\Theta\ldots\sin x\Theta}{\sin a\Theta\sin(a-1)\Theta\ldots\sin(a-x)\Theta},$$

eine Formel, durch welche $\left(\frac{p}{q}\right)$ unter denselben Voraussetzungen, wie vorher, gefunden werden kann, wenn $p+q>n$ ist. Auch diese Formel hat Legendre gefunden. Die Berechnung der durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ bezeichneten bestimmten Integrale ist also lediglich auf die Berechnung der durch A_a bezeichneten Größen zurückgeführt. Legendre hat in seinen Exercices de calcul intégral. T. I. p. 231. noch verschiedene andere merkwürdige Untersuchungen über diese Größen mitgetheilt. Da es aber doch vorzüglich auf die Werthe der Euler'schen Integrale der zweiten Art ankommt; so wollen wir lieber der Berechnung dieser letztern einen größern Theil des uns zu Gebote stehenden Raums widmen, und uns rücksichtlich der Euler'schen Integrale der ersten Art mit noch ein Paar einfachen Relationen begnügen. Es ist nämlich nach der Gleichung (101.), welche als die Hauptgleichung bei diesen Untersuchungen zu betrachten ist:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{n-p-q}\right) = \left(\frac{p}{n-p-q}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right),$$

$$\left(\frac{p}{n-p-q}\right)\left(\frac{n-q}{n-p}\right) = \left(\frac{p}{n-p}\right)\left(\frac{n}{n-p-q}\right);$$

folglich durch Multiplication:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{n-p}\right)\left(\frac{p+q}{n-p-q}\right) = \left(\frac{p}{n-p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)\left(\frac{n}{n-p-q}\right).$$

Aber nach (98.), (105.), (104.):

$$\left(\frac{n-q}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{n-q}\right),$$

$$\left(\frac{p+q}{n-p-q}\right) = \frac{\Theta}{\sin(p+q)\Theta},$$

$$\left(\frac{n-q}{q}\right) = \left(\frac{q}{n-q}\right) = \frac{\Theta}{\sin q\Theta},$$

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \frac{\Theta}{\sin p\Theta},$$

$$\left(\frac{n}{n-p-q}\right) = \left(\frac{n-p-q}{n}\right) = \frac{1}{n-p-q}.$$

Also

$$(113.)\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n-p}{n-q}\right) = \frac{\Theta\sin(p+q)\Theta}{(n-p-q)\sin p\Theta\sin q\Theta}.$$

Ist also eins der beiden bestimmten Integrale $\left(\frac{p}{q}\right)$, $\left(\frac{n-p}{n-q}\right)$, welche man Complemente von einander nennen kann, bekannt; so ist es auch das andere. Für $p = q = a$ erhält man:

$$(114.)\quad \left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{n-a}{n-a}\right) = \frac{2\Theta\cot a\Theta}{n-2a}.$$

Kennt man also $\left(\frac{a}{a}\right)$ für die Werthe von a, welche nicht $> \frac{1}{2}n$ sind; so kennt man $\left(\frac{a}{a}\right)$ auch für die Fälle, wo $a > \frac{1}{2}n$ ist.

Es ist

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}}.$$

Man setze

$$1-x^n = \frac{z^n}{4x^n},\quad x^n = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-z^n},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $x^n > $ oder $< \frac{1}{2}$ ist. Hieraus findet man leicht:

$$\partial x = \mp \frac{z^{n-1}\partial z}{4x^{n-1}\sqrt{1-x^n}},$$

$$x^{a-1}\partial x = \mp \frac{z^{n-1}\partial z}{4x^{n-a}\sqrt{1-z^n}},$$

$$\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}} = \frac{z^{n-a}}{4^{\frac{n-a}{n}}.x^{n-a}},$$

$$\frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}} = \mp 2^{-\frac{2a}{n}}.\frac{z^{a-1}\partial z}{\sqrt{1-z^n}}.$$

Für $x^n = 0$, $x^n = \frac{1}{2}$, $x^n = 1$ ist respective $z = 0$, $z = 1$, $z = 0$. Also mit Berücksichtigung der obigen Bestimmung wegen der Zeichen:

$$\int_0^{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}} = 2^{-\frac{2a}{n}}\int_0^1 \frac{z^{a-1}\partial z}{\sqrt{1-z^n}},$$

$$\int_{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}} = -2^{-\frac{2a}{n}}\int_1^0 \frac{z^{a-1}\partial z}{\sqrt{1-z^n}}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\int_0^{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}} + \int_{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}},$$

$$-\int_1^0 \frac{z^{a-1}\partial z}{\sqrt{1-z^n}} = \int_0^1 \frac{z^{a-1}\partial z}{\sqrt{1-z^n}}.$$

Also ist

$$(115.)\quad \left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^n}},$$

da es offenbar verstattet ist, x für z zu schreiben.

Setzt man n — a für a; so wird

$$(116.)\quad \left(\frac{n-a}{n-a}\right) = 2^{-1+\frac{2a}{n}}\int_0^1 \frac{x^{n-a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^n}}.$$

Folglich nach (114.)

$$(117.)\quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^n}}.\int_0^1 \frac{x^{n-a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{2\Theta\cot a\Theta}{n-2a}.$$

Legendre setzt $\left(\frac{a}{a}\right) = M_a$. Da man a nicht $> \frac{1}{2}n$ zu nehmen braucht; so hat man nach (110.):

$$(118.)\quad M_a = \frac{A_a A_{a+1} \ldots A_{n-a-1}}{A_1 A_2 \ldots A_{n-2a-1}} \cdot \frac{\sin(a+1)\Theta \ldots \sin(n-a-1)\Theta}{\sin\Theta \sin 2\Theta \ldots \sin(n-2a-1)\Theta}.$$

Wegen

$$A_{n-x-1} = A_x ,$$
$$\sin(n-x)\Theta = \sin(\pi - x\Theta) = \sin x\Theta$$

erhält man aus (118.) leicht:

$$(119.)\quad M_a = \frac{A_a A_{a+1} \ldots A_{2a-1}}{A_1 A_2 \ldots A_{a-1}} \cdot \frac{\sin(a+1)\Theta \sin(a+2)\Theta \ldots \sin 2a\Theta}{\sin\Theta \sin 2\Theta \ldots \sin a\Theta}.$$

40. Was nun die Berechnung des bestimmten Integrals $\Gamma(a)$ betrifft; so ist zuerst zu bemerken, daß man die Werthe desselben in verschiedene Perioden für $a = 0$ bis $a = 1$, für $a = 1$ bis $a = 2$, für $a = 2$ bis $a = 3$, u. s. f. theilen kann, und daß man diese Werthe bloß in der ganzen Ausdehnung einer dieser Perioden zu kennen braucht, um sie in jeder andern Periode zu kennen. Man erhält nämlich leicht nach (75.):

$$\Gamma(a+\alpha+x) =$$
$$= (a+\alpha-1+x)\,\Gamma(a+\alpha-1+x)$$
$$= (a+\alpha-1+x)(a+\alpha-2+x)\,\Gamma(a+\alpha-2+x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= (a+\alpha-1+x)(a+\alpha-2+x)\ldots(a+x)\,\Gamma(a+x),$$

$$\Gamma(a-\alpha+x) =$$
$$= \frac{\Gamma(a-\alpha+1+x)}{a-\alpha+x}$$
$$= \frac{\Gamma(a-\alpha+2+x)}{(a-\alpha+x)(a-\alpha+1+x)}$$
$$= \frac{\Gamma(a-\alpha+3+x)}{(a-\alpha+x)(a-\alpha+1+x)(a-\alpha+2+x)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{\Gamma(a+x)}{(a-\alpha+x)(a-\alpha+1+x)\ldots(a-1+x)},$$

so daß also die Function Γ für die Perioden $a+\alpha$, $a+\alpha+1$ und $a-\alpha$, $a-\alpha+1$ bekannt ist, wenn sie für die ganze Ausdehnung der Periode a, $a+1$ bekannt ist. Sind z. B. die Werthe von Γ für die zweite Periode $a=1$, $a=2$ bekannt; so erhält man mittelst der obigen allgemeinen Formeln für die erste und vierte Periode leicht:

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) = 3\Gamma(\tfrac{4}{3}),\quad \Gamma(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,\Gamma(\tfrac{3}{2}).$$

Aus der Gleichung

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\quad (88.)$$

erhellet aber ferner, daß die Function Γ bloß für die ganze Ausdehnung der Hälfte einer beliebigen Periode von a bis $a+\frac{1}{2}$ bekannt zu seyn braucht, weil die Werthe von Γ für die andere Hälfte der Periode mittelst obiger Gleichung leicht gefunden werden können.

Man kann die Gleichung (88.) auch so ausdrücken:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-a)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+a) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-a)\pi} = \frac{\pi}{\cos a\pi}\,.$$

Ferner ist nach (75.)

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}-a) = (\tfrac{1}{2}-a)\Gamma(\tfrac{1}{2}-a)\,,$$
$$\Gamma(\tfrac{3}{2}+a) = (\tfrac{1}{2}+a)\Gamma(\tfrac{1}{2}+a)\,.$$

Also

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}-a)\Gamma(\tfrac{3}{2}+a) = (\tfrac{1}{4}-a^2)\cdot\frac{\pi}{\cos a\pi}\,.$$

Auf ähnliche Weise ist:

$$\Gamma(\tfrac{5}{2}-a) = (\tfrac{3}{2}-a)\Gamma(\tfrac{3}{2}-a)\,,$$
$$\Gamma(\tfrac{5}{2}+a) = (\tfrac{3}{2}+a)\Gamma(\tfrac{3}{2}+a)\,,$$
$$\Gamma(\tfrac{5}{2}-a)\Gamma(\tfrac{5}{2}+a) = (\tfrac{1}{4}-a^2)(\tfrac{9}{4}-a^2)\cdot\frac{\pi}{\cos a\pi}\,.$$

Es ist also:

$$(120.)\quad \begin{cases} \Gamma(\frac{1}{2}-a)\Gamma(\frac{1}{2}+a) = \dfrac{\pi}{\cos a\pi}\,, \\ \Gamma(\frac{3}{2}-a)\Gamma(\frac{3}{2}+a) = (\frac{1}{4}-a^2)\cdot\dfrac{\pi}{\cos a\pi}\,, \\ \Gamma(\frac{5}{2}-a)\Gamma(\frac{5}{2}+a) = (\frac{1}{4}-a^2)(\frac{9}{4}-a^2)\cdot\dfrac{\pi}{\cos a\pi}\,, \\ \Gamma(\frac{7}{2}-a)\,\Gamma(\frac{7}{2}+a) = (\frac{1}{4}-a^2)(\frac{9}{4}-a^2)\left(\frac{25}{4}-a^2\right)\cdot\dfrac{\pi}{\cos a\pi} \\ \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Wir wollen nun noch zeigen, daß es bloß nöthig ist, die Function $\Gamma(a)$ für $a = 0$ bis $a = \frac{1}{4}$ zu kennen, indem wir der Kürze wegen $l\Gamma(a) = [a]$ setzen, und eine Größe, die als gegeben oder bekannt betrachtet werden kann, überhaupt durch G bezeichnen wollen. Nach (88.) und (96.) ist:

$$[a] + [1-a] = l\frac{\pi}{\sin a\pi}\,,$$
$$[a] + [\tfrac{1}{2}+a] - [2a] = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\tfrac{1}{2}-2a)l2\,,$$

oder

$$[a] + [1-a] = G$$
$$[a] + [\tfrac{1}{2}+a] - [2a] = G\,.$$

Denkt man sich aber für $[\frac{1}{2}+a]$ seinen Werth aus (88.) gesetzt; so wird die zweite Gleichung:

$$[a] - [\tfrac{1}{2}-a] - [2a] = G\,.$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = \frac{1}{4} + \alpha$, und denkt sich zugleich für $[\frac{1}{4}-\alpha]$ seinen Werth aus (88.) eingeführt; so wird

$$[\tfrac{1}{4}+\alpha] + [\tfrac{3}{4}+\alpha] - [\tfrac{1}{2}+2\alpha] = G\,.$$

Setzt man aber $a = 2\alpha$, und führt statt $[\frac{1}{2}-2\alpha]$ seinen Werth aus (88.) ein; so wird

$$[2\alpha] + [\tfrac{1}{2}+2\alpha] - [4\alpha] = G\,.$$

In der Gleichung

$$[a] + [1-a] = G$$

setze man ferner $a = \frac{3}{4} + \alpha$; so ist

$$[\tfrac{3}{4}+\alpha] + [\tfrac{1}{4}-\alpha] = G .$$

Wir haben also folgende Gleichungen:

$$[\tfrac{1}{4}+\alpha] + [\tfrac{3}{4}+\alpha] - [\tfrac{1}{2}+2\alpha] = G ,$$
$$[2\alpha] - [4\alpha] + [\tfrac{1}{2}+2\alpha] = G ,$$
$$- [\tfrac{3}{4}+\alpha] - [\tfrac{1}{4}-\alpha] = G ,$$

durch deren Addition man erhält:

$$[\tfrac{1}{4}+\alpha] - [\tfrac{1}{4}-\alpha] + [2\alpha] - [4\alpha] = G ,$$
$$[\tfrac{1}{4}+\alpha] = [\tfrac{1}{4}-\alpha] + [4\alpha] - [2\alpha] + G .$$

Ist nun $\alpha < \frac{1}{12}$; so ist $12\alpha < 1$, $16\alpha < 1 + 4\alpha$, $4\alpha < \frac{1}{4} + \alpha$, und es ist also $[\frac{1}{4} + \alpha]$ durch andere Functionen ähnlicher Art ausgedrückt, wo $a < \frac{1}{4} + \alpha$ ist. Für $\alpha = \frac{1}{12}$ ist $\frac{1}{4} + \alpha = \frac{1}{3}$, und nach den Gleichungen

$$[a] + [1-a] = G$$
$$[a] + [\tfrac{1}{2}+a] - [2a] = G$$

ist:

$$[\tfrac{1}{3}] + [\tfrac{2}{3}] = G, [\tfrac{1}{6}] + [\tfrac{2}{3}] - [\tfrac{1}{3}] = G ,$$

woraus:

$$[\tfrac{1}{3}] = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{6}] + G .$$

Giebt man also dem α alle Werthe von 0 bis $\frac{1}{12}$; so kann man alle Werthe von $[a]$ von $a = \frac{1}{4}$ bis $a = \frac{1}{3}$ finden. Man muß nun bloß noch $[a]$ von $a = \frac{1}{3}$ bis $a = \frac{1}{2}$ finden. Aus den mehrmals angewandten zwei Gleichungen erhält man, α für a gesetzt, durch Subtraction:

$$[1-\alpha] - [\tfrac{1}{2}+\alpha] + [2\alpha] = G .$$

Denkt man sich aber für $[1 - \alpha]$ und $[\frac{1}{2} + \alpha]$ ihre Werthe aus (88.) eingeführt; so wird

$$- [\alpha] + [\tfrac{1}{2}-\alpha] + [2\alpha] + G$$
$$[\tfrac{1}{2}-\alpha] = [\alpha] - [2\alpha] + G .$$

Giebt man nun dem α alle Werthe von $\frac{1}{6}$ bis 0; so erhält man nach dem Obigen mittelst dieser Gleichung alle Werthe von $[a]$ von $a = \frac{1}{3}$ bis $a = \frac{1}{2}$, wie verlangt wurde. Man sieht also, daß zur Kenntniß aller Werthe von $\Gamma(a)$ nur die Kenntniß aller Werthe dieser Function von $a = 0$ bis $a = \frac{1}{4}$ erforderlich ist. Man könnte den Theil der ersten Periode, für welchen die Function $\Gamma(a)$ bekannt seyn muß, noch kleiner machen als $\frac{1}{4}$, welches uns hier aber zu weit führen würde, und in Legendre Exercices de calcul intégral. T. II. p. 28. nachgesehen werden muß.

41. Es kommt nun noch auf die Entwickelung einer Formel zur annähernden Berechnung von $\Gamma(x)$ an, wenn x klein ist, da man, wie wir vorher gesehen haben, x nicht $> \frac{1}{4}$ an-

unehmen braucht. Zu dieser Formel gelangt Legendre a. a. O. auf folgende Art. Man setze

$$f(x) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \ldots.$$

so ist für jedes positive ganze x

$$f(x) + \varphi(x) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots,$$

d. i.

$$f(x) + \varphi(x) = C,$$

wo

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots$$

ist.

Für $z = \frac{1}{x}$ erhält man aus (35.)

$$f(x) = C' + lx + \frac{1}{2x} - \frac{\overset{1}{B}}{2x^2} + \frac{\overset{3}{B}}{4x^4} - \frac{\overset{5}{B}}{6x^6} + \ldots,$$

eine Formel, welche, wenn man f(x) als die Summe der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x},$$

deren allgemeines Glied $\frac{1}{x}$ ist, betrachtet, natürlich bloß gilt, wenn x eine positive ganze Zahl ist. Abstrahirt man aber von dieser Voraussetzung, und denkt sich f(x) als eine stetige Function von x; so ist klar, daß diese Function auch für alle andere positiven Werthe von x, welche keine ganzen Zahlen sind, durch die oben aus (35.) hergeleitete Reihe ausgedrückt werden muß. Entwickeln wir nun $\varphi(x)$ in eine Reihe nach Potenzen von x; so wird

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \; & 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots \\ & - x\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots\right\} \\ & + x^2\left\{1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots\right\} \\ & - x^3\left\{1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder, wenn wir die Summe der nten reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen überhaupt durch S_n bezeichnen:

$$\varphi(x) = C - S_2x + S_3x^2 - S_4x^3 + S_5x^4 - \ldots.$$

Also

$$\begin{aligned} f(x) &= C - \varphi(x) \\ &= S_2x - S_3x^2 + S_4x^3 - S_5x^4 + S_6x^5 - \ldots.\end{aligned}$$

Nach (95.) ist aber

$$l\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (x-\tfrac{1}{2})lx - x + l(1+\varepsilon)$$
$$= \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (x-\tfrac{1}{2})lx - x$$
$$+ \frac{\overset{1}{B}}{1.2x} - \frac{\overset{3}{B}}{3.4x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{5.6x^5} - \frac{\overset{7}{B}}{7.8x^7} + \dots;$$

also

$$\frac{\partial l\Gamma(x)}{\partial x} = lx - \frac{1}{2x} - \frac{\overset{1}{B}}{2x^2} + \frac{\overset{3}{B}}{4x^4} - \frac{\overset{5}{B}}{6x^6} + \dots$$

d. i. nach dem Obigen

$$\frac{\partial l\Gamma(x)}{\partial x} = -\frac{1}{x} + \overset{*}{f}(x) - C',$$

oder

$$\frac{\partial l\Gamma(x)}{\partial x} = -C' - \frac{1}{x} + S_2x - S_3x^2 + S_4x^3 - S_5x^4 + \dots,$$

woraus durch Integration:

(121.) $l\Gamma(x) = -C'x - lx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \dots$

Eine Constante ist nicht beizufügen, indem nämlich, weil $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ ist (75.),

$$l\Gamma(1+x) = lx + l\Gamma(x)$$
$$= C'' - C'x + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \dots$$

ist, wenn man

$$l\Gamma(x) = C'' - C'x - lx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \dots$$

setzt. Für $x = 0$ ist aber

$$l\Gamma(1+x) = l\Gamma(1) = l1 = 0.$$

Also $C'' = 0$. Zugleich erhellet hieraus, daß

(122.) $l\Gamma(1+x) = -C'x + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \dots$

ist. Nach (121.) ist

$$l\Gamma(1+x) = -C'(1+x) - l(1+x) + \tfrac{1}{2}S_2(1+x)^2 - \dots$$
$$l\Gamma(1-x) = -C'(1-x) - l(1-x) + \tfrac{1}{2}S_2(1-x)^2 - \dots,$$

so daß also $l\Gamma(1-x)$ aus $l\Gamma(1+x)$ entspringt, wenn man $-x$ für x setzt. Dies giebt nach (122.)

(123.) $l\Gamma(1-x) = C'x + \tfrac{1}{2}S_2x^2 + \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 + \dots$

Nach (75.) und (88.) ist:

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x),\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Also durch Multiplication auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen:

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x},$$

woraus sogleich:

$$l\frac{\pi x}{\sin\pi x} = l\Gamma(1+x) + l\Gamma(1-x)$$
$$= S_2x^2 + \tfrac{1}{2}S_4x^4 + \tfrac{1}{3}S_6x^6 + \tfrac{1}{4}S_8x^8 + \dots$$

Also nach (122.) und (123.):

$$(124.)\quad l\Gamma(1+x) = \tfrac{1}{2}l\frac{\pi x}{\sin\pi x} - C'x - \tfrac{1}{3}S_3x^3 - \tfrac{1}{5}S_5x^5 - \ldots.$$

$$(125.)\quad l\Gamma(1-x) = \tfrac{1}{2}l\frac{\pi x}{\sin\pi x} + C'x + \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{5}S_5x^5 + \ldots.$$

Setzt man in (125.) $x = \frac{1}{2}$; so wird, weil nach (90.) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist:

$$(126.)\quad C' = l2 - \tfrac{1}{3}S_3 \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}S_5 \cdot \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{7}S_7 \cdot \tfrac{1}{64} - \ldots.$$

Diese Formel dient zur Bestimmung der Constante. Die Summen der reciproken Potenzen lassen sich mittelst der allgemeinen Summenformel in (35.) finden, worüber Euleri Inst. Calc. diff. T. II. §. 147. nachgesehen werden können. Legendre hat diese Summen a. a. O. T. II. p. 65. bis zur 35sten auf 16 Decimalen berechnet. Ihres häufigen Gebrauchs wegen will ich dieselben hier mittheilen:

S_2 =	1,64493	40668	482264
S_3 =	1,20205	69031	595943
S_4 =	1,08232	32337	111382
S_5 =	1,03692	77551	433700
S_6 =	1,01734	30619	844491
S_7 =	1,00834	92773	819227
S_8 =	1,00407	73561	979443
S_9 =	1,00200	83928	260822
S_{10} =	1,00099	45751	278180
S_{11} =	1,00049	41886	041194
S_{12} =	1,00024	60865	533080
S_{13} =	1,00012	27133	475785
S_{14} =	1,00006	12481	350587
S_{15} =	1,00003	05882	363070
S_{16} =	1,00001	52822	594086
S_{17} =	1,00000	76371	976379
S_{18} =	1,00000	38172	932650
S_{19} =	1,00000	19082	127166
S_{20} =	1,00000	09539	620339
S_{21} =	1,00000	04769	329868
S_{22} =	1,00000	02384	505027
S_{23} =	1,00000	01192	199260
S_{24} =	1,00000	00596	081891
S_{25} =	1,00000	00298	035035
S_{26} =	1,00000	00149	015548
S_{27} =	1,00000	00074	507118
S_{28} =	1,00000	00037	253340
S_{29} =	1,00000	00018	626597

$$
\begin{aligned}
S_{30} &= 1{,}00000\ \ 00009\ \ 313274\\
S_{31} &= 1{,}00000\ \ 00004\ \ 656629\\
S_{32} &= 1{,}00000\ \ 00002\ \ 328312\\
S_{33} &= 1{,}00000\ \ 00001\ \ 164155\\
S_{34} &= 1{,}00000\ \ 00000\ \ 582077\\
S_{35} &= 1{,}00000\ \ 00000\ \ 291038\ .
\end{aligned}
$$

Man kann der Formel für $l\Gamma(1+x)$ auch noch eine andere Gestalt geben. Es ist nämlich bekanntlich

$$
\begin{aligned}
l(1+x) &= \quad x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\\
l(1-x) &= -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\\
\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} &= \quad x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots..
\end{aligned}
$$

Also nach (124.)

$$
(127.)\quad l\Gamma(1+x) = \tfrac{1}{2}l\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}
$$
$$
+ (1-C')x - (S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - (S_7-1)\frac{x^7}{7} - \ldots.
$$

Ist M der Modulus der vulgären Logarithmen, so setze man:

$$
M(1-C') = E_1,\ \frac{M}{3}(S_3-1) = E_3,\ \frac{M}{5}(S_5-1) = E_5,\ \ldots.
$$

Dies giebt:

$$
(128.)\quad \log\Gamma(1+x) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}
$$
$$
+ E_1x - E_3x^3 - E_5x^5 - E_7x^7 - \ldots..
$$

Setzt man in (127.) $x=1$; so wird, weil $\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$ ist:

$$
0 = \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}l0 - \tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{1}{2}l0
$$
$$
+ 1 - C' - (S_3-1).\tfrac{1}{3} - (S_5-1).\tfrac{1}{5} - (S_7-1).\tfrac{1}{7} + \ldots
$$

$$
(129.)\quad 1 - C' = \tfrac{1}{2}l\frac{2}{\pi} + \tfrac{1}{3}(S_3-1) + \tfrac{1}{5}(S_5-1) + \tfrac{1}{7}(S_7-1) + \ldots
$$

Setzt man dagegen in (127.) $x=\frac{1}{2}$; so wird, weil $\Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist:

$$
l\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}l\pi = \tfrac{1}{2}l\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}l3
$$
$$
+ (1-C').\tfrac{1}{2} - (S_3-1).\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{8} - (S_5-1).\tfrac{1}{5}.\tfrac{1}{32} - \ldots
$$

$$
(130.)\quad 1 - C' = l\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3}(S_3-1)\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}(S_5-1).\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{7}(S_7-1).\tfrac{1}{64} + \ldots
$$

Legendre findet:

$$
C' = 0{,}57721\ \ 56649\ \ 01532\ \ 8606\ .
$$

Er giebt a. a. O. T. II. p. 85. eine Tafel der Logarithmen von $\Gamma(a)$ für die zweite Periode von $a=1$ bis $a=2$ in zwölf Decimalen, welche in vielen Fällen von Nutzen seyn kann. Es sind dieser Tafel die ersten, zweiten und dritten Differenzen beigefügt. Aus den Euler'schen Integralen der zweiten Art lassen sich, wie bekannt, immer die Euler'schen Integrale der ersten Art finden.

42. Mit den Euler'schen Integralen hängen sehr viele andere Integrale zusammen. Der Raum verbietet uns aber, weitere Untersuchungen über diesen wichtigen Gegenstand beizubringen. Nur folgendes Theorem darf seiner besondern Merkwürdigkeit und Wichtigkeit wegen hier nicht fehlen. Es ist nämlich immer:

$$(131.)\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}\partial x = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x \, l\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}.$$

Euler hat in den Inst. Calc. int. T. IV. p. 166. folgenden Beweis dieser merkwürdigen Gleichung gegeben.

Nach (103.) ist, wenn man $p+n$ für p setzt:

$$\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right),$$

d. i.

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{p}\left(\frac{p+n}{q}\right)$$
$$= \frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\left(\frac{p+2n}{q}\right)$$
$$= \frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\left(\frac{p+3n}{q}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdot\frac{p+q+3n}{p+3n}\cdots,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = Z$$

setzen:

$$Z = \frac{p+q}{p}\cdot\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdot\frac{p+q+3n}{p+3n}\cdots\cdots$$

Nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, und differentiirt nach p; so wird

$$\frac{\partial Z}{Z} = \left(\frac{\partial p}{p+q} - \frac{\partial p}{p}\right) + \left(\frac{\partial p}{p+q+n} - \frac{\partial p}{p+n}\right) + \left(\frac{\partial p}{p+q+2n} - \frac{\partial p}{p+2n}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial p}{p+q+3n} - \frac{\partial p}{p+3n}\right) + \cdots\cdots$$

Sey jetzt

$$\varphi(v) = \frac{v^p}{p} - \frac{v^{p+q}}{p+q} + \frac{v^{p+n}}{p+n} - \frac{v^{p+q+n}}{p+q+n}$$
$$+ \frac{v^{p+2n}}{p+2n} - \frac{v^{p+q+2n}}{p+q+2n} + \cdots;$$

so ist offenbar

$$\frac{\partial Z}{Z} = - \partial p \varphi(1) .$$

Differentiirt man aber in der Gleichung

$$Z = \int_0^1 \frac{x^{p-1} \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

unter dem Integralzeichen nach p; so wird:

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = \int_0^1 \frac{x^{p-1} \partial x \, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} ,$$

oder

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = - \int_0^1 \frac{x^{p-1} \partial x \, l\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} .$$

Folglich

$$\frac{1}{Z} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1} \partial x \, l\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \varphi(1) .$$

Aber nach dem Obigen

$$\partial \varphi(v) = \partial v \left\{ \begin{array}{l} v^{p-1} + v^{p+n-1} + v^{p+2n-1} + v^{p+3n-1} + \ldots \\ - v^{p+q-1} - v^{p+q+n-1} - v^{p+q+2n-1} - \ldots \end{array} \right\}$$

d. i., wenn man diese Reihen summirt:

$$\partial \varphi(v) = \frac{v^{p-1} - v^{p+q-1}}{1 - v^n} \partial v ,$$

$$\varphi(v) = \int \frac{v^{p-1} - v^{p+q-1}}{1 - v^n} \partial v ,$$

wenn man dieses Integral so nimmt, daß es für $v = 0$ verschwindet. Setzt man dann $v = 1$; so wird

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{v^{p-1} - v^{p+q-1}}{1 - v^n} \partial v ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{p+q-1}}{1 - x^n} \partial x .$$

Also

$$\frac{1}{Z} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1} \partial x \, l\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{p+q-1}}{1 - x^n} \partial x ,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} \partial x \, l\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = Z \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{p+q-1}}{1 - x^n} \partial x ,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x\, l\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{p+q-1}}{1-x^n}\partial x \,.$$

43. Man setze

$$\int_0^1 x^{p-1}\partial x\,(1-x)^{q-1} = y\,,\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x\,(1-x^q)}{1-x} = z\,;$$

so ist, wenn man die erste Formel nach p differentiirt:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \int_0^1 x^{p-1}\partial x\,(1-x)^{q-1}\, lx$$

$$= -\int_0^1 x^{p-1}\partial x\,(1-x)^{q-1}\, l\frac{1}{x}\,.$$

Folglich nach (131.) für $n = 1$:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = -yz\,,\quad \frac{\partial y}{y\partial p} = -z\,,\quad \frac{\partial ly}{\partial p} = -z\,.$$

Aber nach (80.)

$$y = (p\,,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,,$$

$$ly = l\Gamma(p) + l\Gamma(q) - l\Gamma(p+q)\,,$$

$$\frac{\partial ly}{\partial p} = \frac{\partial l\Gamma(p)}{\partial p} - \frac{\partial l\Gamma(p+q)}{\partial(p+q)}\,,$$

d. i. nach dem Obigen:

$$\frac{\partial l\Gamma(p)}{\partial p} - \frac{\partial l\Gamma(p+q)}{\partial(p+q)} = -\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x\,(1-x^q)}{1-x}\,,$$

oder, wenn man $p + q = r$ setzt:

$$(132.)\quad \frac{\partial l\Gamma(r)}{\partial r} - \frac{\partial l\Gamma(p)}{\partial p} = \int_0^1 \frac{(x^p - x^r)\partial x}{x(1-x)}\,,$$

$$(133.)\quad \frac{\partial l\Gamma(1+r)}{\partial r} - \frac{\partial l\Gamma(1+p)}{\partial p} = \int_0^1 \frac{(x^p - x^r)\partial x}{1-x}\,.$$

Dies sind auch zwei merkwürdige Gleichungen, die öfters Anwendung finden. Nach (122.) ist aber

$$\frac{\partial l\Gamma(1+p)}{\partial p} = -C' + S_2 p - S_3 p^2 + S_4 p^3 - \ldots\,.$$

Folglich für $p = 0$:

$$\frac{\partial l\Gamma(1+p)}{\partial p} = -C' = -0{,}5772156649\ldots$$

Also, wenn wir in (133.) $r = a$, $p = 0$ setzen:

$$(134.)\quad \frac{\partial l\Gamma(1+a)}{\partial a} = -C' + \int_0^1 \frac{(1-x^a)\partial x}{1-x}\,.$$

Da

$$\Gamma(1+a) = a\,\Gamma(a)$$

ist; so ist

$$\mathrm{l}\Gamma(1+a) = \mathrm{l}a + \mathrm{l}\Gamma(a),\ \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(1+a)}{\partial a} = \frac{1}{a} + \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a}.$$

Also

$$(135.)\quad \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} = -C' - \frac{1}{a} + \int_0^1 \frac{(1-x^a)\partial y}{1-1}.$$

Nach (88.) ist

$$\mathrm{l}\Gamma(a) + \mathrm{l}\Gamma(1-a) = \mathrm{l}\pi - \mathrm{l}\sin a\pi.$$

Also, wenn man nach a differentiirt:

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(1-a)}{\partial(1-a)} = -\pi \cot a\pi.$$

Aber nach (132.)

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(1-a)}{\partial(1-a)} = \int_0^1 \frac{(x^{1-a} - x^a)\partial x}{x(1-x)}.$$

Folglich

$$(136.)\quad \int_0^1 \frac{(x^a - x^{1-a})\partial x}{x(1-x)} = \pi \cot a\pi.$$

Nach (96.) ist

$$\Gamma(a)\Gamma(\tfrac{1}{2}+a) = \Gamma(2a).(2\pi)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}-2a},$$

$$\mathrm{l}\Gamma(a) + \mathrm{l}\Gamma(\tfrac{1}{2}+a) - \mathrm{l}\Gamma(2a) = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi) + (\tfrac{1}{2}-2a)\mathrm{l}2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{\partial(\frac{1}{2}+a)} - \frac{2\partial \mathrm{l}\Gamma(2a)}{\partial(2a)} = -2\mathrm{l}2.$$

Aber nach (132.)

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(2a)}{\partial(2a)} = \int_0^1 \frac{(x^{2a} - x^a)\partial x}{x(1-x)},$$

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{\partial(\frac{1}{2}+a)} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(2a)}{\partial(2a)} = \int_0^1 \frac{(x^{2a} - x^{\frac{1}{2}+a})\partial x}{x(1-x)}.$$

Folglich

$$(137.)\quad \int_0^1 \frac{(x^a + x^{\frac{1}{2}+a} - 2x^{2a})\partial x}{x(1-x)} = 2\mathrm{l}2.$$

Auf ähnliche Weise hat man nach (96.)

$$\mathrm{l}\Gamma(a) + \mathrm{l}\Gamma(\tfrac{1}{3}+a) + \mathrm{l}\Gamma(\tfrac{2}{3}+a) - \mathrm{l}\Gamma(3a) = \mathrm{l}(2\pi) + (\tfrac{1}{2}-3a)\mathrm{l}3$$

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(\frac{1}{3}+a)}{\partial(\frac{1}{3}+a)} + \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(\frac{2}{3}+a)}{\partial(\frac{2}{3}+a)} - \frac{3\partial \mathrm{l}\Gamma(3a)}{\partial(3a)} = -3\mathrm{l}3.$$

Aber nach (132.)

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(a)}{\partial a} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(3a)}{\partial(3a)} = \int_0^1 \frac{(x^{3a} - x^a)\partial x}{x(1-x)},$$

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(\frac{1}{3}+a)}{\partial(\frac{1}{3}+a)} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(3a)}{\partial(3a)} = \int_0^1 \frac{(x^{3a} - x^{\frac{1}{3}+a})\partial x}{x(1-x)},$$

$$\frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(\frac{2}{3}+a)}{\partial(\frac{2}{3}+a)} - \frac{\partial \mathrm{l}\Gamma(3a)}{\partial(3a)} = \int_0^1 \frac{(x^{3a} - x^{\frac{2}{3}+a})\partial x}{x(1-x)}.$$

Also

$$(138.)\quad \int_0^1 \frac{(x^a + x^{\frac{1}{3}+a} + x^{\frac{2}{3}+a} - 3x^{3a})\,\partial x}{x(1-x)} = 313\,.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt sogleich in die Augen. Man kann diese Formeln, wie leicht erhellet, auch so darstellen:

$$(139.)\quad \begin{cases} \int_0^1 x^{2a-1}\,\partial x\,.\,\dfrac{1+x-2x^{2a}}{1-x^2} = 12\,, \\ \int_0^1 x^{3a-1}\,\partial x\,.\,\dfrac{1+x+x^2-3x^{6a}}{1-x^3} = 13\,, \\ \int_0^1 x^{4a-1}\,\partial x\,.\,\dfrac{1+x+x^2+x^3-4x^{12a}}{1-x^4} = 14 \\ \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

oder, wenn man nach und nach in diesen Formeln a für $2a$, $3a$, $4a$, ... setzt:

$$(140.)\quad \begin{cases} \int_0^1 x^{a-1}\partial x\,.\,\dfrac{1+x-2x^a}{1-x^2} = 12\,, \\ \int_0^1 x^{a-1}\partial x\,.\,\dfrac{1+x+x^2-3x^{2a}}{1-x^3} = 13\,, \\ \int_0^1 x^{a-1}\partial x\,.\,\dfrac{1+x+x^2+x^3-4x^{3a}}{1-x^4} = 14 \\ \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Da

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

ist; so findet man leicht:

$$(141.)\quad \int_0^1 \left\{ \frac{x^{a-1}\partial x}{1-x} - \frac{nx^{na-1}\partial x}{1-x^n} \right\} = \ln\,.$$

44. Es ist

$$\int_0^1 x^{n+\alpha-1}\partial x = \frac{1}{n+\alpha}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\alpha^2}{n^3} - \frac{\alpha^3}{n^4} + \ldots..$$

Entwickelt man aber x^α nach Potenzen von α; so ist bekanntlich

$$x^{n+\alpha-1}\partial x = x^{n-1}\partial x \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1}\,lx + \frac{\alpha^2}{1.2}(lx)^2 + \frac{\alpha^3}{1.2.3}(lx)^3 + \ldots\ldots. \right\},$$

$$= x^{n-1}\partial x \left\{ 1 - \frac{\alpha}{1}\,l\frac{1}{x} + \frac{\alpha^2}{1.2}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 + \ldots \right\}.$$

Folglich

$$\int_0^1 x^{n+\alpha-1}\partial x = \int_0^1 x^{n-1}\partial x - \frac{\alpha}{1}\int_0^1 x^{n-1}\partial x\, l\frac{1}{x}$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\int_0^1 x^{n-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^2$$
$$- \frac{\alpha^3}{1.2.3}\int_0^1 x^{n-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch Vergleichung beider Reihen erhält man augenblicklich:

$$(142.)\quad \begin{cases} \int_0^1 x^{n-1}\partial x = \frac{1}{n}, \\ \int_0^1 x^{n-1}\partial x\, l\frac{1}{x} = \frac{1}{n^2}, \\ \int_0^1 x^{n-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1.2}{n^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_0^1 x^{n-1}\partial x\left(l\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1.2.3\ldots m}{n^{m+1}}. \end{cases}$$

45. Setzt man in dem bestimmten Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^r}$$

$x = \frac{1}{z} - 1$; so erhält man, da $z = 1$ für $x = 0$, $z = 0$ für $x = \infty$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^r} = -\int_1^0 z^{r-1-a}\partial z\,(1-z)^{a-1}$$
$$= \int_0^1 z^{r-1-a}\partial z\,(1-z)^{a-1} = (r-a, a).$$

Aber nach (80.)

$$(r-a, a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(r-a)}{\Gamma(r)}.$$

Also

$$(143.)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^r} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(r-a)}{\Gamma(r)}.$$

a und r können hier alle positiven Größen bezeichnen, wenn nur $a < r$ ist.

Ist r eine ganze Zahl und $a < 1$; so ist nach (75.), (76.) und (88.)

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(r-a)}{\Gamma(r)} = \frac{(r-1-a)(r-2-a)\ldots(1-a)\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{1.2.3.4\ldots(r-1)}$$
$$= \frac{(1-a)(2-a)(3-a)\ldots(r-1-a)}{1.2.3.4\ldots(r-1)}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Also, wenn r eine ganze Zahl und $a < 1$ ist:

$$(144.)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^r} = \frac{(1-a)(2-a)\ldots(r-1-a)}{1.2.3.4\ldots(r-1)}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Setzt man in (143.) $\varkappa x$ für x; so wird:

$$(145.)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+\varkappa x)^r} = \varkappa^{-a}.\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(r-a)}{\Gamma(r)}.$$

46. Betrachten wir jetzt das bestimmte Integral

$$y = \int_0^1 \frac{(1-x^{a-1})(1-x^n)}{1-x}.\frac{\partial x}{1\frac{1}{x}}.$$

Differentiirt man nach a; so wird

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^n)\partial x}{1-x}.$$

Nach (133.) ist aber

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^n)\partial x}{1-x} = \int_0^1 \frac{(x^{a-1}-x^{a+n-1})}{1-x}\partial x$$

$$= \frac{\partial l\Gamma(a+n)}{\partial(a+n-1)} - \frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial(a-1)} = \frac{\partial l\Gamma(a+n)}{\partial a} - \frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}.$$

Folglich

$$\partial y = \partial l\Gamma(a+n) - \partial l\Gamma(a)$$
$$y = l\Gamma(a+n) - l\Gamma(a) + \text{Const}.$$

Für $a=1$ verschwindet y, und $\Gamma(a)$ wird $=1$, $l\Gamma(a)=0$. Also

$$0 = l\Gamma(1+n) + \text{Const},\quad \text{Const} = -l\Gamma(1+n).$$

Folglich

$$(146.)\quad \int_0^1 \frac{(1-x^{a-1})(1-x^n)}{1-x}.\frac{\partial x}{1\frac{1}{x}} = l\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1+n)}.$$

Setzt man $a+m$ für a; so wird:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{a+m-1})(1-x^n)}{1-x}.\frac{\partial x}{1\frac{1}{x}} = l\frac{\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a+m)\,\Gamma(1+n)},$$

woraus, wenn man von dieser Gleichung die Gleichung (146.) subtrahirt:

$$(147.)\quad \int_0^1 \frac{(1-x^m)(1-x^n)}{1-x}.\frac{x^{a-1}\partial x}{1\frac{1}{x}} = l\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a+m)\,\Gamma(a+n)}.$$

Für $a=1$ ist:

$$(148.)\quad \int_0^1 \frac{(1-x^m)(1-x^n)}{1-x}.\frac{\partial x}{1\frac{1}{x}} = l\frac{\Gamma(1+m+n)}{\Gamma(1+m)\,\Gamma(1+n)},$$

$$(149.)\quad \int_0^1 \frac{(1-x^{m-1})(1-x^{n-1})}{1-x}.\frac{\partial x}{1\frac{1}{x}} = l\frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}.$$

Für $a = \frac{1}{2} - p$, $m = p$, $n = p$, wo $p < \frac{1}{2}$, erhält man aus (147.):

$$-\int_0^1 \frac{(1-x^p)^2}{1-x} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}-p}\partial x}{lx} = l\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-p)\Gamma(\frac{1}{2}+p)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})},$$

d. i. nach (120.) und (90.):

$$\int_0^1 \frac{(1-x^p)^2}{1-x} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}-p}\partial x}{lx} = l\cos p\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}-p} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}+p}}{1-x} \cdot \frac{\partial x}{x\,lx} = l\cos p\pi,$$

Für $r > p$ ist $\frac{p}{r} < 1$, $\frac{p}{2r} < \frac{1}{2}$. Also kann man $\frac{p}{2r}$ für p setzen. Dies giebt:

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2r}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2r}}}{1-x} \cdot \frac{\partial x}{x\,lx} = l\cos\frac{p\pi}{2r}.$$

Für $x = 0$, $x = 1$ ist $x^{2r} = 0$, $x^{2r} = 1$. Man kann also x^{2r} für x setzen. Dies giebt:

$$(150.)\quad \int_0^1 \frac{x^{r-p} - 2x^r + x^{r+p}}{1-x^{2r}} \cdot \frac{\partial x}{x\,lx} = l\cos\frac{p\pi}{2r},$$

wenn $r > p$ ist. Daß man p auch negativ nehmen kann, wenn nur der absolute Werth von $p < r$ ist, fällt sogleich in die Augen. Setzt man $r - q$ für p, wo q positiv und $< 2r$ seyn muß; so wird

$$(151.)\quad \int_0^1 \frac{x^q - 2x^r + x^{2r-q}}{1-x^{2r}} \cdot \frac{\partial x}{x\,lx} = l\sin\frac{q\pi}{2r},$$

wenn q positiv und $< 2r$ ist. Die beiden letzten Formeln hat Euler gefunden.

Nach (96.) ist

$$\Gamma(r-\tfrac{1}{2})\Gamma(r) = \Gamma(2r-1).(2\pi)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{3}{2}-2r} = \Gamma(2r-1).\pi^{\frac{1}{2}}2^{2-2r}$$

$$\frac{\Gamma(r)\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2r-1)} = 2^{2-2r}.$$

Setzt man nun in (147.) $a = \frac{1}{2}$, $m = r - 1$, $n = r - \frac{1}{2}$; so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^{r-1})(1-x^{r-\frac{1}{2}})}{1-x} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{l\frac{1}{x}} = -l2^{2-2r} = (2r-2)l2,$$

oder, wenn man x^2 für x, und $r = 1 + \frac{1}{2}a$ setzt:

$$(152.)\quad \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^{a+1})}{1-x^2} \cdot \frac{\partial x}{l\frac{1}{x}} = a\,l2.$$

Da $m = r - 1$ positiv, also $r > 1$ seyn muß; so muß auch $1 + \frac{1}{2}a > 1$, $\frac{1}{2}a > 0$, $a > 0$, d. i. a positiv seyn. Differentiirt man die Gleichung (152.) nach a; so wird:

$$(153.)\quad \int_0^1 x^a \partial x \left(\frac{1 + x - 2x^{a+1}}{1 - x^2}\right) = 12 .$$

Dieselbe Formel haben wir schon oben (140.) auf anderem Wege gefunden.

47. Ein anderes sehr merkwürdiges bestimmtes Integral ist

$$\int_0^1 \frac{(x^n - 1)\partial x}{lx} .$$

Man setze

$$y = \int_0^1 \frac{(x^n - 1)\partial x}{lx} ;$$

so erhält man durch Differentiation nach n:

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \int_0^1 x^n \partial x = \frac{1}{n+1} ,$$

$$\partial y = \frac{\partial n}{n+1},\ y = l(n+1) ,$$

wobei zu bemerken, daß eine Constante nicht beizufügen ist, weil y offenbar für $n = 0$ verschwindet. Es ist also

$$(154.)\quad \int_0^1 \frac{(x^n - 1)\partial x}{lx} = l(n+1) .$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$\int_0^1 \frac{(x^n - 1)x^m \partial x}{lx} .$$

Setzt man nämlich $x^{m+1} = z$, $\frac{n}{m+1} = \alpha$; so wird

$$\int_0^1 \frac{(x^n - 1)x^m \partial x}{lx} = \int_0^1 \frac{(z^\alpha - 1)\partial z}{lz} = l(\alpha + 1) ,$$

$$(155.)\quad \int_0^1 \frac{(x^n - 1)x^m \partial x}{lx} = l\left(\frac{m + n + 1}{m + 1}\right) .$$

Hat man im Allgemeinen das Polynom

$$X = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots ,$$

welches für $x = 1$ verschwindet; so ist auch:

$$X = A(x^n - 1) + B(x^{n-1} - 1) + C(x^{n-2} - 1) + \ldots ,$$

also

$$(156.)\quad \int_0^1 \frac{X\partial x}{lx} = Al(n+1) + Bln + Cl(n-1) + \ldots .$$

Nach (155.) ist

$$\int_0^1 \left(\frac{x^n - 1}{lx}\right) x^{m-1} \partial x = l\left(\frac{m+n}{m}\right) = l(m+n) - lm ,$$

so daß man also diese Formel auch so schreiben kann:

$$(157.)\quad \int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right) x^{m-1}\partial x = \varDelta(lm).$$

Setzen wir jetzt

$$y = \int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right)^2 x^{m-1}\partial x;$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial n} = 2\int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right) x^{m+n-1}\partial x = 2l(m+2n) - 2l(m+n). \quad (157.)$$

Aber

$$\int \partial x\, lx = x\, lx - \int \frac{x\partial x}{x} = x(lx-1).$$

Folglich, für

$$a + bx = z,\ \partial x = \frac{\partial z}{b};$$

$$\int \partial x\, l(a+bx) = \frac{1}{b}\int \partial z\, lz = \frac{z}{b}(lz-1)$$

$$= \frac{a+bx}{b}\left\{l(a+bx) - 1\right\}.$$

Also

$$y = (m+2n)\left\{l(m+2n)-1\right\} - 2(m+n)\left\{l(m+n)-1\right\} + \text{Const},$$

wo die Constante so zu bestimmen ist, daß $y=0$ für $n=0$. Nämlich

$$0 = m(lm-1) - 2m(lm-1) + \text{Const}$$
$$\text{Const} = m(lm-1).$$

Dies giebt:

$$y = (m+2n)\,l(m+2n) - 2(m+n)\,l(m+n) + mlm,$$

d. i.

$$(158.)\quad \int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right)^2 x^{m-1}\partial x = \tfrac{1}{1}\varDelta^2(mlm),$$

wie leicht erhellet, wenn man die zweite Differenz von mlm entwickelt, indem man m um n zunehmen läßt.

Auf ähnliche Art sey jetzt

$$y = \int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right)^3 x^{m-1}\partial x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = 3\int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right)^2 x^{m+n-1}\partial x$$

$$= 3(m+3n)\,l(m+3n) - 6(m+2n)\,l(m+2n) + 3(m+n)\,l(m+n).$$

Aber

$$\int x\partial x\, lx = \tfrac{1}{2}x^2 lx - \tfrac{1}{2}\int x\partial x = \tfrac{1}{2}x^2(lx-\tfrac{1}{2}),$$

$$\int (a+bx)\partial x \, l(a+bx) = \frac{1}{b}\int z\,\partial z\, lz$$
$$= \frac{1}{2b}(a+bx)^2 \{l(a+bx) - \tfrac{1}{2}\}.$$

Also

$$y = \tfrac{1}{2}(m+3n)^2\{l(m+3n)-\tfrac{1}{2}\} - \tfrac{3}{2}(m+2n)^2\{l(m+2n)-\tfrac{1}{2}\}$$
$$+ \tfrac{3}{2}(m+n)^2\{l(m+n)-\tfrac{1}{2}\} + \text{Const.}$$

Bestimmt man die Constante wie oben; so erhält man

$$\text{Const} = -\tfrac{1}{2}m^2(lm-\tfrac{1}{2}).$$

Folglich

$$y = \frac{1}{1.2}\left\{\begin{matrix}(m+3n)^2 l(m+3n)^2 - 3(m+2n)^2 l(m+2n) \\ + 3(m+n)^2 l(m+n) - m^2 lm\end{matrix}\right\},$$

d. i.

$$(159.)\quad \int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right)^3 x^{m-1}\partial x = \frac{1}{1.2}\Delta^3(m^2 lm).$$

Man übersieht hier schon das allgemeine Gesetz. Der allgemeine Beweis desselben unterliegt keiner Schwierigkeit, wenn man sich die folgenden zwei allgemeinen Formeln merkt. Es ist

$$\int x^\alpha \partial x\, lx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}lx - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha \partial x$$
$$= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\left(lx - \frac{1}{\alpha+1}\right),$$

oder

$$\int (a+bx)^\alpha \partial x\, l(a+bx) = \frac{1}{(\alpha+1)b}(a+bx)^{\alpha+1}\left\{l(a+bx) - \frac{1}{\alpha+1}\right\}$$

und

$$0 = (m+\alpha n)^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{1}(m+(\alpha-1)n)^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}(m+(\alpha-2)n)^{\alpha-1}$$
$$- \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}(m+(\alpha-3)n)^{\alpha-1} + \ldots.$$

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist nämlich offenbar die αte Differenz der Reihe

$$m^{\alpha-1},\ (m+n)^{\alpha-1},\ (m+2n)^{\alpha-1},\ \ldots\ (m+\alpha n)^{\alpha-1},$$

welche eine arithmetische Reihe der $(\alpha-1)$ten Ordnung ist (Thl. I. S. 209.). Daher ist die $(\alpha-1)$te Differenz constant, die αte Differenz $= 0$. Es ist also allgemein

$$(160.)\quad \int_0^1 \left(\frac{x^n-1}{lx}\right)^\alpha x^{m-1}\partial x = \frac{1}{1.2.3..(\alpha-1)}\Delta^\alpha(m^{\alpha-1}lm),$$

eine zuerst von Euler (Inst. Calc. int. T. IV. p. 271.) für einige besondere Fälle bewiesene Gleichung.

48. Gehen wir nun zu einigen bestimmten Integralen über, welche trigonometrische Größen involviren.

Sey, um

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2}$$

zu finden, $\varkappa$ eine beliebige ganze Zahl, und

$$z = \int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}} \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2}.$$

Folglich, weil die Gränze $\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}$, wenn man nach α differentiirt, selbst veränderlich ist, nach (18.)

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}} \frac{x\,\partial x \sin \alpha x}{1+x^2} + \frac{\cos 2\varkappa\pi}{1+\left(\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}\right)^2} \cdot \frac{\partial \cdot \frac{2\varkappa\pi}{\alpha}}{\partial \alpha},$$

$$= -\int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\pi}} \frac{x\,\partial x \sin \alpha x}{1+x^2} - \frac{2\varkappa\pi}{\alpha^2 + 4\varkappa^2\pi^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = -\int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}} \frac{x^2\,\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} - \frac{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha} \sin 2\varkappa\pi}{1+\left(\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}\right)^2} \cdot \frac{\partial \cdot \frac{2\varkappa\pi}{\alpha}}{\partial \alpha}$$

$$+ \frac{4\varkappa\alpha\pi}{(\alpha^2 + 4\varkappa^2\pi^2)^2}$$

$$= -\int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}} \frac{x^2\,\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} + \frac{4\varkappa\alpha\pi}{(\alpha^2 + 4\varkappa^2\pi^2)^2}.$$

Also

$$z - \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = \int_0^{\frac{2\varkappa\pi}{\alpha}} \partial x \cos \alpha x - \frac{4\varkappa\alpha\pi}{(\alpha^2 + 4\varkappa^2\pi^2)^2},$$

d. i. nach (48.)

$$z - \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = -\frac{4\varkappa\alpha\pi}{(\alpha^2 + 4\varkappa^2\pi^2)^2}.$$

Für $\varkappa = \infty$ ist aber der Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $= 0$. Also, wenn wir

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2}$$

setzen:

$$y - \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = 0.$$

So findet Legendre diese Gleichung in den Exercices de calcul intégral. T. I. 357. Lacroix in dem Traité du calc. diff. et du calc. int. T. III. p. 493. schließt auf folgende Art.

Man setze für ein positives α:

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2};$$

so ist, wenn man nach α differentiirt:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty \frac{x\,\partial x \sin \alpha x}{1+x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} = -\int_0^\infty \frac{(1+x^2-1)\,\partial x \cos \alpha x}{1+x^2},$$

$$= -\int_0^\infty \partial x \cos \alpha x + \int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = \int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} = y,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} - y = 0.$$

Hierbei ist

$$\int_0^\infty \partial x \cos \alpha x = 0.$$

gesetzt. Gegen dieses bestimmte Integral sind aber schon in (21.) Einwendungen gemacht worden, und Legendre's, wenn auch weitläufigere, Beweisart verdient daher jeden Falls den Vorzug.

Die gefundene Differentialgleichung zu integriren, setze man

$$y = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots;$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = 1.2C + 2.3D\alpha + 3.4E\alpha^2 + \ldots$$

Also nach obiger Gleichung:

$$0 = 1.2C - A + (2.3D - B)\alpha + (3.4E - C)\alpha^2 + (4.5F - D)\alpha^3 + \ldots,$$

woraus

$$C = \frac{A}{1.2}$$

$$D = \frac{B}{2.3} = \frac{B}{1.2.3}$$

$$E = \frac{C}{3.4} = \frac{A}{1\ldots4}$$

$$F = \frac{D}{4.5} = \frac{B}{1\ldots5}$$

$$G = \frac{E}{5.6} = \frac{A}{1\ldots6}$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich

$$y = A\left\{1 + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1..4} + \frac{\alpha^6}{1..6} + \ldots\right\} + B\left\{\alpha + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1\ldots5} + \frac{\alpha^7}{1\ldots7} + \ldots\right\},$$

d. i., wenn wir $\sqrt{-1} = i$ setzen:

$$y = A\cos(\alpha i) - iB\sin(\alpha i).$$

Aber bekanntlich

$$\cos(\alpha i) = \frac{e^{-\alpha} + e^{\alpha}}{2},\ \sin(\alpha i) = \frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2i}.$$

Folglich

$$y = A.\frac{e^{-\alpha} + e^{\alpha}}{2} - B.\frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(A+B)e^{\alpha} + \tfrac{1}{2}(A-B)e^{-\alpha},$$

d. i.

$$y = Ce^{\alpha} + C'e^{-\alpha},$$

wo C, C' zwei willkührliche Constanten sind. Für $\alpha = 0$ ist $y = C + C'$, und nach dem Obigen, unter derselben Voraussetzung:

$$y = \int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi \quad (35.).$$

Also

$$C + C' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Es ist aber, wie groß man auch α annehmen mag, wie leicht erhellet, der absolute Werth von

$$\int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} \text{ immer } < \int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2},$$

d. i. auch für $\alpha = \infty$:

$$\int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Für $\alpha = \infty$ wäre aber, wenn C nicht $= 0$ wäre, der absolute Werth von $Ce^{\alpha} + C'e^{-\alpha}$ unendlich groß, so daß also $C = 0$, $C' = \tfrac{1}{2}\pi$, und folglich

$$(161.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-\alpha}.$$

Setzt man $\frac{x}{a}$ für x und αa für α; so wird

$$(162.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-\alpha a}.$$

Differentiirt man nach α; so wird

$$(163.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x \sin \alpha x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha a}.$$

Differentiirt man diese beiden Formeln nach a; so erhält man nach und nach:

$$(164.)\begin{cases}\int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^2}\left\{\frac{\alpha}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right\}, \\ \int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^3}\left\{\frac{\alpha^2}{a^3}+\frac{3\alpha}{a^4}+\frac{3}{a^5}\right\}, \\ \int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{(a^2+x^2)^4} = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^4}\left\{\frac{\alpha^3}{a^4}+\frac{6\alpha^2}{a^5}+\frac{15\alpha}{a^6}+\frac{15}{a^7}\right\} \\ \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}\end{cases}$$

$$(165.)\begin{cases}\int_0^\infty \frac{x\partial x \sin \alpha x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^2}\cdot\frac{\alpha}{a}, \\ \int_0^\infty \frac{x\partial x \sin \alpha x}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^3}\left\{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\alpha}{a^3}\right\}, \\ \int_0^\infty \frac{x\partial x \sin \alpha x}{(a^2+x^2)^4} = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^4}\left\{\frac{\alpha^3}{a^3}+\frac{3\alpha^2}{a^4}+\frac{3\alpha}{a^5}\right\} \\ \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}\end{cases}$$

d. i., wenn wir allgemein

$$A^{(x)} = \frac{\alpha^{x-1}}{a^x} + \frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{\alpha^{x-2}}{a^{x+1}} + \frac{(x+1)\,x(x-1)(x-2)}{2.4}\cdot\frac{\alpha^{x-3}}{a^{x+2}}$$
$$+ \frac{(x+2)(x+1)\ldots(x-2)(x-3)}{2.4.6}\cdot\frac{\alpha^{x-4}}{a^{x+3}} + \ldots.$$

setzen:

$$(166.)\begin{cases}\int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{(a^2+x^2)^x} = \frac{A^{(x)}}{1.2.3\ldots(x-1)}\cdot\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2^x}, \\ \int_0^\infty \frac{x\partial x \sin \alpha x}{(a^2+x^2)^x} = \frac{A^{(x-1)}}{1.2.3\ldots(x-1)}\cdot\frac{\pi \alpha e^{-\alpha a}}{2^x}.\end{cases}$$

Laplace hat das Integral (161.) mittelst doppelter Integration auf folgende Art gefunden (Bulletin de la Société philomatique. Avril. 1811.). Es ist bekanntlich

$$\int_0^\infty\int_0^\infty 2ye^{-y^2(1+x^2)}\cos\alpha x\,\partial x\,\partial y$$
$$= 2\int_0^\infty \cos\alpha x\,\partial x \int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)}\partial y$$
$$= 2\int_0^\infty ye^{-y^2}\partial y \int_0^\infty e^{-x^2y^2}\cos\alpha x\,\partial x.$$

Sey

$$y^2(1+x^2) = z,\ y\partial y = \frac{\partial z}{2(1+x^2)};$$

also

$$\int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)}\partial y = \frac{1}{2(1+x^2)}\int_0^\infty e^{-z}\partial z = \frac{1}{2(1+x^2)},$$

und nach (39.)

$$\int_0^\infty e^{-x^2y^2}\cos\alpha x\,\partial x = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4y^2}}\sqrt{\pi}}{2y}.$$

Folglich

$$\int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} = \sqrt{\pi} . \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{\alpha^2}{4y^2}} \partial y .$$

Setzen wir nun in (70.) $x^{\frac{1}{2}}$ für x, also $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\partial x$ für ∂x; so wird

$$(167.) \int_0^\infty x^{\frac{2n-1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x$$

$$= \frac{e^{-2s}\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \left\{ 1 + \frac{(n+1)n}{2} . \left(\frac{1}{2s}\right) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4} . \left(\frac{1}{2s}\right)^2 + \ldots \right\},$$

d. i. für $n = 0$:

$$(168.) \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x = e^{-2s} \sqrt{\frac{\pi}{s}} .$$

Es verdient hier beiläufig bemerkt zu werden, daß die Formel (167.) auch gilt, wenn n negativ ist, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann. Es ist

$$\int_0^\infty x^{\frac{2n-1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{2n-1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x + \int_1^\infty x^{\frac{2n-1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x .$$

Um den ersten Theil des Integrals zu finden, setze man $x = \frac{1}{z}$; so ist $z = \infty, = 1$, wenn $x = 0, = 1$ ist. Also ist der erste Theil

$$= - \int_\infty^1 z^{-\frac{2n+3}{2}} e^{-s\left(z+\frac{1}{z}\right)} \partial z = \int_1^\infty z^{-\frac{2n+3}{2}} e^{-s\left(z+\frac{1}{z}\right)} \partial z .$$

Folglich

$$\int_0^\infty x^{\frac{2n-1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x$$

$$= \int_1^\infty \left\{ x^{\frac{2n-1}{2}} + x^{-\frac{2n+3}{2}} \right\} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x .$$

Also, wenn man in dieser Gleichung $-(n+1)$ für n setzt, welches offenbar verstattet ist:

$$\int_0^\infty x^{-\frac{2n+3}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x$$

$$= \int_1^\infty \left\{ x^{-\frac{2n+3}{2}} + x^{\frac{2n-1}{2}} \right\} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x .$$

Folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$\int_0^\infty x^{\frac{2n-1}{2}} e^{-s\left(x+\frac{1}{x}\right)} \partial x = \varphi(n)$$

setzen:

$$\varphi(n) = \varphi(-n-1),$$

oder, was dasselbe ist:

$$\varphi(n-1) = \varphi(-n).$$

Also nach (167.)

$$(169.) \quad \varphi(-n)$$

$$= \frac{e^{-2s}\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\left\{1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2s}\right) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{2s}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$= \frac{e^{-2s}\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\left\{1 + \frac{(-n+1)(-n)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2s}\right) + \frac{(-n+2)(-n+1)(-n)(-n-1)}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{2s}\right)^2 + \ldots\right\},$$

so daß folglich (167.) auch gilt, wenn n negativ ist. Setzt man $s = \frac{1}{2\varkappa}$; so ergeben sich leicht folgende Integrale:

$$(170.) \quad \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1+x^2}{2\varkappa x}} \partial x = e^{-\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{2\varkappa\pi},$$

$$(171.) \quad \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1+x^2}{2\varkappa x}} \partial x = (1+\varkappa) e^{-\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{2\varkappa\pi},$$

$$(172.) \quad \int_0^\infty x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1+x^2}{2\varkappa x}} \partial x = e^{-\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{2\varkappa\pi},$$

$$(173.) \quad \int_0^\infty x^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1+x^2}{2\varkappa x}} \partial x = (1+\varkappa) e^{-\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{2\varkappa\pi}$$

Die beiden letzten Integrale hat Euler gefunden (Inst. Calc. int. T. IV. p. 415.). Bezeichnet man dieselben respective durch A und B; so ist

$$A:B = 1:1+\varkappa.$$

Euler giebt dieses Verhältniß a. a. O. fehlerhaft an.

Für

$$x = \frac{y^2}{s}, \quad x^{-\frac{1}{2}} = y^{-1}s^{\frac{1}{2}}, \quad \partial x = \frac{2y\,\partial y}{s}$$

erhält man nach (168.):

$$\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{s^2}{y^2}} \partial y = e^{-2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

und, wenn man $s = \frac{\alpha}{2}$ setzt:

$$\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{\alpha^2}{4y^2}} \partial y = \tfrac{1}{2}e^{-\alpha}\sqrt{\pi}.$$

Also

$$\int_0^\infty \frac{\partial x \cos \alpha x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-\alpha},$$

wie vorher.

49. Wir betrachten nun das merkwürdige bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2},$$

wo man immer annehmen kann, daß r kleiner als die Einheit ist, weil im entgegengesetzten Falle $\frac{1}{\varrho}$, wo $\varrho < 1$, für r gesetzt werden könnte, wodurch das Integral auf ein Integral derselben Form gebracht werden würde, in welchem nun $\varrho < 1$. Durch Entwickelung in eine Reihe nach Potenzen von r findet man leicht, wenn wir das obige bestimmte Integral der Kürze wegen $= X$ setzen:

$$X=\int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}(\sin 2\alpha x+r\sin 4\alpha x+r^2\sin 6\alpha x+\ldots);$$

folglich nach (163.)

$$X=\frac{\pi}{2}(e^{-2\alpha a}+re^{-4\alpha a}+r^2e^{-6\alpha a}+r^3e^{-8\alpha a}+\ldots),$$

d. i.

$$(174.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2\alpha a}-r},$$

$$(175.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha x}{1+2r\cos 2\alpha x+r^2}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2\alpha a}+r}.$$

Also für $r=1$:

$$(176.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x\cot\alpha x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2\alpha a}-1},$$

$$(177.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x\,\mathrm{tang}\,\alpha x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2\alpha a}+1}.$$

Durch Addition der Gleichungen (174.) und (175.) erhält man:

$$2(1+r^2)\int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha x}{(1+r^2)^2-4r^2\cos 2\alpha x^2}=\frac{\pi e^{2\alpha a}}{e^{4\alpha a}-r^2},$$

also, wenn man

$$\cos 2\alpha x^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 4\alpha x$$

setzt:

$$\int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha x}{1-2r^2\cos 4\alpha x+r^4}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{1+r^2}\cdot\frac{e^{2\alpha a}}{e^{4\alpha a}-r^2}$$

und r für r^2, α für 2α gesetzt:

$$(178.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{\sin\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{1+r}\cdot\frac{e^{\alpha a}}{e^{2\alpha a}-r}.$$

Also für $r=1$:

$$(179.)\quad \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{\sin\alpha x}=\frac{\pi e^{\alpha a}}{e^{2\alpha a}-1}.$$

Aus (174.) folgt:

$$r\int_0^\alpha \partial\alpha \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2} \cdot \frac{\sin 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2} = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\alpha \frac{r\partial\alpha}{e^{2\alpha a}-r}.$$

Aber

$$\int_0^\alpha \frac{r\partial\alpha}{e^{2\alpha a}-r} = \int_0^\alpha \frac{re^{-2\alpha a}\partial\alpha}{1-re^{-2\alpha a}} = \frac{1}{2a}\int_0^\alpha \frac{\partial u}{u},$$

wenn wir

$$1-re^{-2\alpha a} = u$$

setzen. Also

$$\int_0^\alpha \frac{r\partial\alpha}{e^{2\alpha a}-r} = \frac{1}{2a} l \frac{1-re^{-2\alpha a}}{1-r}.$$

Ferner ist bekanntlich

$$\int_0^\alpha \partial\alpha \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2} \cdot \frac{\sin 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} \int_0^\alpha \frac{x\partial\alpha \sin 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} \int_0^\alpha \frac{\partial z}{4rz},$$

wenn wir

$$1-2r\cos 2\alpha x + r^2 = z$$

setzen. Also

$$\int_0^\alpha \partial\alpha \int_0^\infty \frac{x\partial x}{a^2+x^2} \cdot \frac{\sin 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2}$$

$$= \frac{1}{4r}\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}\, l \frac{1-2r\cos 2\alpha x+r^2}{(1-r)^2}$$

und folglich nach dem Obigen

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}\, l \frac{1-2r\cos 2\alpha x+r^2}{(1-r)^2} = \frac{\pi}{a}\, l \frac{1-re^{-2\alpha a}}{1-r},$$

d. i.

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}\, l(1-2r\cos 2\alpha x+r^2) - 2l(1-r).\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{a} l(1-re^{-2\alpha a}) - \frac{\pi}{a} l(1-r).$$

Aber nach (162.) für $\alpha=0$:

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a},\quad 2l(1-r).\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a} l(1-r).$$

Folglich

$$(180.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}\, l(1-2r\cos 2\alpha x+r^2) = \frac{\pi}{a} l(1-re^{-2\alpha a})$$

und, wenn man $-r$ für r setzt:

$$(181.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}\, l(1+2r\cos 2\alpha x+r^2) = \frac{\pi}{a} l(1+re^{-2\alpha a}).$$

Für $r=1$ wird:

$$(182.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l(2-2\cos 2\alpha x) = \frac{\pi}{a} l(1-e^{-2\alpha a}),$$

$$(183.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l(2+2\cos 2\alpha x) = \frac{\pi}{a} l(1+e^{-2\alpha a}).$$

Aber $2-2\cos 2\alpha x = 4\sin \alpha x^2$; also

$$\frac{\pi}{a} l(1-e^{-2\alpha a}) = 2\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l\sin \alpha x + 2l2.\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l\sin \alpha x + \frac{\pi}{a} l2 \quad (162.).$$

Folglich

$$(184.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l\sin \alpha x = \frac{\pi}{2a} l\frac{1-e^{-2\alpha a}}{2}.$$

Setzt man

$$2+2\cos 2\alpha x = 4\cos \alpha x^2;$$

so erhält man ganz eben so aus (183.):

$$(185.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l\cos \alpha x = \frac{\pi}{2a} l\frac{1+e^{-2\alpha a}}{2}.$$

Subtrahirt man (185.) von (184.); so erhält man:

$$(186.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} l\operatorname{tang} \alpha x = \frac{\pi}{2a} l\frac{e^{2\alpha a}-1}{e^{2\alpha a}+1}.$$

Differentiirt man (180.) und (181.) nach r; so wird:

$$(187.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} . \frac{r-\cos 2\alpha x}{1-2r\cos 2\alpha x+r^2} = -\frac{\pi}{2a} . \frac{1}{e^{2\alpha a}-r},$$

$$(188.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2} . \frac{r+\cos 2\alpha x}{1+2r\cos 2\alpha x+r^2} = \frac{\pi}{2a} . \frac{1}{e^{2\alpha a}+r}.$$

Mehrere der hier mitgetheilten bestimmten Integrale hat Bidone gefunden in den Mém. de l'Académie de Turin. 1812.

50. Größere Ausführlichkeit in der Entwickelung der Werthe bestimmter Integrale gestattet hier der Raum nicht, weil wir denselben noch besonders einer wichtigen hiermit in Verbindung stehenden allgemeinen Untersuchung widmen müssen. Zur Vervollständigung dieses Artikels dient vorzüglich der Artikel Elliptische Functionen. Außerdem s. m. vorzüglich Euleri Inst. calc. int. T. I. Cap. VIII. IX. T. IV. Abhandlungen von Euler in den Nov. Comm. Petrop. T. XVI. XIX. Legendre Exercices de calcul intégral. T. I—III. Paris. 1811—1816, ein Werk, welches fast ganz den bestimmten Integralen gewidmet ist. Mehrere Abhandlungen von Cauchy in den Annales de Mathém. T. XVI. p. 97. T. XVII. p. 84., dem Journal de l'école polytechn. Cap. XIX, dem Bulletin de la Société philomatique. 1814. 1817. 1818. 1822., dem Bulletin des sciences. Avril. 1825. Résumé des leçons

données a l'école polytechn. par Cauchy. T. I. Paris. 1823. Leçon 21—25. 32—35. Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires par Cauchy. Paris. 1825. Cauchy Exercioes de Mathématiques an vielen Orten. Abhandlungen von Poisson in dem Journal de l'école polytechn. Cah. XVI. XVII. XVIII., Bulletin de la Société philomatique. 1815, den Mémoires de la classe des sciences mathématiques de l'Institut. 1811. 2e partie, und den Mémoires de l'Académie des sciences. 1816., von Bidone und Plana in den Mémoires de l'Acad. de Turin. T. XXIII. 1812., einen Aufsatz von Dirichlet in Crelles Journal. B. IV. S. 94., und von dem Verfasser dieser Zusätze in demselben Journal B. VIII. S. 146. Außerdem gehören hierher alle Schriften, welche Anwendungen der Integralrechnung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Naturwissenschaften enthalten, von denen wir hier nur unter vielen andern, als vorzüglich viele bestimmte Integrale enthaltend, Kramp Analyse des réfractions astronomiques. Leips. 1798., Laplace Théorie analytique des Probabilités. Trois. éd. Paris. 1820., Fourier Théorie de la chaleur. Paris. 1822. erwähnen wollen.

51. Mit der Theorie der bestimmten Integrale steht die allgemeine Theorie der Entwickelung einer jeden Function in eine nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen ihrer veränderlichen Größe fortschreitende Reihe, womit sich namentlich in neuerer Zeit die Mathematiker vielfach beschäftigt haben, in unmittelbarer Verbindung. Man gelangt zu dieser Entwickelung gewöhnlich auf folgende Art, wobei wir von der Entwickelung einiger bestimmten Integrale ausgehen müssen. Es ist nämlich, wenn α eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, die nicht $=0$ ist:

$$\int \sin\alpha x\,\partial x = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x,\ \int_{-\pi}^{+\pi}\sin\alpha x\,\partial x = 0\,;$$

$$\int \cos\alpha x\,\partial x = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x,\ \int_{-\pi}^{+\pi}\cos\alpha x\,\partial x = 0\,.$$

Nur, wenn $\alpha=0$ ist, wird:

$$\int \cos\alpha x\,\partial x = x,\ \int_{-\pi}^{+\pi}\cos\alpha x\,\partial x = 2\pi\,.$$

Ferner ist

$$\sin mx\cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2},$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}.$$

Also, wenn m nicht $=\pm n$ ist, nach dem Vorhergehenden:

$$(189.)\quad \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx \,\partial x = 0\,, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \,\partial x = 0\,, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \,\partial x = 0\,. \end{cases}$$

Für $m = \pm n$ aber erhält man:

$$(190.)\quad \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \,\partial x = \pm \pi\,, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \,\partial x = \pi\,. \end{cases}$$

Ist endlich $m = n = 0$; so wird

$$(191.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \,\partial x = 2\pi\,.$$

Sey nun für die beliebige Function $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots\ldots + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots\ldots,$$

so ist

$$\varphi(x)\partial x = A_0 \partial x + A_1 \cos x \partial x + A_2 \cos 2x \partial x + \ldots\ldots + B_1 \sin x \partial x + B_2 \sin 2x \partial x + \ldots\ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\partial x = 2A_0\pi\,,\ A_0 = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,\partial x\,.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten obiger Gleichung zuerst mit $\cos nx\partial x$, dann mit $\sin nx\partial x$, und nimmt die Integrale zwischen den Gränzen $-\pi$ und $+\pi$; so erhält man leicht nach den vorher bewiesenen Formeln:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos nx \partial x = A_n\pi\,,\ A_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos nx \partial x\,;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin nx \partial x = B_n\pi\,,\ B_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin nx \partial x\,.$$

Also, wenn man zugleich unter dem Integralzeichen α für x schreibt:

$$(192.)\quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\,\partial\alpha + \frac{1}{\pi} \begin{cases} \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos\alpha\partial\alpha + \cos 2x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos 2\alpha\,\partial\alpha \\ \qquad + \ldots\ldots \\ \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin 2\alpha\,\partial\alpha \\ \qquad + \ldots\ldots \end{cases}$$

Gegen die hier gegebene Entwickelung dieser merkwürdigen Reihe würden sich jedoch verschiedene Einwendungen machen lassen, da

schon die willkührliche Annahme der Form der in Rede stehenden Reihe Zweifeln genug Raum giebt. Wir geben daher hier noch einen directen Beweis dieser wichtigen Reihe, indem wir dabei vorzüglich Herrn Lejeune-Dirichlet in Crelles Journal d. r. u. a. M. B. IV. S. 157. folgen.

52. Es kommt dabei zunächst auf eine nähere Betrachtung des bestimmten Integrals

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$

an, rücksichtlich der Gränze, welcher sich dieses Integral nähert, wenn i, welches stets als positiv angenommen werden soll, wächst. Wir setzen hierbei voraus, daß h positiv und nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$ sey, und daß die Function $f(\beta)$ zwischen den Gränzen $\beta=0$, $\beta=h$ stets continuirlich bleibe, d. h. daß diese Function für jeden Werth von β zwischen den angegebenen Gränzen einen endlichen bestimmten Werth habe, und daß die Differenz $f(\beta+\varepsilon) - f(\beta)$ sich der Gränze Null fortwährend nähere, wenn ε abnimmt, und dieser Gränze beliebig nahe kommen könne, wenn nur ε klein genug genommen wird. Es müssen nun folgende Fälle unterschieden werden.

I. Die Function $f(\beta)$ bleibe zwischen den Gränzen $\beta=0$, $\beta=h$ stets positiv, und nehme von $\beta=0$ bis $\beta=h$ fortwährend ab, so daß also $f(p)-f(q)$ und $p-q$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, wenn p und q zwischen den angegebenen Gränzen liegen. Sey $\frac{r\pi}{i}$ das größte in h enthaltene Vielfache von $\frac{\pi}{i}$, so daß also $\frac{(r+1)\pi}{i} > h$ ist. Nach (6.) ist

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta = \int_0^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta,$$
$$+\int_{\frac{\pi}{i}}^{\frac{2\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta,$$
$$+\int_{\frac{2\pi}{i}}^{\frac{3\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\int_{\frac{r\pi}{i}}^{h} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$= I_0 + I_1 + I_2 + \ldots + I_{r-1} + I_r.$$

Die Glieder dieser Reihe sind abwechselnd positiv und negativ. Es ist nämlich allgemein, wenn wir der Kürze wegen im Folgenden immer $\frac{\pi}{i} = \pi'$ setzen:

$$I_{2n} = \int_{2n\pi'}^{(2n+1)\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta ,$$

$$I_{2n+1} = \int_{(2n+1)\pi'}^{(2n+2)\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta .$$

Da nun nach der Voraussetzung zwischen den Gränzen, zwischen welchen die Integrale genommen werden, $f(\beta)$ und $\sin\beta$ stets positiv sind; so ist auch $\frac{f(\beta)}{\sin\beta}$ zwischen diesen Gränzen stets positiv. An den äußersten Gränzen der beiden obigen Integrale ist aber respective

$$\sin i\beta = \sin 2ni\pi' = \sin 2n\pi ,$$
$$\sin i\beta = \sin(2n+1)i\pi' = \sin(2n+1)\pi ;$$

und

$$\sin i\beta = \sin(2n+1)i\pi' = \sin(2n+1)\pi ,$$
$$\sin i\beta = \sin(2n+2)i\pi' = \sin(2n+2)\pi .$$

Also ist offenbar

$$\frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)$$

zwischen den Gränzen $\beta = 2n\pi'$, $\beta = (2n+1)\pi'$ immer positiv, zwischen den Gränzen $\beta = (2n+1)\pi'$ und $\beta = (2n+2)\pi'$ dagegen stets negativ. Folglich ist nach (5.) I_{2n} positiv, I_{2n+1} dagegen negativ.

Ferner läßt sich auch leicht zeigen, daß, ohne Rücksicht auf das Zeichen, immer $I_{n-1} > I_n$ ist. Es ist nämlich

$$I_{n-1} = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta ,$$

$$I_n = \int_{n\pi'}^{(n+1)\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta ,$$

wobei wir zuerst $n < r$ setzen. In dem zweiten Integrale setze man $\pi' + \beta' = \beta$, $\partial\beta' = \partial\beta$; so ist, jenachdem $\beta = n\pi'$ oder $= (n+1)\pi'$ ist, respective $\pi' + \beta' = n\pi'$, $\pi' + \beta' = (n+1)\pi'$; $\beta' = (n-1)\pi'$, $\beta' = n\pi'$. Also

$$I_n = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin(\pi + i\beta')}{\sin(\pi' + \beta')} f(\pi' + \beta')\partial\beta' ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$I_{n-1} = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta ,$$

$$I_n = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin(\pi + i\beta)}{\sin(\pi' + \beta)} f(\pi' + \beta)\partial\beta ,$$

oder auch, weil $\sin(\pi + i\beta) = -\sin i\beta$:

$$I_{n-1} = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta,$$

$$I_n = -\int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin(\pi'+\beta)} f(\pi'+\beta)\partial\beta,$$

wodurch man den Vortheil erlangt hat, daß nun beide Integrale zwischen denselben Gränzen genommen sind. Da i immer positiv ist, so ist auch π' positiv. β ist zwischen den Gränzen $(n-1)\pi'$ und $n\pi'$, $\pi'+\beta$ also zwischen den Gränzen $n\pi'$ und $(n+1)\pi'$ enthalten. Folglich ist, weil $n < r$ ist, offenbar sowohl β, als auch $\pi'+\beta$, $\overline{\overline{<}}\, r\pi'$, $\overline{\overline{<}}\, \frac{r\pi}{i}$, d. i. immer $< \frac{1}{2}\pi$. Folglich ist nach der Voraussetzung

$$f(\pi'+\beta) < f(\beta),$$

dagegen

$$\sin(\pi'+\beta) > \sin\beta;$$

also

$$\frac{f(\pi'+\beta)}{\sin(\pi'+\beta)} < \frac{f(\beta)}{\sin\beta},$$

$$\frac{\sin i\beta}{\sin(\pi'+\beta)} f(\pi'+\beta) < \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta);$$

also, ohne Rücksicht auf die Zeichen, $I_{n-1} > I_n$. Für $n = r$ ist

$$I_{r-1} = \int_{(r-1)\pi'}^{r\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta,$$

$$I_r = \int_{r\pi'}^{h} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta.$$

Folglich, auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$I_{r-1} = \int_{(r-1)\pi'}^{r\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta,$$

$$I_r = -\int_{(r-1)\pi'}^{h-\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin(\pi'+\beta)} f(\pi'+\beta)\partial\beta.$$

Nach der Voraussetzung ist $r\pi' \overline{\overline{<}}\, h$, $(r+1)\pi' > h$, $r\pi' > h - \pi'$. Aber, wie vorher, ohne Rücksicht auf die Zeichen:

$$\int_{(r-1)\pi'}^{h-\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta > \int_{(r-1)\pi'}^{h-\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin(\pi'+\beta)} f(\pi'+\beta)\partial\beta;$$

folglich um so mehr:

$$\int_{(r-1)\pi'}^{r\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta > \int_{(r-1)\pi'}^{h-\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin(\pi'+\beta)} f(\pi'+\beta)\partial\beta;$$

d. i. $I_{r-1} > I_r$, w. z. b. w.

Da $\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}$ zwischen den Gränzen, zwischen welchen sämmtliche vorhergehende Integrale genommen werden, wie aus dem Obigen

unmittelbar hervorgeht, immer einerlei Zeichen behält; so folgt aus dem in d. Z. in dem Art. Mittel (11.) bewiesenen Lehrsatze, daß

$$I_{n-1} = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial\beta = \varrho_{n-1} \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$$

ist, wobei ϱ_{n-1} eine Größe bezeichnet, welche $< f\{(n-1)\pi'\}$, dagegen $> f(n\pi')$ ist. Setzen wir also

$$I'_{n-1} = \int_{(n-1)\pi'}^{n\pi'} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta;$$

so ist

$$I_{n-1} = \varrho_{n-1} I'_{n-1}.$$

Um die Gränze zu finden, welcher sich I'_{n-1} nähert, wenn i wächst, indem n ungeändert bleibt, setze man $\frac{\gamma}{i}$ für β; so ist

$$\partial\beta = \frac{\partial\gamma}{i}.$$

Für $\beta = n\pi'$ und $\beta = (n-1)\pi'$ ist respective $\gamma = n\pi$ und $\gamma = (n-1)\pi$. Also

$$I'_{n-1} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin \gamma}{i \sin\left(\frac{\gamma}{i}\right)} \partial\gamma.$$

Nimmt nun, indem n ungeändert bleibt, i zu; so nähert sich offenbar I'_{n-1} der Gränze

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma,$$

deren absoluten Werth wir durch $\varkappa_{n-1}$ bezeichnen wollen. Es erhellet leicht, daß

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma = \varkappa_0,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma = -\varkappa_1,$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma = \varkappa_2,$$

$$\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma = -\varkappa_3,$$

u. s. f. u. s. f.

ist, und daß $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ eine abnehmende Reihe bilden. Auch ist bekanntlich

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \partial\gamma + \ldots$$

$$= \varkappa_0 - \varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3 + \varkappa_4 - \ldots,$$

und nach (65.):

$$\tfrac{1}{2}\pi = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \ldots\ldots$$

Setzen wir nun ferner

$$I'_0 = K_0,\ I'_1 = -K_1,\ I'_2 = K_2,\ I'_3 = -K_3,\ \ldots\ldots;$$

so ist nach dem Obigen

$$I_0 = \varrho_0 K_0,\ I_1 = -\varrho_1 K_1,\ I_2 = \varrho_2 K_2,\ I_3 = -\varrho_3 K_3,\ \ldots\ldots$$

Also

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$= \varrho_0 K_0 - \varrho_1 K_1 + \varrho_2 K_2 - \varrho_3 K_3 + \varrho_4 K_4 - \ldots\ldots,$$

wo nun nach dem Obigen

$$\varrho_0 K_0,\ \varrho_1 K_1,\ \varrho_2 K_2,\ \varrho_3 K_3,\ \ldots\ldots$$

sämmtlich positiv sind, und eine abnehmende Reihe bilden, deren Gliederzahl offenbar desto größer ist, je größer i genommen wird. Sey nun α eine beliebige ungerade Zahl, die, wie sich auch i ändern mag, als constant betrachtet wird; so ist, da man i offenbar immer so groß nehmen kann, daß die Anzahl der Glieder obiger Reihe größer als $\alpha + 1$ ist:

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$= \left\{\varrho_0 K_0 - \varrho_1 K_1 + \varrho_2 K_2 - \varrho_3 K_3 + \ldots - \varrho_\alpha K_\alpha\right\}$$
$$+ \left\{\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1} - \varrho_{\alpha+2} K_{\alpha+2} + \varrho_{\alpha+3} K_{\alpha+3} - \varrho_{\alpha+4} K_{\alpha+4} + \ldots\right\}$$
$$= \Sigma + \Sigma'.$$

Die Größen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\alpha$ sind respective zwischen den Gränzen

$$f(0),\ f(\pi');$$
$$f(\pi'),\ f(2\pi');$$
$$f(2\pi'),\ f(3\pi');$$
$$f(3\pi'),\ f(4\pi');$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(\alpha\pi'),\ f((\alpha+1)\pi')$$

enthalten, und nähern sich also, weil π' sich der Gränze 0 nähert, wenn i ohne Ende wächst, sämmtlich der Gränze $f(0)$, vorausgesetzt, daß α stets ungeändert bleibt. Die Größen K_0, K_1, K_2, K_3, ... K_α nähern sich, unter denselben Voraussetzungen, respective den Gränzen $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_\alpha$. Also nähert sich, wenn i wächst, die Reihe

$$\Sigma = \varrho_0 K_0 - \varrho_1 K_1 + \varrho_2 K_2 - \varrho_3 K_3 + \ldots - \varrho_\alpha K_\alpha$$

der Gränze

$$(x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \ldots - x_\alpha)\, f(0) = S^\alpha f(0),$$

und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden.

Ferner ist

$$\Sigma = \left\{\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1} - \varrho_{\alpha+2} K_{\alpha+2}\right\} + \left\{\varrho_{\alpha+3} K_{\alpha+3} - \varrho_{\alpha+4} K_{\alpha+4}\right\} + \ldots$$
$$= \varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1} - \left\{\varrho_{\alpha+2} K_{\alpha+2} - \varrho_{\alpha+3} K_{\alpha+3}\right\} - \left\{\varrho_{\alpha+4} K_{\alpha+4} - \varrho_{\alpha+5} K_{\alpha+5}\right\} + \ldots,$$

so daß also diese Reihe, da ihre einzelnen Glieder nach dem Obigen fortwährend abnehmen, so wie ihr erstes Glied $\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1}$ positiv, und kleiner als dieses Glied ist. Die Gränze von $\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1}$, wenn i wächst, ist $\varkappa_{\alpha+1} f(0)$. Denkt man sich, daß i wächst, so wird in $\Sigma + \Sigma$ der erste Theil sich immer mehr und mehr der Gränze $S_\alpha f(0)$ nähern, und Σ wird kleiner als $\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1}$ seyn. Zugleich wird sich aber auch $\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1}$ seiner Gränze immer mehr und mehr nähern, und man wird sich in jedem Falle $\varrho_{\alpha+1} K_{\alpha+1}$ derselben so nahe gebracht denken können, daß Σ auch kleiner als diese Gränze $\varkappa_{\alpha+1} f(0)$ ist, welches für jedes α gilt. Läßt man aber α zunehmen, so wird nach dem Obigen $\varkappa_{\alpha+1}$, also auch $\varkappa_{\alpha+1} f(0)$, immer kleiner und kleiner werden, und sich der 0 immer mehr und mehr nähern, so daß man also i, und zugleich α, offenbar immer groß genug nehmen kann, daß Σ kleiner wird als jede gegebene, noch so kleine, Größe. Zugleich übersieht man, daß die Gränze, welcher

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

sich nähert, wenn i wächst, einerlei ist mit der Gränze, welcher $S_\alpha f(0)$ sich nähert, wenn α wächst. Die Gränze aber, welcher

$$S_\alpha = \varkappa_0 - \varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3 + \ldots - \varkappa_\alpha$$

sich nähert, wenn α wächst, ist, da nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}\pi = \varkappa_0 - \varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3 + \varkappa_4 - \ldots,$$

und diese Reihe eine convergirende Reihe ist, $= \frac{1}{2}\pi$, so daß also die Gränze, welcher das in Rede stehende Integral sich nähert, wenn i wächst, $= \frac{1}{2}\pi f(0)$ ist.

II. Man übersieht leicht, daß der vorhergehende Beweis auch für den Fall gilt, wenn die Function $f(\beta)$ zwischen den Gränzen $\beta = 0$, $\beta = h$ constant und der Einheit gleich ist, indem nämlich der Beweis vorzüglich darauf beruht, daß die Integrale, in welche

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

zerlegt worden, abwechselnd positiv und negativ sind, und eine abnehmende Reihe bilden. Beides findet aber, wie man sogleich übersieht, auch Statt, wenn $f(\beta)$ zwischen den Gränzen $\beta = 0$, $\beta = h$ stets $= 1$ ist, da die Abnahme der einzelnen Integrale schon allein durch den Nenner $\sin\beta$ bedingt wird. Die Gränze, welcher sich, wenn i wächst,

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta,$$

für $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$, nähert, ist also $= \frac{1}{2}\pi$, da $f(0) = 1$ ist, und also die Gränze, welcher, für jede positive oder negative Constante a, das Integral

$$\int_0^h \frac{a \sin i\beta}{\sin\beta} \partial\beta,$$

wo ebenfalls $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$, sich nähert, wenn i wächst, $= \frac{1}{2} a\pi$.

III. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Function $f(\beta)$, welche zwischen den Gränzen $\beta = 0$, $\beta = h$, wo h immer $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$ ist, continuirlich ist, von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ zwar immer abnehme, aber nicht immer positiv sey. In diesem Falle denke man sich eine positive Größe a von hinreichender Größe, daß $a + f(\beta)$ zwischen den angegebenen Gränzen immer positiv sey; so ist klar, daß die Function $a + f(\beta)$, so wie $f(\beta)$, von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ stetig abnehmen wird, und folglich, weil sie auch immer positiv ist, die Anwendung von I. und II. gestattet. Die Gränze, welcher

$$\int_0^h \left\{a + f(\beta)\right\} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} \partial\beta$$

sich nähert, wenn i wächst, ist nach I. $= \frac{1}{2}\left\{a + f(0)\right\}\pi$, und nach II. die Gränze, welcher

$$\int_0^h \frac{a \sin i\beta}{\sin\beta} \partial\beta$$

sich nähert, wenn i wächst, $= \frac{1}{2} a\pi$. Also ist die Gränze, welcher

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta) \partial\beta$$

$$= \int_0^h \left\{a + f(\beta)\right\} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} \partial\beta - \int_0 \frac{a \sin i\beta}{\sin\beta} \partial\beta$$

sich nähert, wenn i wächst,

$$= \tfrac{1}{2}\{a + f(0)\}\pi - \tfrac{1}{2} a\pi = \tfrac{1}{2}\pi f(0).$$

IV. Nimmt $f(\beta)$ von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ fortwährend zu, so nimmt $-f(\beta)$ von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ fortwährend ab. Folglich ist nach III. die Gränze, welcher

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} \left\{-f(\beta)\right\} \partial\beta = -\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta) \partial\beta$$

sich nähert, wenn i wächst, $= \frac{1}{2}\left\{-f(0)\right\}\pi = -\frac{1}{2}\pi f(0)$. Also ist die Gränze, welcher

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta) \partial\beta,$$

nter denselben Voraussetzungen sich nähert, offenbar $= \frac{1}{2}\pi f(0)$.

V. Wir wollen nun allgemein das Integral

$$\int_g^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$

betrachten, indem wir annehmen, daß g und h positiv sind, daß $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$, $g < h$, und die Function $f(\beta)$ zwischen den Gränzen, zwischen denen das Integral genommen werden soll, stetig ist. Größerer Deutlichkeit wegen nehmen wir einige geometrische Betrachtungen zu Hülfe. Weil $f(\beta)$ zwischen den Gränzen $\beta = g$, $\beta = h$ stetig ist; so kann man sich diese Function zwischen diesen Gränzen durch eine krumme Linie dargestellt denken, deren Abscissen die Werthe von β, die Ordinaten aber die entsprechenden Werthe von $f(\beta)$ sind. Denkt man sich nun das Intervall $h - g$ in eine unendlich große Anzahl unendlich kleiner Theile getheilt, deren jeden wir durch Θ, ihre Anzahl dagegen durch n, bezeichnen wollen; so ist

$$\int_g^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta = \int_g^{g+\Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$+ \int_{g+\Theta}^{g+2\Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$+ \int_{g+2\Theta}^{g+3\Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \int_{g+(n-1)\Theta}^{h} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta .$$

Ueberhaupt kann nun der dem Intervall

$$g + (x-1)\Theta,\ g + x\Theta$$

entsprechende Theil der Curve, weil derselbe als unendlich klein angenommen worden, als eine gerade Linie betrachtet werden, so daß also, wenn wir die Gleichung dieser geraden Linie durch

$$y = a\beta + b$$

bezeichnen, die Werthe der Functionen $f(\beta)$ und $a\beta + b$ in dem Intervall

$$\beta = g + (x-1)\Theta,\ \beta = g + x\Theta$$

als mit einander zusammenfallend betrachtet werden können, woraus sich unmittelbar die Gleichung

$$\int_{g+(x-1)\Theta}^{g\ \ \Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta = \int_{g+(x-1)\Theta}^{g+x\Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} (a\beta + b)\partial\beta$$

ergiebt. Da aber $a\beta + b$ offenbar eine Function von β ist, welche von $\beta = 0$ an bis zu jeder beliebigen Gränze offenbar entweder stetig abnimmt, oder stetig zunimmt; so ist nach I — IV.:

$$\int_0^{g+(x-1)\Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} (a\beta + b)\partial\beta = \tfrac{1}{2}b\pi ,$$

$$\int_0^{g+x\Theta} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} (a\beta + b)\partial\beta = \tfrac{1}{2}b\pi .$$

Aber

$$\int_0^{g+\varkappa\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta$$

$$=\int_0^{g+(\varkappa-1)\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta+\int_{g+(\varkappa-1)\theta}^{g+\varkappa\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta\,,$$

$$\int_{g+(\varkappa-1)\theta}^{g+\varkappa\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta$$

$$=\int_0^{g+\varkappa\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta-\int_0^{g+(\varkappa-1)\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta\,,$$

woraus nach dem Vorhergehenden sogleich folgt:

$$\int_{g+(\varkappa-1)\theta}^{g+\varkappa\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta=0\,,$$

$$\int_{g+(\varkappa-1)\theta}^{g+\varkappa\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=0\,.$$

Es ist also auch

$$\int_g^{g+\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=0\,,$$

wobei aber vorausgesetzt worden, daß $g>0$ ist. Für $g=0$ wäre

$$\int_0^{\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=\int_0^{\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta\,.$$

Aber

$$\int_0^{\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}(a\beta+b)\partial\beta=\tfrac{1}{2}b\pi\,.$$

Also

$$\int_0^{\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=\tfrac{1}{2}b\pi\,.$$

Da aber $f(\beta)$ und $a\beta+b$ in dem unendlich kleinen Intervall $\beta=0$, $\beta=\theta$ gleiche Werthe haben; so ist $b=f(0)$. Folglich

$$\int_0^{\theta}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=\tfrac{1}{2}\pi f(0)\,.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst des Obigen sogleich

$$\int_g^{h}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=0\,,$$

wenn $g>0$ ist. Dagegen

$$\int_0^{h}\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}f(\beta)\partial\beta=\tfrac{1}{2}\pi f(0)\,.$$

Man bemerke, daß hier, der Kürze wegen, die Integrale stets ihren respectiven Gränzen, für wachsende i, gleich gesetzt worden sind.

Da hier bloß die Function $f(\beta)$ zwischen den Gränzen $\beta = g$, $\beta = h$ als stetig angenommen worden ist, ohne die Betrachtung durch besondere Annahmen über das Wachsen und Abnehmen derselben zu modificiren; so ergiebt sich jetzt folgendes wichtige und merkwürdige Theorem:

Wenn g und h positiv sind, $h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$, $g < h$, und die Function $f(\beta)$ zwischen den Gränzen $\beta = g$, $\beta = h$ stetig ist; so nähert das bestimmte Integral

$$\int_g^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial\beta ,$$

wenn i wächst, sich fortwährend der Gränze 0; nur in dem Falle, wenn g selbst $= 0$ ist, ist die Gränze, welcher sich dieses Integral, indem i wächst, nähert, $= \frac{1}{2}\pi f(0)$.

Auch ist klar, daß dieser Satz noch gilt, wenn die Function $f(\beta)$ zwar zwischen den gegebenen Gränzen stetig bleibt, an einer dieser Gränzen selbst aber, oder an beiden, eine Unterbrechung der Continuität der Function Statt findet; nur muß man, wenn diese Unterbrechung der Continuität bei der Gränze g eintritt, wenn $g = 0$ ist, für $\frac{1}{2}\pi f(0)$ offenbar die Gränze setzen, welcher sich $\frac{1}{2}\pi f(\varepsilon)$ nähert, wenn ε, das immer als positiv angenommen wird, sich der Gränze Null nähert, oder unendlich klein wird.

VI. Wir wollen nun versuchen, die Reihe

$$s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \partial\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos \alpha \, \partial\alpha + \cos 2x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos 2\alpha \, \partial\alpha + \ldots \\ \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin \alpha \, \partial\alpha + \sin 2x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin 2\alpha \, \partial\alpha + \ldots \end{array} \right.$$

zu summiren, d. h. die Gränze zu finden, welcher ihre Summe sich nähert, je mehrere ihrer Glieder vom Anfange an zu einander addirt werden, unter der Voraussetzung, daß x zwischen den Gränzen $-\pi$ und $+\pi$ liege, und daß die Function $\varphi(x)$ zwischen diesen Gränzen stetig sey. Man findet durch eine leichte Verwandlung:

$$s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \partial\alpha \left\{ \tfrac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cos 3(\alpha - x) + \ldots \right\},$$

oder, wenn man die Summe der $n + 1$ ersten Glieder dieser Reihe durch Σ bezeichnet:

$$\Sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \partial\alpha \left\{ \tfrac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos n(\alpha - x) \right\}$$

d. i. nach Thl. II. S. 532:

$$\Sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha \left\{\frac{1}{2} + \frac{\cos(\frac{1}{2}(n+1)(\alpha-x))\sin\frac{1}{2}n(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\partial\alpha,$$

wie man leicht findet, wenn man

$$\cos(\tfrac{1}{2}(n+1)(\alpha-x)) = \cos\tfrac{1}{2}\{n(\alpha-x) + (\alpha-x)\}$$

entwickelt. Es kommt nun einzig und allein darauf an, die Gränze zu finden, welcher das letzte Integral sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst.

Es ist

$$\Sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\partial\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\partial\alpha.$$

Im ersten Integrale setze man $\alpha = x - 2\beta$, $\partial\alpha = -2\partial\beta$; so ist für $\alpha = x - 2\beta = -\pi$, $\alpha = x - 2\beta = x$ respective $\beta = \frac{1}{2}(\pi + x)$, $\beta = 0$. Im zweiten Integrale setze man $\alpha = x + 2\beta$, $\partial\alpha = 2\partial\beta$; so ist für $\alpha = x + 2\beta = x$, $\alpha = x + 2\beta = \pi$ respective $\beta = 0$, $\beta = \frac{1}{2}(\pi - x)$. Also ist

$$\Sigma = -\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{0}\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x-2\beta)\partial\beta$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x-2\beta)\partial\beta$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{I + I'\right\}.$$

Betrachten wir nun zunächst das zweite Integral I'. Zuerst sey x positiv. Für $x = \pi$ ist offenbar $I' = 0$. Für $x < \pi$ ist $\frac{1}{2}(\pi - x)$ nicht $=0$ und $\overline{\overline{<}}\,\frac{1}{2}\pi$. Wäre die Function $\varphi(x+2\beta)$ zwischen den Gränzen des Integrals nicht stetig, sondern es fänden für die zwischen diesen Gränzen liegenden Werthe λ, λ_1, λ_2, ... λ_γ von β Unterbrechungen der Stetigkeit derselben Statt; so könnte man nach (6.) das Integral I' in mehrere andere zwischen den Gränzen 0, λ; λ, λ_1; λ_1, λ_2; .... λ_γ, $\frac{1}{2}(\pi - x)$ genommene bestimmte Integrale zerlegen, welche, das erste ausgenommen, nach dem in V. bewiesenen Satze sämmtlich $=0$ sind. Das erste dieser Integrale, folglich auch das Integral I', ist $= \frac{1}{2}\pi\varphi(x)$ (V.), wofür man nur $\frac{1}{2}\pi\varphi(x+\varepsilon)$, d. i. die Gränze, welcher $\frac{1}{2}\pi\varphi(x+\varepsilon)$ sich nähert, wenn ε sich der Null nähert, oder unendlich klein wird, setzen muß, wenn für $\beta = 0$ selbst eine Unterbrechung der Continuität der Function $\varphi(x + 2\beta)$, d. i. für den Werth x der veränderlichen Größe

eine Unterbrechung der Continuität der Function $\varphi(x)$ Statt finden sollte. Ist x negativ, so ist $\frac{1}{2}(\pi - x) > \frac{1}{2}\pi$. Man setze also

$$I' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x) + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta,$$

oder

$$= \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x+\varepsilon) + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\partial\beta,$$

wenn für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ Statt finden sollte. In dem letzten Integrale setze man $\beta = \pi - \gamma$, $\partial\beta = -\partial\gamma$; also für $\beta = \pi - \gamma = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \pi - \gamma = \frac{1}{2}(\pi - x)$ respective $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = \frac{1}{2}(\pi + x)$; so daß also dieses Integral

$$= -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)}\varphi(x+2\pi-2\gamma)\partial\gamma$$
$$= \int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\varphi(x+2\pi-2\gamma)\partial\gamma$$

ist, wobei man zu bemerken hat, daß n eine ganze Zahl ist. Für $x = -\pi$ findet man auf ganz ähnliche Art, wie vorher, dieses Integral $= \frac{1}{2}\pi\varphi(-\pi+2\pi) = \frac{1}{2}\pi\varphi(\pi)$, oder $= \frac{1}{2}\pi\varphi(-\pi+2\pi-\varepsilon) = \frac{1}{2}\pi\varphi(\pi-\varepsilon)$, sofern für $x = \pi$ eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ Statt finden sollte (V.). Für $x > -\pi$ ist dieses Integral $= 0$ (V.). Nimmt man alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich:

$I' = 0$ für $x = \pi$;
$I' = \frac{1}{2}\pi\varphi(-\pi+\varepsilon) + \frac{1}{2}\pi\varphi(\pi-\varepsilon)$ für $x = -\pi$;
$I' = \frac{1}{2}\pi\varphi(x+\varepsilon)$ für $x \gtreqless 0, < \pi$;
$I' = \frac{1}{2}\pi\varphi(x+\varepsilon)$ für $x < 0, > -\pi$;

mit der Bemerkung, daß ε alle Mal $= 0$ zu setzen ist, wenn für den entsprechenden Werth von x keine Unterbrechung der Continuität der Function $\varphi(x)$ Statt findet.

In dem Integral I sey zuerst x negativ. Für $x = -\pi$ ist offenbar $I = 0$. Für $x > -\pi$ ist $I = \frac{1}{2}\pi\varphi(x)$ oder $= \frac{1}{2}\pi\varphi(x-\varepsilon)$, wenn für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Continuität der Function $\varphi(x)$ Statt finden sollte. Ist x positiv, so ist $\frac{1}{2}(\pi + x) > \frac{1}{2}\pi$. Sey daher

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\varphi(x-2\beta)\,\partial\beta$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\varphi(x-2\beta)\,\partial\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x) + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\varphi(x-2\beta)\,\partial\beta\,,$$

oder

$$= \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x-\varepsilon) + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,\varphi(x-2\beta)\,\partial\beta\,,$$

wenn für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Continuität der Function $\varphi(x)$ Statt finden sollte. Für $\beta = \pi - \gamma$, $\partial\beta = -\partial\gamma$ ist $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = \frac{1}{2}(\pi - x)$, wenn respective $\beta = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \frac{1}{2}(\pi + x)$ ist. Also ist das letzte Integral

$$= -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)}\,\varphi(x-2\pi+2\gamma)\,\partial\gamma\,,$$
$$= \int_{\frac{1}{2}(\pi-x)}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,\varphi(x-2\pi+2\gamma)\,\partial\gamma\,.$$

Für $x=\pi$ ist dieses Integral $= \frac{1}{2}\pi\varphi(\pi-2\pi) = \frac{1}{2}\pi\varphi(-\pi)$, oder $= \frac{1}{2}\pi\varphi(\pi - 2\pi + \varepsilon) = \frac{1}{2}\pi\varphi(-\pi + \varepsilon)$ (V.), wenn für $x = \pi$ die Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ unterbrochen werden sollte. Für $x < \pi$ dagegen ist dieses Integral $= 0$ (V.). Es ist folglich

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\varphi(\pi-\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\pi\varphi(-\pi+\varepsilon) \text{ für } x=\pi\,;$$
$$I = 0 \text{ für } x = -\pi\,;$$
$$I = \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x-\varepsilon) \text{ für } x \overline{\overline{>}} 0,\ < \pi\,;$$
$$I = \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x-\varepsilon) \text{ für } x < 0,\ > -\pi\,;$$

unter der Bedingung, daß $\varepsilon = 0$ gesetzt wird, wenn für den entsprechenden Werth von x keine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ Statt findet.

Hieraus ergiebt sich nun:

$$I + I' = \tfrac{1}{2}\pi\{\varphi(-\pi+\varepsilon) + \varphi(\pi-\varepsilon)\}$$

für $x = -\pi$ und $x = \pi$;

$$I + I' = \tfrac{1}{2}\pi\{\varphi(x-\varepsilon) + \varphi(x+\varepsilon)\}\,,$$

für $x > -\pi$, $x < \pi$; immer unter der vorher aufgestellten Bedingung. Also ist

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\{\varphi(-\pi+\varepsilon) + \varphi(\pi-\varepsilon)\}$$

für $x = -\pi$ und $x = \pi$;

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\{\varphi(x-\varepsilon) + \varphi(x+\varepsilon)\}\,,$$

für $x > -\pi$, $x < \pi$. Je größer demnach n wird, desto mehr nähert sich Σ den hier angegebenen Gränzen, und diesen Gränzen kommt also auch die Reihe S desto näher, je mehrere ihrer

Glieder vom Anfange an summirt werden, woraus sich folgendes wichtige Theorem ergiebt:

Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha+\cos 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha+\ldots\\ \sin x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha+\sin 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha+\ldots\end{array}\right.$$

ist für jeden Werth von x, welcher $> -\pi$, $< +\pi$ ist,

$$= \tfrac{1}{2}\{\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon)\},$$

und $= \varphi(x)$, wenn für den Werth x der veränderlichen Größe keine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ Statt findet. Für $x = -\pi$ und $x = +\pi$ ist die Summe der obigen Reihe

$$= \tfrac{1}{2}\{\varphi(-\pi+\varepsilon)+\varphi(\pi-\varepsilon)\},$$

worin ebenfalls $\varepsilon = 0$ zu setzen ist, wenn für den entsprechenden Werth der veränderlichen Größe keine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ Statt findet. Zugleich ergiebt sich aus der vorhergehenden Darstellung auch unmittelbar, daß obige Reihe immer convergirend ist, welches eine sehr wichtige und merkwürdige Eigenschaft derselben ist.

Kürzer drückt man diesen Satz so aus:

Für jedes x, welches $> -\pi$, $< +\pi$ ist, ist:

$$(193.)\quad \tfrac{1}{2}\{\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos n(x-\alpha)\,\partial\alpha;$$

dagegen ist

$$(194.)\quad \tfrac{1}{2}\{\varphi(-\pi+\varepsilon)+\varphi(\pi-\varepsilon)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos n(x-\alpha)\,\partial\alpha,$$

für $x = -\pi$ und $x = +\pi$.

Der Kürze wegen wollen wir in der Folge für jedes $x > -\pi$, $< \pi$ immer

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos n(x-\alpha)\,\partial\alpha$$

setzen, unter der Bedingung, daß man, wenn $\varphi(x)$ für den Werth x seiner veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden sollte, für $\varphi(x)$ das arithmetische Mittel

$$\frac{\varphi(x-\varepsilon)+\varphi(x+\varepsilon)}{2},$$

an den Gränzen aber, für $x = -\pi$ und $x = +\pi$ für $\varphi(x)$ das arithmetische Mittel

$$\frac{\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)}{2}$$

setzen muß.

53. Sey jetzt die beliebige Function

$$f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots;$$

so ist auch

$$f(x) = \frac{A\varrho^\alpha}{\pi^\alpha}\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\alpha + \frac{B\varrho^\beta}{\pi^\beta}\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\beta + \frac{C\varrho^\gamma}{\pi^\gamma}\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\gamma + \ldots$$

$$= A'\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\alpha + B'\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\beta + C'\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\gamma + D'\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right)^\delta + \ldots$$

Wir können also

$$f(x) = \varphi\left(\frac{\pi x}{\varrho}\right) = \varphi(\Theta)$$

setzen, für

$$\Theta = \frac{\pi x}{\varrho}.$$

Für $x = \pm\varrho$ ist $\Theta = \pm\pi$; für $x > -\varrho$, $x < \varrho$ ist respective $\Theta > -\pi$, $\Theta < \pi$. Auch ist

$$\partial\Theta = \frac{\pi}{\varrho}\partial x.$$

Nach (52.) ist

$$\varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\begin{cases}\cos\Theta\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha + \cos 2\Theta\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots\\ \sin\Theta\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2\Theta\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots\end{cases}$$

wenn man nur in den beiden in (52.) bezeichneten speciellen Fällen

$$\frac{\varphi(\Theta-\varepsilon)+\varphi(\Theta+\varepsilon)}{2}$$

und

$$\frac{\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)}{2}$$

für $\varphi(\Theta)$ setzt. Also ist auch, wie nun leicht erhellet:

$$(195).\quad f(x) = \frac{1}{2\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\varrho}\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha + \cos\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha + \ldots\\ \sin\frac{\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha + \sin\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha + \ldots\end{cases}$$

für jedes x, welches $> -\varrho$, $< \varrho$ ist. Fände für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function f(x) Statt; so müßte man

$$\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2} \text{ für } f(x) \text{ setzen ;}$$

an den Gränzen aber, für $x = -\varrho$ und $x = +\varrho$, muß man

$$\frac{f(\varrho-\varepsilon)+f(-\varrho+\varepsilon)}{2}$$

für f(x) in vorstehender Gleichung setzen.

Kürzer drückt man diese Gleichung so aus:

$$(196.)\quad f(x)=\frac{1}{2\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\partial\alpha+\frac{1}{\varrho}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\cos\frac{n\pi(x-\alpha)}{\varrho}\partial\alpha$$

für $x > -\varrho$, $x < \varrho$. Dagegen

$$(197.)\quad \frac{f(\varrho-\varepsilon)+f(-\varrho+\varepsilon)}{2}$$

$$=\frac{1}{2\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\partial\alpha+\frac{1}{\varrho}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\cos\frac{n\pi(x-\alpha)}{\varrho}\partial\alpha\,,$$

für $x = -\varrho$ und $x = +\varrho$. In (196.) muß man, wie immer, in dem Falle, wenn für den Werth x der veränderlichen Größe die Stetigkeit von f(x) unterbrochen würde, das arithmetische Mittel zwischen $f(x-\varepsilon)$ und $f(x+\varepsilon)$ für f(x) setzen. Genügt die Function f(x) der Bedingung

$$f(x) = f(-x)\ ;$$

so verschwinden offenbar alle die Sinus der vielfachen Winkel involvirenden bestimmten Integrale, und es ist folglich in diesem Falle:

$$(198.)\quad f(x)=\frac{1}{2\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\varrho}\left\{\cos\frac{\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha+\cos\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho}f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha+\ldots\right\}$$

für jedes x, welches $> -\varrho$, $< \varrho$ ist. Auch ist in diesem Falle, wie leicht erhellet:

$$(199.)\quad \tfrac{1}{2}\varrho f(x)=\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\varrho}f(\alpha)\partial\alpha$$

$$+\cos\frac{\pi x}{\varrho}\int_{0}^{\varrho}f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha+\cos\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{0}^{\varrho}f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha+\ldots\,,$$

für jedes x, welches $> -\varrho$, $< \varrho$ ist. Findet für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function f(x) Statt; so muß man, wie gewöhnlich,

$$\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2}$$

für f(x) setzen.

Für $x = -\varrho$ und $x = +\varrho$ ist

$$(200.)\quad \frac{f(\varrho-\varepsilon)+f(-\varrho+\varepsilon)}{2} = \frac{1}{2\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\,\partial\alpha$$

$$+\frac{1}{\varrho}\left\{\cos\frac{\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \cos\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \ldots\right\},$$

$$\varrho\,\frac{f(\varrho-\varepsilon)+f(-\varrho+\varepsilon)}{4} = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\varrho} f(\alpha)\,\partial\alpha$$

$$+\cos\frac{\pi x}{\varrho}\int_{0}^{\varrho} f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \cos\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{0}^{\varrho} f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \ldots.$$

Nur wenn die Stetigkeit der Function $f(x)$ weder für $x = -\varrho$, noch $x = \varrho$ unterbrochen wird, werden die Summen dieser beiden Reihen im vorliegenden Falle respective $= f(\varrho)$ und $\frac{1}{2}\varrho f(\varrho)$.

Genügt die Function $f(x)$ der Bedingung

$$f(x) = -f(-x);$$

so erhellet leicht auf ganz ähnliche Weise wie vorher, daß

$$(201.)\quad f(x) =$$

$$\frac{1}{\varrho}\left\{\sin\frac{\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \sin\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \ldots\right\}$$

für jedes x, welches $> -\varrho$, $< \varrho$ ist. Findet für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt; so muß man in dieser Gleichung

$$\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2}$$

für $f(x)$ setzen. Für $x = -\varrho$ und $x = +\varrho$ ist:

$$(202.)\quad \frac{f(\varrho-\varepsilon)+f(-\varrho+\varepsilon)}{2}$$

$$= \frac{1}{\varrho}\left\{\sin\frac{\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \sin\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \ldots\right\}$$

Nur in dem Falle, wenn weder für $x = -\varrho$, noch $x = +\varrho$ eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet, wird die Summe vorstehender Reihe in diesem Falle $= 0$.

Auch erhellet leicht, daß in diesem Falle

$$(203.)\quad \tfrac{1}{2}\varrho f(x) =$$

$$\sin\frac{\pi x}{\varrho}\int_{0}^{\varrho} f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \sin\frac{2\pi x}{\varrho}\int_{0}^{\varrho} f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\,\partial\alpha + \ldots$$

ist, für jedes x, welches $> -\varrho$, $< +\varrho$ ist, wobei bei einer Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ für den Werth x der veränderlichen Größe wieder das bekannte arithmetische Mittel für $f(x)$ zu setzen ist. Für $x = -\varrho$ und $x = +\varrho$ ist:

$$(204.)\quad \varrho\,\frac{f(\varrho-\varepsilon)+f(-\varrho+\varepsilon)}{4}$$

$$= \sin\frac{\pi x}{\varrho}\int_0^\varrho f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha + \sin\frac{2\pi x}{\varrho}\int_0^\varrho f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{\varrho}\partial\alpha + \ldots$$

Nur, wenn weder für $x = -\varrho$, noch $x = +\varrho$ eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet, ist die Summe dieser Reihe $= 0$.

M. s. über diese Reihen auch eine Abhandlung von Dirksen in Crelles Journal. B. IV. S. 170., und von Cauchy in seinen Exercices de Math. 24me Livraison. p. 341. Auch noch einen Aufsatz von Dirksen in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1827.

54. Wir wollen nun diese Sätze auf einige Beispiele anwenden. Für $f(x) = x$ ist $f(x) = -f(-x)$. Also für jedes x, welches $> -\pi$, $< \pi$ ist, nach (201.):

$$\pi x = \sin x\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha\sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha\sin 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots$$

Aber

$$\int\alpha\sin n\alpha\,\partial\alpha = \alpha\int\sin n\alpha\,\partial\alpha - \int\partial\alpha\int\sin n\alpha\,\partial\alpha$$

$$= -\frac{\alpha}{n}\cos n\alpha + \frac{1}{n^2}\sin n\alpha$$

$$(205.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi}\alpha\sin n\alpha\,\partial\alpha = -\frac{2\pi}{n}(-1)^n.$$

Folglich

$$(206.)\quad \tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \ldots$$

für jedes x, welches $> -\pi$, $< \pi$ ist. Für $x = \pm\pi$ ist nach (202.) die Summe dieser Reihe $= 0$, wie es auch wirklich der Fall ist.

Auf ganz ähnliche Art hat man

$$\pi x^3 = \sin x\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^3\sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^3\sin 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots$$

$$\int\alpha^3\sin n\alpha\,\partial\alpha = \alpha^3\int\sin n\alpha\,\partial\alpha - 3\int\alpha^2\partial\alpha\int\sin n\alpha\,\partial\alpha$$

$$= -\frac{\alpha^3}{n}\cos n\alpha + \frac{3}{n}\int\alpha^2\cos n\alpha\,\partial\alpha$$

$$= -\frac{\alpha^3}{n}\cos n\alpha + \frac{3}{n}\alpha^2\int\cos n\alpha\,\partial\alpha - \frac{6}{n}\int\alpha\,\partial\alpha\int\cos n\alpha\,\partial\alpha$$

$$= -\frac{\alpha^3}{n}\cos n\alpha + \frac{3}{n^2}\alpha^2\sin n\alpha - \frac{6}{n^2}\int\alpha\sin n\alpha\,\partial\alpha$$

$$= -\frac{\alpha^3}{n}\cos n\alpha + \frac{3}{n^2}\alpha^2\sin n\alpha + \frac{6\alpha}{n^3}\cos n\alpha - \frac{6}{n^3}\sin n\alpha$$

$$(207.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \alpha^3 \sin n\alpha\, \partial\alpha = -\frac{2\pi}{n}\left\{\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right\}(-1)^n .$$

Also

$$(208.)\quad \tfrac{1}{2}x^3 = \tfrac{1}{1}\left\{\pi^2 - \frac{6}{1^2}\right\}\sin x - \tfrac{1}{2}\left\{\pi^2 - \frac{6}{2^2}\right\}\sin 2x$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left\{\pi^2 - \frac{6}{3^2}\right\}\sin 3x$$
$$- \tfrac{1}{4}\left\{\pi^2 - \frac{6}{4^2}\right\}\sin 4x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

für jedes $x > -\pi, < \pi$. Für $x = \pm\pi$ ist die Summe dieser Reihe nach dem Obigen $= 0$, wie es auch wirklich der Fall ist.

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt sich aus (206.):

$$(209.)\quad \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots,$$

die bekannte Leibnitzische Reihe.

Eben so ergiebt sich für $x = \frac{1}{2}\pi$ aus (208.):

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi)^3 = \left\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots\right\}\pi^2$$
$$- 6\left\{\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots\right\}$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi^3 - 6\left\{\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots\right\}\ (209.)$$

$$(210.)\quad \tfrac{1}{32}\pi^3 = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots.$$

Die Function x^2 genügt der Bedingung $f(x) = f(-x)$. Also ist nach (198.):

$$x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^2\,\partial\alpha$$
$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\cos x\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^2\cos\alpha\,\partial\alpha + \cos 2x\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^2\cos 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots\right\},$$

für jedes $x > -\pi, < \pi$. Aber

$$\int\alpha^2\cos n\alpha\,\partial\alpha = \frac{\alpha^2}{n}\sin n\alpha - \frac{2}{n}\int\alpha\sin n\alpha\,\partial\alpha$$
$$= \frac{\alpha^2}{n}\sin n\alpha + \frac{2\alpha}{n^2}\cos n\alpha - \frac{2}{n^3}\sin n\alpha\ ;$$

$$(211.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^2\cos n\alpha\,\partial\alpha = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n\ ;$$

$$(212.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi}\alpha^2\,\partial\alpha = \tfrac{2}{3}\pi^3 .$$

Folglich

$$x^2 = \tfrac{1}{3}\pi^2 - 4\left\{\frac{1}{1^2}\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \ldots\right\},$$

$$(213.)\quad \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{3}\pi^2 - x^2\right\} = \frac{1}{1^2}\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \ldots,$$

für jedes $x > -\pi, < \pi$. Also z. B. für $x = 0$:

$$(214.)\quad \tfrac{1}{12}\pi^2 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots,$$

eine auch anderweitig bekannte Reihe. Für $x = \pm\pi$ ist nach (200.):

$$(215.)\quad \tfrac{1}{6}\pi^2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots,$$

eine gleichfalls auch anderweitig bekannte Reihe.

55. Sey

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}};$$

so ist $f(x) = -f(-x)$. Also

$$\pi f(x) = \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots,$$

für jedes $x > -\pi, < \pi$. Es ist nun

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}\sin nx\,\partial x = \frac{\int e^x \sin nx\,\partial x - \int e^{-x}\sin nx\,\partial x}{e^\pi - e^{-\pi}},$$

$$\int e^x \sin nx\,\partial x = \sin nx\int e^x\partial x - n\int \cos nx\,\partial x\int e^x\partial x$$

$$= e^x \sin nx - n\int e^x \cos nx\,\partial x,$$

$$\int e^x \cos nx\,\partial x = \cos nx\int e^x\partial x + n\int \sin nx\,\partial x\int e^x\partial x$$

$$= e^x \cos nx + n\int e^x \sin nx\,\partial x,$$

$$\int e^x \sin nx\,\partial x + n\int e^x \cos nx\,\partial x = e^x \sin nx,$$

$$-n\int e^x \sin nx\,\partial x + \int e^x \cos nx\,\partial x = e^x \cos nx.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen findet man:

$$(216.)\quad \begin{cases} \int e^x \cos nx\,\partial x = \dfrac{e^x(\cos nx + n\sin nx)}{1+n^2}, \\ \int e^x \sin nx\,\partial x = \dfrac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2}. \end{cases}$$

Für $x = -x$, $\partial x = -\partial x$ erhält man hieraus:

$$(217.)\quad \begin{cases} \int e^{-x}\cos nx\,\partial x = -\dfrac{e^{-x}(\cos nx - n\sin nx)}{1+n^2}, \\ \int e^{-x}\sin nx\,\partial x = -\dfrac{e^{-x}(\sin nx + n\cos nx)}{1+n^2}, \end{cases}$$

(218.) $$\begin{cases} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \sin nx\,\partial x = \frac{(e^x + e^{-x}) \sin nx - n(e^x - e^{-x}) \cos nx}{(1 + n^2)(e^\pi - e^{-\pi})}, \\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \cos nx\,\partial x = \frac{(e^x + e^{-x}) \cos nx + n(e^x - e^{-x}) \sin nx}{(1 + n^2)(e^\pi - e^{-\pi})}, \end{cases}$$

(219.) $$\begin{cases} \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi + e^{-\pi}} \sin nx\,\partial x = \frac{(e^x - e^{-x}) \sin nx - n(e^x + e^{-x}) \cos nx}{(1 + n^2)(e^\pi + e^{-\pi})}, \\ \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi + e^{-\pi}} \cos nx\,\partial x = \frac{(e^x - e^{-x}) \cos nx + n(e^x + e^{-x}) \sin nx}{(1 + n^2)(e_\pi + e^{-\pi})}, \end{cases}$$

(220.) $$\begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \sin nx\,\partial x = -\frac{2n}{1 + n^2}(-1)^n, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \cos nx\,\partial x = 0. \end{cases}$$

(221.) $$\begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi + e^{-\pi}} \cos nx\,\partial x = 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi + e^{-\pi}} \cos nx\,\partial x = \frac{2(e^\pi - e^{-\pi})}{(1 + n^2)(e^\pi + e^{-\pi})}(-1)^n. \end{cases}$$

Es wird also nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}\pi \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} = \frac{\sin x}{1 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{1 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{1 + 3^2} - \frac{4 \sin 4x}{1 + 4^2} + \ldots,$$

(222.) $$\tfrac{1}{2}\pi \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} = \frac{\sin x}{1 + \frac{1}{1}} - \frac{\sin 2x}{2 + \frac{1}{2}} + \frac{\sin 3x}{3 + \frac{1}{3}} - \frac{\sin 4x}{4 + \frac{1}{4}} + \ldots,$$

für jedes x, welches $> -\pi$, $< \pi$ ist. Für $x = \pm\pi$ ist nach dem Obigen die Summe dieser Reihe $= 0$. Dieselbe ist in der Theorie der Wärme von Wichtigkeit (Fourier a. a. O. p. 231.).

Nach (221.) ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \cos nx\,\partial x = \frac{2}{1 + n^2}(-1)^n.$$

Setzen wir

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}},$$

so genügt diese Function der Bedingung

$$f(x) = f(-x).$$

Also ist für jedes $x > -\pi$, $< \pi$ nach (198.):

$$\pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\partial\alpha$$

$$+ \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos\alpha\,\partial\alpha + \cos 2x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos 2\alpha\,\partial\alpha + \ldots.$$

Aber

(223.) $$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}\,\partial x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}},$$

$$(224.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \partial x = 2 .$$

Also

$$(225.)\quad \tfrac{1}{2}\pi \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} = \tfrac{1}{2} - \frac{\cos x}{1+1^2} + \frac{\cos 2x}{1+2^2} - \frac{\cos 3x}{1+3^2} + \ldots ,$$

für jedes $x > -\pi, < \pi$.

Für $x = \pm \pi$ erhält man nach dem Obigen:

$$(226.)\quad \tfrac{1}{2}\pi \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{1+4^2} + \ldots$$

Aus (222.) und (225.) folgt durch Addition:

$$(227.)\quad \pi \frac{e^x}{e^\pi - e^{-\pi}} = \tfrac{1}{2} \begin{cases} - \frac{\cos x}{1+1^2} + \frac{\cos 2x}{1+2^2} - \frac{\cos 3x}{1+3^2} + \ldots \\ + \frac{\sin x}{1+1^2} - \frac{2\sin 2x}{1+2^2} + \frac{3\sin 3x}{1+3^2} - \ldots \end{cases}$$

wodurch man, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi})$ multiplicirt, e^x nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen von x entwickelt erhält.

56. Bessel hat eine merkwürdige Anwendung der vorigen allgemeinen Sätze auf das Kepler'sche Problem gemacht, welche wir, als hier sich am besten anschließend, zugleich als Ergänzung des Artikels: Kepler'sches Problem, dem Wesentlichen nach hier mittheilen wollen (Abhandlungen der math. Klasse der Akad. der Wiss. zu Berlin für 1816. 17. Berlin. 1819. S. 49—55. Zeitschrift für Astronomie V. 1818. S. 367—375.)

Ist M (Fig. 4.) der Ort eines Planeten in seiner elliptischen Bahn, S der Brennpunkt der Ellipse, in welchem die Sonne steht, P das Perihelium, A das Aphelium, C der Mittelpunkt der Ellipse, und PM'A ein über der großen Axe derselben als Durchmesser beschriebener Kreis; so heißt, wenn NMM' auf der Axe PA senkrecht ist, $SM = r$ der Radius Vector des Planeten, der Winkel $PSM = \Theta$ die wahre Anomalie, $PCM' = \varepsilon$ die excentrische Anomalie. Die halbe große Axe der Ellipse sey $= a$, die halbe kleine Axe $= b$, die Excentricität $CS = c$, und $\frac{c}{a}$ sey $= e$. Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze sind die elliptischen Sectoren, welche von den Vectoren der Planeten um die Sonne beschrieben werden, den Zeiten proportional, in welchen sie beschrieben werden. Nach diesem Gesetze ist, wenn t die halbe Umlaufszeit des Planeten, t' die Zeit bezeichnet, in welcher der Bogen PM durchlaufen wird, da bekanntlich die halbe Fläche der Ellipse $= \frac{1}{2}ab\pi$ ist:

$$t : t' = \tfrac{1}{2}ab\pi : PSM .$$

Stellen wir uns jetzt vor, daß der Planet die Hälfte PMA seiner Bahn in der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung in Bezug

auf seine Winkelgeschwindigkeit um den Mittelpunkt der Sonne beschrieben hätte, und bezeichnen wir den unter dieser Voraussetzung von dem Radius Vector in der Zeit t' um den Mittelpunkt der Sonne von dem Perihelium an beschriebenen Winkel durch φ; so heißt φ die mittlere Anomalie, und es ist also

$$t:t' = \pi:\varphi\ ,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}ab:PSM = 1:\varphi\ .$$

Der Unterschied $\Theta - \varphi$ zwischen der wahren und mittlern Anomalie heißt die Gleichung des Mittelpunkts (Aequatio centri, Prostaphaeresis). Alle Bogen beziehen sich im Folgenden auf die Einheit als Radius. Es ist nun

$$CN = a\cos(180^0 - \varepsilon) = -a\cos\varepsilon,\ SN = c - a\cos\varepsilon\ ;$$

$$MN^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CN^2) = b^2\sin\varepsilon^2,\ MN = b\sin\varepsilon\ ;$$

$$r^2 = (c - a\cos\varepsilon)^2 + b^2\sin\varepsilon^2\ ,$$

woraus sich, wenn man bemerkt, daß $a^2 - b^2 = c^2$ ist, leicht folgender Ausdruck für den Radius Vector ergiebt:

$$r = a - c\cos\varepsilon = a\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varepsilon\right) = a(1 - e\cos\varepsilon)\ .$$

Ferner ist:

$$PCM' = \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon,\ CNM' = -\tfrac{1}{2}a^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\ ;$$
$$PNM' = \tfrac{1}{2}a^2(\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varepsilon)\ ;$$

und nach bekannten Eigenschaften der Ellipse:

$$b:a = PNM:PNM'\ ,$$
$$PNM = \tfrac{1}{2}ab(\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varepsilon)\ .$$

Also

$$PSM = \tfrac{1}{2}ab(\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varepsilon) - \tfrac{1}{2}(c - a\cos\varepsilon)b\sin\varepsilon$$
$$= \tfrac{1}{2}b(a\varepsilon - c\sin\varepsilon) = \tfrac{1}{2}ab(\varepsilon - e\sin\varepsilon)\ .$$

Folglich nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}ab:\tfrac{1}{2}ab(\varepsilon - e\sin\varepsilon) = 1:\varphi\ ,$$
$$\varphi = \varepsilon - e\sin\varepsilon\ .$$

Endlich hat man noch $MN = r\sin\Theta$, $SN = -r\cos\Theta$; folglich nach dem Obigen

$$r\sin\Theta = b\sin\varepsilon,\ r\cos\Theta = a\cos\varepsilon - c\ ;$$

woraus, wenn man den gefundenen Ausdruck für den Radius Vector substituirt:

$$\sin\Theta = \frac{b\sin\varepsilon}{a(1 - e\cos\varepsilon)},\ \cos\Theta = \frac{a\cos\varepsilon - c}{a(1 - e\cos\varepsilon)}\ ;$$

oder, weil

$$a^2 - b^2 = c^2,\ 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2},\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

ist:

$$\sin\Theta = \frac{\sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\varepsilon},\ \cos\Theta = \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e\cos\varepsilon}.$$

Differentiirt man $\sin\Theta$ nach ε; so wird

$$\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\varepsilon} = \frac{(\cos\varepsilon - e)\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos\varepsilon)^2} = \frac{\cos\Theta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\varepsilon},$$

$$\partial\Theta = \frac{\partial\varepsilon\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\varepsilon}.$$

Wir haben also zwischen dem Radius Vector, der wahren, mittlern und excentrischen Anomalie folgende drei Gleichungen:

$$r = a(1-e\cos\varepsilon),\ \varphi = \varepsilon - e\sin\varepsilon,\ \partial\Theta = \frac{\partial\varepsilon\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\varepsilon}.$$

Kennt man die Umlaufszeit $2t$ eines Planeten, so ist es mittelst des Obigen leicht, für jede gegebene Zeit t' seine mittlere Anomalie φ zu finden. Soll nun der wahre Ort des Planeten bestimmt werden; so muß man aus der mittlern Anomalie den Radius Vector und die wahre Anomalie finden. Zu dem Ende muß man aus der transcendenten Gleichung $\varphi = \varepsilon - e\sin\varepsilon$, worin φ gegeben ist, ε suchen, und dann mittelst der gefundenen Ausdrücke für r und $\sin\Theta$ oder $\cos\Theta$ die wahre Anomalie Θ und den Radius Vector bestimmen. Die Entwickelung der excentrischen Anomalie ε aus der Gleichung $\varphi = \varepsilon - e\sin\varepsilon$ heißt gewöhnlich das Keplersche Problem (s. diesen Art.). Wir wollen jetzt r und $\Theta - \varphi$ (die Mittelpunktsgleichung) unmittelbar durch φ auszudrücken suchen. Setzen wir zu dem Ende

$$r = f(\varphi),\ \Theta = f_1(\varphi).$$

Aus der Gleichung $\varphi = \varepsilon - e\sin\varepsilon$ erhellet, daß φ sein Zeichen ändert, ohne seinen Werth zu ändern, wenn ε sein Zeichen ändert, ohne seinen Werth zu ändern. Also ändert auch umgekehrt ε sein Zeichen, ohne seinen Werth zu ändern, wenn φ sein Zeichen ändert, ohne seinen Werth zu ändern, woraus mittelst der Gleichung

$$\sin\Theta = \frac{b\sin\varepsilon}{a(1-e\cos\varepsilon)}$$

folgt, daß Θ sein Zeichen ändert, ohne seinen Werth zu ändern, wenn φ sein Zeichen ändert, ohne seinen Werth zu ändern. Es ist also $f_1(\varphi) = -f_1(-\varphi)$. Setzen wir $\Theta - \varphi = \psi(\varphi)$, d. i. $f_1(\varphi) - \varphi = \psi(\varphi)$; so ist $f_1(-\varphi) + \varphi = \psi(-\varphi)$, $-f_1(\varphi) + \varphi = \psi(-\varphi) = -\{f_1(\varphi) - \varphi\}$, d. i. $\psi(\varphi) = -\psi(-\varphi)$. Ferner folgt aus der Gleichung $r = a(1-e\cos\varepsilon)$ mittelst des Obigen augenblicklich, daß r weder seinen Werth, noch sein Zeichen ändert, wenn φ sein Zeichen ändert, ohne seinen Werth zu ändern, und daß also $f(\varphi) = f(-\varphi)$ ist. Nach (53.) sind wir demnach berechtigt, zu setzen:

$$\Theta-\varphi=\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}(\Theta-\varphi)\sin\varphi\,\partial\varphi\\ +\sin2\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}(\Theta-\varphi)\sin2\varphi\,\partial\varphi\\ +\sin3\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}(\Theta-\varphi)\sin3\varphi\,\partial\varphi\\ +\sin4\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}(\Theta-\varphi)\sin4\varphi\,\partial\varphi\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

$$=A_1\sin\varphi+A_2\sin2\varphi+A_3\sin3\varphi+A_4\sin4\varphi+\ldots.,$$

wo

$$A_i=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\Theta-\varphi)\sin i\varphi\,\partial\varphi$$

ist;

$$r=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}r\,\partial\varphi+\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}r\cos\varphi\,\partial\varphi\\ +\cos2\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}r\cos2\varphi\,\partial\varphi\\ +\cos3\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}r\cos3\varphi\,\partial\varphi\\ +\cos4\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}r\cos4\varphi\,\partial\varphi\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

$$=B_0+B_1\cos\varphi+B_2\cos2\varphi+B_3\cos3\varphi+\ldots.,$$

wo

$$B_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}r\,\partial\varphi,\ B_i=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}r\cos i\varphi\,\partial\varphi,$$

ist.

Es ist aber

$$\int(\Theta-\varphi)\sin i\varphi\,\partial\varphi$$

$$=(\Theta-\varphi)\int\sin i\varphi\,\partial\varphi-\int(\partial\Theta-\partial\varphi)\int\sin i\varphi\,\partial\varphi$$

$$=-\frac{1}{i}(\Theta-\varphi)\cos i\varphi+\frac{1}{i}\int\cos i\varphi\,(\partial\Theta-\partial\varphi)$$

$$=-\frac{1}{i}(\Theta-\varphi)\cos i\varphi+\frac{1}{i}\int\cos i\varphi\,\partial\Theta-\frac{1}{i^2}\sin i\varphi\,.$$

Für $\varphi=\pm\pi$ ist auch $\Theta=\pm\pi$, d. i. $\Theta-\varphi=0$. Also ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(\Theta-\varphi)\sin i\varphi\,\partial\varphi=\frac{1}{i}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varphi\,\partial\Theta\,.$$

Folglich nach gehöriger Substitution, da $\varepsilon = \pm \pi$ ist, wenn $\Theta = \pm \pi$ ist:

$$A = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)}{1 - e\cos\varepsilon} \partial\varepsilon .$$

Ferner ist

$$\int r\cos i\varphi\,\partial\varphi = r\int\cos i\varphi\,\partial\varphi - \int\partial r\int\cos i\varphi\,\partial\varphi$$

$$= \frac{r}{i}\sin i\varphi - \frac{1}{i}\int\sin i\varphi\,\partial r$$

$$= \frac{r}{i}\sin i\varphi - \frac{ae}{i}\int\sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,\partial\varepsilon ,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} r\cos i\varphi\,\partial\varphi = -\frac{ae}{i}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,\partial\varepsilon ,$$

weil $\varepsilon = \pm \pi$ ist, wenn $\varphi = \pm \pi$ ist.

Auf ähnliche Art ist

$$\int r\,\partial\varphi = a\int(1 - e\cos\varepsilon)^2\,\partial\varepsilon,\quad \int_{-\pi}^{+\pi} r\,\partial\varphi = a\int_{-\pi}^{+\pi}(1 - e\cos\varepsilon)^2\,\partial\varepsilon .$$

Also

$$B_0 = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(1 - e\cos\varepsilon)^2\,\partial\varepsilon ,$$

$$B_i = -\frac{ae}{i\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,\partial\varepsilon .$$

Da

$$\int(1 - e\cos\varepsilon)^2\,\partial\varepsilon = \varepsilon - 2e\int\cos\varepsilon\,\partial\varepsilon + e^2\int\cos\varepsilon^2\,\partial\varepsilon$$

$$= \varepsilon - 2e\sin\varepsilon + e^2\int\frac{1+\cos 2\varepsilon}{2}\partial\varepsilon$$

$$= \varepsilon - 2e\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\varepsilon + \tfrac{1}{4}e^2\sin 2\varepsilon$$

ist; so ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(1 - e\cos\varepsilon)^2\,\partial\varepsilon = 2\pi(1 + \tfrac{1}{2}e^2),$$

$$B_0 = a(1 + \tfrac{1}{2}e^2) .$$

Ferner ist

$$B_i = \frac{ae}{i\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\sin\varepsilon\cos i\varepsilon\sin(ie\sin\varepsilon) - \sin\varepsilon\sin i\varepsilon\cos(ie\sin\varepsilon)\right\}\partial\varepsilon$$

d. i., wenn man hier nach Gauß das oben nach Legendre durch $\Gamma(n+1)$ bezeichnete Product $1.2.3 \ldots n$ etwas kürzer durch Π_n bezeichnet:

$$\frac{i\pi}{ae}B_i =$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos i\varepsilon\left(ie\sin\varepsilon^2 - \frac{i^3e^3}{\Pi_3}\sin\varepsilon^4 + \frac{i^5e^5}{\Pi_5}\sin\varepsilon^6 - \ldots\right)\\ -\sin i\varepsilon\left(\sin\varepsilon - \frac{i^2e^2}{\Pi_2}\sin\varepsilon^3 + \frac{i^4e^4}{\Pi_4}\sin\varepsilon^5 - \ldots\right)\end{array}\right\}\partial\varepsilon.$$

Die allgemeinen $(x+1)$ten Glieder dieser Reihen sind:

$$(-1)^x.\frac{i^{2x+1}e^{2x+1}}{\Pi_{2x+1}}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin\varepsilon^{2x+2}\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon\,,$$

$$(-1)^{x-1}.\frac{i^{2x}e^{2x}}{\Pi_{2x}}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin\varepsilon^{2x+1}\sin i\varepsilon\,\partial\varepsilon\,,$$

wobei man sich zu erinnern hat, daß $\Pi_0 = 1$ gesetzt werden muß.

Bezeichnen wir den αten Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz durch ${}^{n}\overset{\alpha}{B}$; so ist nach dem Art. Goniometrie (49.) in d. Z.

$$\begin{array}{rl}(-1)^{x+1}(2\sin\varepsilon)^{2x+2} = \cos(2x+2)\varepsilon & - {}^{2x+2}\overset{1}{B}\cos 2x\varepsilon\\ & + {}^{2x+2}\overset{2}{B}\cos(2x-2)\varepsilon\\ & - {}^{2x+2}\overset{3}{B}\cos(2x-4)\varepsilon\\ & + \ldots\ldots\ldots,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(-1)^{x+1}.2^{2x+2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin\varepsilon^{2x+2}\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon\\ \quad = \int_{-\pi}^{+\pi}\cos(2x+2)\varepsilon\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon\\ \quad - {}^{2x+2}\overset{1}{B}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos 2x\varepsilon\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon\\ \quad + {}^{2x+2}\overset{2}{B}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(2x-2)\varepsilon\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon\\ \quad - {}^{2x+2}\overset{3}{B}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(2x-4)\varepsilon\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon\\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Die bestimmten Integrale auf der rechten Seite sind sämmtlich $= 0$ (189.), die beiden ausgenommen, für welche

$$2x + 2 - 2\alpha = \pm i,\ \alpha = x \mp \tfrac{1}{2}i + 1$$

ist, welche $= \pi$ sind (190.). Es ist also

$$(-1)^{x+1}.2^{2x+2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin\varepsilon^{2x+2}\cos i\varepsilon\,\partial\varepsilon =$$

$$(-1)^{x-\frac{1}{2}i+1}.{}^{2x+2}\overset{x-\frac{1}{2}i+1}{B}\,\pi + (-1)^{x+\frac{1}{2}i+1}.{}^{2x+2}\overset{x+\frac{1}{2}i+1}{B}\,\pi$$

$$= (-1)^{x-\frac{1}{2}i+1}.2.{}^{2x+2}\overset{x-\frac{1}{2}i+1}{B}\,\pi\,,$$

weil

$$(\varkappa - \tfrac{1}{2}i + 1) + (\varkappa + \tfrac{1}{2}i + 1) = 2\varkappa + 2$$

ist. Also

$$(228.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin \varepsilon^{2\varkappa+2} \cos i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$

$$= (-1)^{-\frac{1}{2}i} \,.\, 2^{-2\varkappa-1} \,.\, {}^{2\varkappa+2}\overset{\varkappa-\frac{1}{2}i+1}{B}\, \pi \,.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Art. Goniometrie (49.) in d. Z.

$$(-1)^{\varkappa}(2\sin\varepsilon)^{2\varkappa+1} = \sin(2\varkappa+1)\varepsilon - {}^{2\varkappa+1}\overset{1}{B}\sin(2\varkappa-1)\varepsilon$$
$$+ {}^{2\varkappa+1}\overset{2}{B}\sin(2\varkappa-3)\varepsilon$$
$$- {}^{2\varkappa+1}\overset{3}{B}\sin(2\varkappa-5)\varepsilon$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{\varkappa}\, 2^{2\varkappa+1} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varepsilon^{2\varkappa+1} \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$
$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2\varkappa+1)\varepsilon \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$
$$- {}^{2\varkappa+1}\overset{1}{B} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2\varkappa-1)\varepsilon \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$
$$+ {}^{2\varkappa+1}\overset{2}{B} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2\varkappa-3)\varepsilon \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$
$$- {}^{2\varkappa+1}\overset{3}{B} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2\varkappa-5)\varepsilon \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir nun wieder

$$2\varkappa + 1 - 2\alpha = \pm i,\ \alpha = \varkappa \mp \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}\,;$$

so erhält man nach (190.):

$$(-1)^{\varkappa}\, 2^{2\varkappa+1} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varepsilon^{2\varkappa+1} \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon =$$

$$(-1)^{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}} \,.\, {}^{2\varkappa+1}\overset{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}{B}\, \pi + (-1)^{\varkappa+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}} \,.\, {}^{2\varkappa+1}\overset{\varkappa+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}{B} \,.\, (-\pi)$$

$$= (-1)^{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}} \,.\, 2 \,.\, {}^{2\varkappa+1}\overset{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}{B}\, \pi\,,$$

weil

$$(\varkappa - \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}) + (\varkappa + \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}) = 2\varkappa + 1$$

ist. Also

$$(229.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varepsilon^{2\varkappa+1} \sin i\varepsilon \,\partial\varepsilon$$

$$= (-1)^{-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}} \,.\, 2^{-2\varkappa} \,.\, {}^{2\varkappa+1}\overset{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}{B}\, \pi \,.$$

Folglich sind die beiden allgemeinen Glieder von $\frac{i\pi}{ae}B_i$:

$$(-1)^{\varkappa-\frac{1}{2}i} \cdot 2^{-2\varkappa-1} \cdot \frac{i^{2\varkappa+1}\, e^{2\varkappa+1}}{\Pi_{2\varkappa+1}} \cdot {}^{2\varkappa+2}B^{\varkappa-\frac{1}{2}i+1}\, \pi\,,$$

$$(-1)^{\varkappa-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2\varkappa} \cdot \frac{i^{2\varkappa}\, e^{2\varkappa}}{\Pi_{2\varkappa}} \cdot {}^{2\varkappa+1}B^{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}\, \pi\,.$$

Also die beiden allgemeinen Glieder von B_i:

$$(-1)^{\varkappa-\frac{1}{2}i} \cdot 2^{-2\varkappa-1} \cdot a \cdot \frac{i^{2\varkappa}\, e^{2\varkappa+2}}{\Pi_{2\varkappa+1}} \cdot {}^{2\varkappa+2}B^{\varkappa-\frac{1}{2}i+1}\,,$$

$$(-1)^{\varkappa-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2\varkappa} \cdot a \cdot \frac{i^{2\varkappa-1}\, e^{2\varkappa+1}}{\Pi_{2\varkappa}} \cdot {}^{2\varkappa+1}B^{\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}\,.$$

Für ein gerades i verschwindet das zweite, für ein ungerades i das erste allgemeine Glied, da nothwendig $\varkappa - \frac{1}{2}i + 1$ und $\varkappa - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}$ stets positive ganze Zahlen seyn müssen. Setzt man daher $2i - 1$ und $2i$ für i; so erhält man als allgemeine Glieder von B_{2i-1} und B_{2i} respective:

$$(-1)^{\varkappa-i} \cdot 2^{-2\varkappa} \cdot a \cdot \frac{(2i-1)^{2\varkappa-1}\, e^{2\varkappa+1}}{\Pi_{2\varkappa}} \cdot {}^{2\varkappa+1}B^{\varkappa-i+1}\,,$$

$$(-1)^{\varkappa-i} \cdot 2^{-2\varkappa-1} \cdot a \cdot \frac{(2i)^{2\varkappa}\, e^{2\varkappa+2}}{\Pi_{2\varkappa+1}} \cdot {}^{2\varkappa+2}B^{\varkappa-i+1}\,.$$

Die Glieder, für welche $\varkappa - i + 1$ negativ ist, sind offenbar sämmtlich $= 0$. Man setze daher, um die überflüssigen Glieder zu eliminiren, $\varkappa - i + 1 = q$, $\varkappa - i = q - 1$, und für q setze man alle positive ganze Zahlen von 0 an. Ueberlegt man nun, daß unter dieser Voraussetzung

$$\varkappa - i = q - 1\,;$$

$$-2\varkappa = -2q - (2i-1) + 1,\quad -2\varkappa - 1 = -2q - 2i + 1\,;$$

$$2\varkappa - 1 = 2q + (2i-1) - 2,\quad 2\varkappa = 2q + 2i - 2\,;$$

$$2\varkappa + 1 = 2q + (2i-1),\quad 2\varkappa + 2 = 2q + 2i\,;$$

$$2\varkappa = 2q + (2i-1) - 1,\quad 2\varkappa + 1 = 2q + 2i - 1\,;$$

$$\varkappa - i + 1 = q$$

ist; so ist klar, daß für jedes gerade oder ungerade i das allgemeine Glied von B_i seyn wird:

$$(-1)^{q-1} \cdot 2^{-2q-i+1} \cdot a \cdot \frac{i^{2q+i-2}\, e^{2q+i}}{\Pi_{2q+i-1}} \cdot {}^{2q+i}B^{q}\,,$$

indem man für q alle ganze Zahlen von 0 an setzt. Es ist also

$$B_i = -\frac{a i^{i-2} e^{i}}{2^{i-1}\Pi_{i-1}} + \frac{a i^{i} e^{i+2}}{2^{i+1}\Pi_{i+1}} \cdot \frac{i+2}{1}\,,$$

$$-\frac{a i^{i+2} e^{i+4}}{2^{i+3}\Pi_{i+3}} \cdot \frac{(i+4)(i+3)}{1.2}\,,$$

$$+\frac{a i^{i+4} e^{i+6}}{2^{i+5}\Pi_{i+5}} \cdot \frac{(i+6)(i+5)(i+4)}{1.2.3}$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$= -\frac{a i^{i-2} e^i}{2^{i-1} \Pi_i} \left\{ i - \frac{i+2}{1.(i+1)} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{i+4}{1.2(i+1)(i+2)} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \frac{i+6}{1.2.3(i+1)(i+2)(i+3)} \cdot \left(\frac{ie}{2}\right)^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots \right\},$$

ein sehr merkwürdiger und zur Rechnung bequemer Ausdruck. Der Werth von B_0, welcher hierunter nicht enthalten, ist schon oben bestimmt worden. So haben wir also eine ganz allgemeine Entwickelung des Radius Vector nach den Cosinussen der Vielfachen der mittlern Anomalie gefunden, und wollen nun auf ähnliche Weise auch die Aequatio centri zu entwickeln suchen. Nach dem Obigen findet man leicht

$$A_i = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{\cos i\varepsilon \cos(ie \sin\varepsilon)}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{\sin i\varepsilon \sin(ie\sin\varepsilon)}{1 - e\cos\varepsilon} \right\} \partial\varepsilon,$$

$$\frac{i\pi A_i}{\sqrt{1-e^2}} = \int_{-\pi}^{+\pi} \partial\varepsilon \left\{ 1 + e\cos\varepsilon + e^2 \cos\varepsilon^2 + e^3 \cos\varepsilon^3 + \ldots \right\}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \cos i\varepsilon \left(1 - \frac{i^2 e^2}{\Pi_2} \sin\varepsilon^2 + \frac{i^4 e^4}{\Pi_4} \sin\varepsilon^4 - \ldots \right) \\ \sin i\varepsilon \left(ie\sin\varepsilon - \frac{i^3 e^3}{\Pi_3} \sin\varepsilon^3 + \frac{i^5 e^5}{\Pi_5} \sin\varepsilon^5 - \ldots \right) \end{array} \right\}.$$

Multiplicirt man die Reihen in einander und ordnet nach Potenzen von e, so findet man für den Coefficienten der geraden Potenz e^{2n}, wenn man im Folgenden der Kürze wegen unterläßt, die Gränzen $-\pi$ und $+\pi$ der Integrale besonders anzudeuten:

$$\int \partial\varepsilon \cos i\varepsilon \left\{ \cos\varepsilon^{2n} - \frac{i^2}{\Pi_2} \cos\varepsilon^{2n-2} \sin\varepsilon^2 + \frac{i^4}{\Pi_4} \cos\varepsilon^{2n-4} \sin\varepsilon^4 \ldots + (-1)^n . \frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}} \sin\varepsilon^{2n} \right\}$$

$$+ \int \partial\varepsilon \sin i\varepsilon \left\{ i\cos\varepsilon^{2n-1} \sin\varepsilon - \frac{i^3}{\Pi_3} \cos\varepsilon^{2n-3} \sin\varepsilon^3 \ldots + (-1)^{n+1} . \frac{i^{2n-1}}{\Pi_{2n-1}} \cos\varepsilon \sin\varepsilon^{2n-1} \right\}.$$

Entwickelt man nun nach dem binomischen Lehrsatze die Potenzen von $\sin\varepsilon^2 = 1 - \cos\varepsilon^2$ in Reihen; so erhält man vorstehenden Coefficienten =

$$\left\{ 1 + \frac{i^2}{\Pi_2} + \frac{i^4}{\Pi_4} + \frac{i^6}{\Pi_6} + \ldots\ldots + \frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}} \right\} \int \cos i\varepsilon \cos\varepsilon^{2n} \partial\varepsilon$$

$$- \left\{ \frac{i^2}{\Pi_2} + \frac{2i^4}{\Pi_4} + \frac{3i^6}{\Pi_6} + \ldots\ldots + \frac{n}{1} . \frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}} \right\} \int \cos i\varepsilon \cos\varepsilon^{2n-2} \partial\varepsilon$$

$$+\left\{\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{i^{2}}{\Pi_{2n}}\right\}\int\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-4}\,\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^6}{\Pi_6}+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}}\right\}\int\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-6}\,\partial\varepsilon$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{i+\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{i^5}{\Pi_5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{i^{2n-1}}{\Pi_{2n-1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-1}\,\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{2i^5}{\Pi_5}+\ldots\ldots+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{i^{2n-1}}{\Pi_{2n-1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-3}\,\partial\varepsilon$$

$$+\left\{\frac{i^5}{\Pi_5}+\ldots\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{i^{2n-1}}{\Pi_{2n-1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-5}\,\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^7}{\Pi_7}+\ldots+\frac{(n-1)\ldots(n-3)}{1.2.3}\cdot\frac{i^{2n-1}}{\Pi_{2n-1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-7}\,\partial\varepsilon$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Exponenten der Potenzen von $\cos\varepsilon$ werden in dieser Formel nie negativ. Es kommt nun darauf an, die bestimmten Integrale, welche dieser Ausdruck enthält, zu finden. Nach dem Art. Goniometrie (48.) in d. Z. ist:

$$(2\cos\varepsilon)^{2n-2x}=\cos(2n-2x)\varepsilon+{}^{2n-2x}\overset{1}{B}\cos(2n-2x-2)\varepsilon$$
$$+{}^{2n-2x}\overset{2}{B}\cos(2n-2x-4)\varepsilon$$
$$+{}^{2n-2x}\overset{3}{B}\cos(2n-2x-6)\varepsilon$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots$$

$$2^{2n-2x}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2x}\,\partial\varepsilon$$
$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos(2n-2x)\varepsilon\,\partial\varepsilon$$
$$+{}^{2n-2x}\overset{1}{B}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos(2n-2x-2)\varepsilon\,\partial\varepsilon$$
$$+{}^{2n-2x}\overset{2}{B}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos(2n-2x-4)\varepsilon\,\partial\varepsilon$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bloß die bestimmten Integrale in diesem Ausdrucke, für welche

$$2n-2x-2\alpha=\pm i,\;\alpha=n-x\mp\tfrac{1}{2}i$$

ist, werden $=\pi$, alle übrigen sind $=0$. Es ist folglich

$$2^{2n-2x}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2x}\,\partial\varepsilon$$
$$={}^{2n-2x}\overset{n-x-\frac{1}{2}i}{B}.\pi+{}^{2n-2x}\overset{n-x+\frac{1}{2}i}{B}.\pi=2.{}^{2n-2x}\overset{n-x-\frac{1}{2}i}{B}.\pi\,,$$

da

$$(n-x-\tfrac{1}{2}i)+(n-x+\tfrac{1}{2}i)=2n-2x$$

ist. Also ist

$$(230.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2\varkappa}\,\partial\varepsilon$$
$$= 2^{-2n+2\varkappa+1}\cdot {}_{2n-2\varkappa}\overset{n-\varkappa-\frac{1}{2}i}{B}\cdot\pi\,.$$

Ganz auf ähnliche Art findet man:

$$(231.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2\varkappa-1}\,\partial\varepsilon$$
$$= 2^{-2n+2\varkappa+2}\cdot {}_{2n-2\varkappa-1}\overset{n-\varkappa-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}}{B}\cdot\pi\,.$$

Es ist aber

$$\sin\varepsilon \sin i\varepsilon = \tfrac{1}{2}\cos(i-1)\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos(i+1)\varepsilon\,.$$

Also

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin i\varepsilon \sin\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2\varkappa-1}\,\partial\varepsilon$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(i-1)\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2\varkappa-1}\,\partial\varepsilon$$
$$- \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(i+1)\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2\varkappa-1}\,\partial\varepsilon$$
$$= 2^{-2n+2\varkappa+1}\cdot\pi\left\{ {}_{2n-2\varkappa-1}\overset{n-\varkappa-\frac{1}{2}i}{B} - {}_{2n-2\varkappa-1}\overset{n-\varkappa-\frac{1}{2}i-1}{B} \right\}.$$

Aber allgemein

$${}_{\alpha}\overset{\gamma}{B} - {}_{\alpha}\overset{\gamma-1}{B} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{1.2.3\ldots\gamma}\left\{1 - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma+1}\right\}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{1.2.3\ldots\gamma}\cdot\frac{\alpha-2\gamma+1}{\alpha-\gamma+1} = \frac{\alpha-2\gamma+1}{\alpha+1}\cdot {}_{\alpha+1}\overset{\gamma}{B}\,.$$

Folglich

$$(232.)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin i\varepsilon \sin\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2\varkappa-1}\,\partial\varepsilon$$
$$= \frac{i\pi}{2n-2\varkappa}\cdot 2^{-2n+2\varkappa+1}\cdot {}_{2n-2\varkappa}\overset{n-\varkappa-\frac{1}{2}i}{B}\,.$$

Aus den gefundenen Formeln (230.) und (232.) erhellet, daß im vorliegenden Falle i eine gerade Zahl seyn muß. Auch darf $n-\varkappa-\frac{1}{2}i$ nie negativ werden. Es muß daher immer für jedes $\varkappa$, auch für $\varkappa=0$, $n-\varkappa \geqq \frac{1}{2}i$, $2n-2\varkappa \geqq i$, d. i. $2n \geqq i$ seyn. Man setze also $2n = i + 2q$, wo für q alle positive ganze Zahlen von 0 an gesetzt werden müssen; so erhält man für den Coefficienten von e^{i+2q} in der Entwickelung von

$$\frac{i\pi A_i}{\sqrt{1-e^2}},$$

wenn i eine gerade Zahl ist:

$$\left\{1+\frac{i^2}{\Pi_2}+\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{i^{i+2q}}{\Pi_{i+2q}}\right\}{}_{i+2q}\overset{q}{B}$$
$$-2^2\left\{\frac{i^2}{\Pi_2}+\frac{2i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}i+q}{1}\cdot\frac{i^{i+2q}}{\Pi_{i+2q}}\right\}{}_{i+2q-2}\overset{q-1}{B}$$
$$+2^4\left\{\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{(\frac{1}{2}i+q)(\frac{1}{2}i+q-1)}{1.2}\cdot\frac{i^{i+2q}}{\Pi_{i+2q}}\right\}{}_{i+2q-4}\overset{q-2}{B}$$
$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{i}{i+2q}\left\{i+\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{i^5}{\Pi_5}+\frac{i^7}{\Pi_7}+\ldots+\frac{i^{i+2q-1}}{\Pi_{i+2q-1}}\right\}{}_{i+2q}\overset{q}{B}$$
$$-\frac{2^2 i}{i+2q-2}\left\{\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{2i^5}{\Pi_5}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}i+q-1}{1}\cdot\frac{i^{i+2q-1}}{\Pi_{i+2q-1}}\right\}{}_{i+2q-2}\overset{q-1}{B}$$
$$+\frac{2^4 i}{i+2q-4}\left\{\frac{i^5}{\Pi_5}+\ldots+\frac{(\frac{1}{2}i+q-1)(\frac{1}{2}i+q-2)}{1.2}\cdot\frac{i^{i+2q-1}}{\Pi_{i+2q-1}}\right\}{}_{i+2q-4}\overset{q-2}{B}$$
$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

wenn man diese Größe noch mit $2^{-i-2q+1}.\pi$ multiplicirt. Der Coefficient von e^{i+2q} in der Entwickelung von A_i wird also gefunden, wenn man vorstehende Größe mit

$$\frac{2^{-i-2q+1}}{i}\sqrt{1-e^2}=\frac{2\sqrt{1-e^2}}{i}(\tfrac{1}{2})^{i+2q}$$

multiplicirt, und das e^{i+2q} enthaltende Glied der Entwickelung von A_i findet man, wenn man vorstehende Größe mit

$$\frac{2\sqrt{1-e^2}}{i}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^{i+2q}$$

multiplicirt, immer vorausgesetzt, daß i eine gerade Zahl sey. Für q sind alle positive ganze Zahlen von 0 an zu setzen.

Suchen wir nun auf ähnliche Weise auch den Coefficienten einer ungeraden Potenz e^{2n+1} zu entwickeln. In Bezug auf die Größe

$$\frac{i\pi A_i}{\sqrt{1-e^2}}$$

erhält man für diesen Coefficienten:

$$\int\partial\varepsilon\cos i\varepsilon\left\{\cos\varepsilon^{2n+1}-\frac{i^2}{\Pi_2}\cos\varepsilon^{2n-1}\sin\varepsilon^2+\frac{i^4}{\Pi_4}\cos\varepsilon^{2n-3}\sin\varepsilon^4\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n.\frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}}\cos\varepsilon\sin\varepsilon^{2n}\right\}$$
$$+\int\partial\varepsilon\sin i\varepsilon\left\{i\cos\varepsilon^{2n}\sin\varepsilon-\frac{i^3}{\Pi_3}\cos\varepsilon^{2n-2}\sin\varepsilon^3+\frac{i^5}{\Pi_5}\cos\varepsilon^{2n-4}\sin\varepsilon^5\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n.\frac{i^{2n+1}}{\Pi_{2n+1}}\sin\varepsilon^{2n+1}\right\}.$$

Entwickelt man wieder die Potenzen von $\sin\varepsilon^2$ nach dem binomischen Lehrsatze; so erhält man für diesen Coefficienten:

$$\left\{1+\frac{i^2}{\Pi_2}+\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}}\right\}\int\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n+1}\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^2}{\Pi_2}+\frac{2i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{n}{1}\cdot\frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}}\right\}\int\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-1}\partial\varepsilon$$

$$+\left\{\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}}\right\}\int\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-3}\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{i^{2n}}{\Pi_{2n}}\right\}\int\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-5}\partial\varepsilon$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{i+\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{i^5}{\Pi_5}+\ldots+\frac{i^{2n+1}}{\Pi_{2n+1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n}\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{2i^5}{\Pi_5}+\ldots+\frac{n}{1}\cdot\frac{i^{2n+1}}{\Pi_{2n+1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2}\partial\varepsilon$$

$$+\left\{\frac{i^5}{\Pi_5}+\frac{3i^7}{\Pi_7}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{i^{2n+1}}{\Pi_{2n+1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-4}\partial\varepsilon$$

$$-\left\{\frac{i^7}{\Pi_7}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{i^{2n+1}}{\Pi_{2n+1}}\right\}\int\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-6}\partial\varepsilon$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ist nun nach (231.):

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2\varkappa+1}\partial\varepsilon=\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2(\varkappa-1)-1}\partial\varepsilon$$

$$=2^{-2n+2\varkappa}\,.\,{}^{2n-2\varkappa+1}B^{n-\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}\,.\,\pi\,,$$

und nach (230.):

$$(233.)\quad\int_{-\pi}^{+\pi}\sin i\varepsilon\sin\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2\varkappa}\partial\varepsilon$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(i-1)\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2\varkappa}\partial\varepsilon$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(i+1)\varepsilon\cos\varepsilon^{2n-2\varkappa}\partial\varepsilon$$

$$=2^{-2n+2\varkappa}.\pi\left\{{}^{2n-2\varkappa}B^{n-\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}-{}^{2n-2\varkappa}B^{n-\varkappa-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{i\pi}{2n-2\varkappa+1}.2^{-2n+2\varkappa}.\,{}^{2n-2\varkappa+1}B^{n-\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}.$$

$n-\varkappa-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}$ muß eine ganze Zahl und positiv seyn. Also muß i ungerade seyn. Auch muß $n-\varkappa$, für jedes $\varkappa$, auch für $\varkappa=0$, $\overline{\overline{>}}\ \frac{1}{2}(i-1)$ seyn, so daß also $n\ \overline{\overline{>}}\ \frac{1}{2}(i-1)$, $2n\ \overline{\overline{>}}\ i-1$ seyn muß, und demnach $2n=i+2q-1$ gesetzt werden kann, indem man für q alle positive ganze Zahlen von 0 an setzt. Hieraus erhält man für den Coefficienten von e^{i+2q} in der Entwickelung von

$$\frac{i\pi A_i}{\sqrt{1-e^2}},$$

wenn i eine ungerade Zahl ist:

$$\Big\{1+\frac{i^2}{\Pi_2}+\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{i^6}{\Pi_6}+\ldots\ldots+\frac{i^{i+2q-1}}{\Pi_{i+2q-1}}\Big\}\,{}_{i+2q}\overset{q}{B}$$

$$-2^2\Big\{\frac{i^2}{\Pi_2}+\frac{2i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{\frac{i-1}{2}+q}{1}\cdot\frac{i^{i+2q-1}}{\Pi_{i+2q-1}}\Big\}\,{}_{i+2q-2}\overset{q-1}{B}$$

$$+2^4\Big\{\frac{i^4}{\Pi_4}+\frac{3i^6}{\Pi_6}+\ldots+\frac{\left(\frac{i-1}{2}+q\right)\left(\frac{i-3}{2}+q\right)}{1.2}\cdot\frac{i^{i+2q-1}}{\Pi_{i+2q-1}}\Big\}\,{}_{i+2q-4}\overset{q-2}{B}$$

$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{i+2q}\Big\{i+\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{i^5}{\Pi^5}+\frac{i^7}{\Pi_7}+\ldots\ldots+\frac{i^{i+2q}}{\Pi_{i+2q}}\Big\}\,{}_{i+2q}\overset{q}{B}$$

$$-\frac{2^2 i}{i+2q-2}\Big\{\frac{i^3}{\Pi_3}+\frac{2i^5}{\Pi_5}+\ldots\ldots+\frac{\frac{i-1}{2}+q}{1}\cdot\frac{i^{i+2q}}{\Pi_{i+2q}}\Big\}\,{}_{i+2q-2}\overset{q-1}{B}$$

$$+\frac{2^4 i}{i+2q-4}\Big\{\frac{i^5}{\Pi_5}+\frac{3i^7}{\Pi_7}+\ldots+\frac{\left(\frac{i-1}{2}+q\right)\left(\frac{i-3}{2}+q\right)}{1.2}\cdot\frac{i^{i+2q}}{\Pi_{i+2q}}\Big\}\,{}_{i+2q-4}\overset{q-2}{B}$$

$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wenn man diese Größe noch mit $2^{-i-2q+1}.\pi$ multiplicirt. Der Coefficient von e^{i+2q} in der Entwickelung von A_i wird also gefunden, wenn man vorstehende Größe mit

$$\frac{2^{-i-2q+1}}{i}\sqrt{1-e^2} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{i}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+2q}$$

multiplicirt, und das e^{i+2q} enthaltende Glied von A_i erhält man folglich, wenn man vorstehendes Polynomium mit

$$\frac{2\sqrt{1-e^2}}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+2q}$$

multiplicirt.

Mittelst der hier gegebenen allgemeinen Formeln, durch deren Entwickelung sich Bessel ein großes Verdienst um das Kepler'sche Problem erworben hat, ist man also im Stande, jeden Coefficienten A_i für gerade und ungerade i zu berechnen. Bessels Auflösung hat unter Andern das Eigenthümliche, daß der allgemeine Factor $\sqrt{1-e^2}$ abgesondert, und nicht in eine Reihe aufgelöst worden ist, wodurch sowohl die Convergenz der Reihe erhöhet, als auch das Gesetz leichter übersehbar gemacht wird.

57. Wir kehren nun wieder zu den in (52.) und (53.) bewiesenen allgemeinen Formeln zurück, aus denen Fourier in seiner berühmten Théorie de la chaleur. Paris, 1822. mehrere andere merkwürdige Resultate abgeleitet hat.

Sey zuerst f(x) eine Function, welche der Bedingung $f(x) = -f(-x)$ genügt, und

$$f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots..$$
$$= An^\alpha\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha + Bn^\beta\left(\frac{x}{n}\right)^\beta + Cn^\gamma\left(\frac{x}{n}\right)^\gamma + \ldots..$$
$$= A'\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha + B'\left(\frac{x}{n}\right)^\beta + C'\left(\frac{x}{n}\right)^\gamma + \ldots..,$$

so daß wir also

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \varphi(\Theta)$$

setzen können, für

$$\Theta = \frac{x}{n},\ \partial\Theta = \frac{\partial x}{n}.$$

Da nun offenbar auch $\varphi(\Theta) = -\varphi(-\Theta)$ ist; so ist nach (203.) für jedes Θ, welches $> -\pi$, $< \pi$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi(\Theta) = \sin\Theta\int_0^\pi \varphi(\Theta)\sin\Theta\partial\Theta + \sin 2\Theta\int_0^\pi \varphi(\Theta)\sin 2\Theta\partial\Theta + \ldots.$$

Für $\Theta = 0$, $\Theta = \pi$, $\Theta > -\pi$, $\Theta < \pi$ ist respective $x = 0$, $x = n\pi$, $x > -n\pi$, $x < n\pi$ (Ungleich. 6.). Also für jedes x, welches $> -n\pi$, $< n\pi$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\pi f(x) =$$
$$\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\int_0^{n\pi} f(x)\sin\frac{x}{n}\partial x + \frac{1}{n}\sin\frac{2x}{n}\int_0^{n\pi} f(x)\sin\frac{2x}{n}\partial x + \ldots.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{1}{n}\sin\frac{ix}{n}\int_0^{n\pi} f(x)\sin\frac{ix}{n}\partial x.$$

Nehmen wir nun n als unendlich groß, ∂q als unendlich klein an, und setzen

$$n = \frac{1}{\partial q},\ i = \frac{q}{\partial q},$$

so daß wir uns die verschiedenen Werthe von i entstanden denken, indem q alle Grade der Größe von 0 bis ∞:

$$0,\ \partial q,\ 2\partial q,\ 3\partial q,\ 4\partial q,\ 5\partial q,\ \ldots..$$

durchläuft; so wird obiges allgemeine Glied =

$$\sin qx\,\partial q\int_0^\infty f(x)\sin qx\,\partial x,$$

und $\frac{1}{2}\pi f(x)$ wird erhalten, indem man in diesem allgemeinen Gliede q alle Grade der Größe von 0 bis ∞ durchlaufen läßt. Daher ist, wenn $f(x)$ der Bedingung $f(x) = -f(-x)$ genügt, für jedes x, welches $> -\infty$, $< \infty$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\pi f(x) = \int_0^\infty \sin qx\,\partial q\int_0^\infty f(x)\sin qx\,\partial x,$$

oder

$$(234.)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin qx\,\partial q \int_0^\infty f(\Theta)\sin q\Theta\,\partial\Theta\,,$$

$$(235.)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\sin q\Theta \sin qx\,\partial\Theta\,\partial q\,.$$

Was man in dieser Gleichung für $f(x)$ setzen muß, wenn für den Werth x der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Continuität der Function $f(x)$ Statt fände, erhellet aus dem Obigen.

Sey ferner $F(x)$ eine Function, welche der Bedingung $F(x) = F(-x)$ genügt, und

$$\begin{aligned} F(x) &= A_1 x^{\alpha'} + B_1 x^{\beta'} + C_1 x^{\gamma'} + D_1 x^{\delta'} + \ldots\ldots \\ &= A_1 n^{\alpha'}\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha'} + B_1 n^{\beta'}\left(\frac{x}{n}\right)^{\beta'} + C_1 n^{\gamma'}\left(\frac{x}{n}\right)^{\gamma'} + \ldots\ldots \\ &= A'_1\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha'} + B'_1\left(\frac{x}{n}\right)^{\beta'} + C'_1\left(\frac{x}{n}\right)^{\gamma'} + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$F(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \varphi(\Theta)\,;$$

$$\Theta = \frac{x}{n},\ \partial\Theta = \frac{\partial x}{n}\,.$$

Ganz wie vorher ergiebt sich aus (199.) für jedes x, welches $> -n\pi$, $< n\pi$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\pi F(x) = \frac{1}{2n}\int_0^{n\pi} F(x)\,\partial x$$

$$+ \frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}\int_0^{n\pi} F(x)\cos\frac{x}{n}\,\partial x + \frac{1}{n}\cos\frac{2x}{n}\int_0^{n\pi} F(x)\cos\frac{2x}{n}\,\partial x + \ldots.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{1}{n}\cos\frac{ix}{n}\int_0^{n\pi} F(x)\cos\frac{ix}{n}\,\partial x$$

nur daß man für $i = 0$ die Hälfte des sich aus dieser allgemeinen Formel ergebenden Gliedes nehmen muß. Für

$$n = \frac{1}{\partial q},\ i = \frac{q}{\partial q}$$

wird dieses allgemeine Glied $=$

$$\cos qx\,\partial q\int_0^\infty F(x)\cos qx\,\partial x\,,$$

indem man auch hier für $q = 0$ nicht $\partial q\int_0^\infty F(x)\partial x$, sondern $\frac{1}{2}\partial q\int_0^\infty F(x)\,\partial x$ in die Reihe einführt. Weil aber $\int_0^\infty F(x)\partial x$ im Allgemeinen eine endliche Größe, ∂q unendlich klein ist; so ist

$$\partial q \int_0^\infty F(x)\partial x = \tfrac{1}{2}\partial q \int_0^\infty F(x)\partial x = 0$$

zu setzen, und man erhält auf ganz ähnliche Art wie vorher, wenn $F(x)$ der Bedingung $F(x) = F(-x)$ genügt, für jedes x, welches $> -\infty$, $< \infty$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\pi F(x) = \int_0^\infty \cos qx\, \partial q \int_0^\infty F(x) \cos qx\, \partial x\,,$$

oder

$$(236.)\quad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, \partial q \int_0^\infty F(\Theta) \cos q\Theta\, \partial\Theta\,,$$

$$(237.)\quad F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty F(\Theta) \cos q\Theta \cos qx\, \partial\Theta\, \partial q\,.$$

Jede beliebige Function $\varphi(x)$ kann offenbar in zwei Functionen

$$f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots,$$

$$F(x) = A_1 x^{\alpha'} + B_1 x^{\beta'} + C_1 x^{\gamma'} + D_1 x^{\delta'} + \ldots$$

zerlegt werden, deren eine der Bedingung $f(x) = -f(-x)$, die andere der Bedingung $F(x) = F(-x)$ genügt, so daß also

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= F(x) + f(x)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, \partial q \int_0^\infty F(\Theta) \cos q\Theta\, \partial\Theta\\ &+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin qx\, \partial q \int_0^\infty f(\Theta) \sin q\Theta\, \partial\Theta\,,\end{aligned}$$

für jedes x, welches $> -\infty$, $< \infty$ ist. Auch ist, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned}\pi\varphi(x) = &\int_0^\infty \cos qx\, \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Theta) \cos q\Theta\, \partial\Theta\\ &+ \int_0^\infty \sin qx\, \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta) \sin q\Theta\, \partial\Theta\,,\end{aligned}$$

$$(238.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Theta) \sin q\Theta\, \partial\Theta = 0\,,$$

$$(239.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta) \cos q\Theta\, \partial\Theta = 0\,.$$

Also

$$\begin{aligned}\pi\varphi(x) = &\int_0^\infty \cos qx\, \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Theta) \cos q\Theta\, \partial\Theta\\ &+ \int_0^\infty \cos qx\, \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta) \cos q\Theta\, \partial\Theta\\ &+ \int_0^\infty \sin qx\, \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Theta) \sin q\Theta\, \partial\Theta\\ &+ \int_0^\infty \sin qx\, \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta) \sin q\Theta\, \partial\Theta\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \cos qx \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \{F(\Theta) + f(\Theta)\} \cos q\Theta \partial\Theta$$

$$+ \int_0^\infty \sin qx \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \{F(\Theta) + f(\Theta)\} \sin q\Theta \partial\Theta$$

$$= \int^\infty \cos qx \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \cos q\Theta \partial\Theta$$

$$+ \int_0^\infty \sin qx \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \sin q\Theta \partial\Theta$$

$$= \int_0^\infty \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \cos q\Theta \cos qx \partial\Theta$$

$$+ \int_0^\infty \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \sin q\Theta \sin qx \partial\Theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial\Theta \int_0^\infty \varphi(\Theta) \cos q\Theta \cos qx \partial q$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \partial\Theta \int_0^\infty \varphi(\Theta) \sin q\Theta \sin qx \partial q \quad (24.)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \partial\Theta \int_0^\infty \cos qx \cos q\Theta \partial q$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \partial\Theta \int_0^\infty \sin qx \sin q\Theta \partial q$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Theta) \partial\Theta \int_0^\infty \{\cos qx \cos q\Theta + \sin qx \sin q\Theta\} \partial q\,;$$

so daß also, indem wir jetzt wieder $f(x)$ für $\varphi(x)$ setzen, wenn $f(x)$ eine beliebige Function von x ist, für jedes x, welches $> -\infty$, $< \infty$ ist:

$$(240.)\quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta) \partial\Theta \int_0^\infty \cos q(x-\Theta) \partial q\,,$$

$$(241.)\quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta) \cos q(x-\Theta) \partial\Theta \partial q\,,$$

eine höchst merkwürdige Gleichung, durch welche jede Function durch doppelte Integrale ausgedrückt werden kann.

58. Denken wir uns jetzt (m. s. Fourier a. a. O. p. 553.) eine Function $\psi(x)$ von solcher Beschaffenheit, daß ihre Werthe zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ mit den entsprechenden Werthen der Function $f(x)$ zwischen diesen Gränzen zusammenfallen, daß aber für jedes x außerhalb dieser Gränzen die Werthe der Function $\psi(x) = 0$ sind; so erhellet sehr leicht die Gleichheit folgender bestimmten Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\Theta) \partial\Theta \int_0^\infty \cos q(x-\Theta) \partial q$$

$$= \int_a^b \psi(\Theta) \partial\Theta \int_0^\infty \cos q(x-\Theta) \partial q$$

$$=\int_a^b f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ .$$

Für jeden Werth von x zwischen den Gränzen $x=-\infty$, $x=\infty$, also auch für jeden Werth von x zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$ ist aber nach (240.):

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ .$$

Also ist auch für jeden solchen Werth von x:

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^b f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ .$$

Für jeden solchen Werth von x ist aber nach der Voraussetzung $f(x)=\psi(x)$. Folglich ist für jedes x zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$:

$$(242.)\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^b f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ .$$

$$(243.)\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_a^b f(\theta)\cos q(x-\theta)\partial\theta\partial q\ .$$

Es ist klar, daß man statt dieser Formeln auch

$$(242^*.)\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\theta)\partial\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\cos q(x-\theta)\partial q\ ,$$

$$(243^*.)\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b f(\theta)\cos q(x-\theta)\partial\theta\partial q$$

setzen kann.

Liegt der Werth von x außerhalb der Gränzen a, b; so liege zuerst x zwischen den Gränzen b, b', wo $b'>b$ ist. Dann liegt x offenbar auch zwischen den Gränzen a, b', und es ist folglich nach (242.):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^{b'} f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_a^b f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_b^{b'} f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ .$$

Nach (242.) ist aber auch:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_b^{b'} f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ ;$$

also ist in diesem Falle

$$0=\int_a^b f(\theta)\partial\theta\int_0^\infty \cos q(x-\theta)\partial q\ .$$

Liegt x zwischen den Gränzen a', a, wo $a'<a$ ist; so liegt x auch zwischen den Gränzen a', b, und man zeigt auf ganz ähn-

liche Art wie vorher, daß vorstehendes Integral auch in diesem Falle $= 0$ ist. Liegt also x nicht zwischen den Gränzen a, b; so ist immer:

$$(244.)\quad 0 = \int_a^b f(\Theta)\partial\Theta \int_0^\infty \cos q(x-\Theta)\partial q\,,$$

$$(245.)\quad 0 = \int_0^\infty \int_a^b f(\Theta)\cos q(x-\Theta)\partial\Theta\partial q\,,$$

welches, so wie die obigen, ein höchst merkwürdiges Resultat ist.

So wie vorher kann man statt dieser Formeln auch

$$(244^*.)\quad 0 = \int_a^b f(\Theta)\partial\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\Theta)\partial q\,,$$

$$(245^*.)\quad 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_a^b f(\Theta)\cos q(x-\Theta)\partial\Theta\partial q$$

setzen.

Nach (243.) ist für jedes x zwischen den Gränzen 0 und ∞:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\cos q(x-\Theta)\partial\Theta\partial q\,.$$

Setzt man $-x$ für x; so erhält man aus (245.) für jedes x zwischen den Gränzen 0 und ∞:

$$0 = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\cos q(x+\Theta)\partial\Theta\partial q\,.$$

Aber

$$\cos q(x-\Theta) = \cos qx \cos q\Theta + \sin qx \sin q\Theta$$
$$\cos q(x+\Theta) = \cos qx \cos q\Theta - \sin qx \sin q\Theta\,.$$

Also

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\cos q\Theta \cos qx\,\partial\Theta\partial q + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\sin q\Theta \sin qx\,\partial\Theta\partial q\,,$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\cos q\Theta \cos qx\,\partial\Theta\partial q - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\sin q\Theta \sin qx\,\partial\Theta\partial q\,.$$

Folglich mittelst Addition und Subtraction:

$$(246.)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\cos q\Theta \cos qx\,\partial\Theta\partial q\,;$$

$$(247.)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(\Theta)\sin q\Theta \sin qx\,\partial\Theta\partial q\,,$$

für jedes x zwischen den Gränzen 0 und ∞.

M. s. über die beiden letzten Formeln und überhaupt über diese Untersuchungen einen Aufsatz von Cauchy in seinen Exercices de Mathématiques. 16me Livraison. p. 112., und eine Abhandlung von Schmidten in Crelles Journal. B. V. S. 329.

59. Diese Formeln sind vieler Anwendungen fähig, und führen auch oft zu den Werthen bestimmter Integrale, welches uns der Raum nur durch wenige Beispiele zu erläutern erlaubt.

Sey $f(x) = e^{-ax}$; so ist nach (46.) und (47.):

$$\int_0^\infty e^{-a\theta}\cos q\theta\,\partial\theta = \frac{a}{a^2+q^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-a\theta}\sin q\theta\,\partial\theta = \frac{q}{a^2+q^2}.$$

Aber nach (246.) und (247.):

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\,\partial q\int_0^\infty e^{-a\theta}\cos q\theta\,\partial\theta,$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin qx\,\partial q\int_0^\infty e^{-a\theta}\sin q\theta\,\partial\theta.$$

Also

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos qx}{a^2+q^2}\partial q,\quad e^{-} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{q\sin qx}{a^2+q^2}\partial q,$$

oder, wenn man a und x mit einander vertauscht:

$$\tfrac{1}{2}\pi e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{x\cos aq}{x^2+q^2}\partial q,\quad \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{q\sin aq}{x^2+q^2}\partial q,$$

oder, α für x gesetzt:

$$\tfrac{1}{2}\pi e^{-a\alpha} = \int_0^\infty \frac{\alpha\cos aq}{\alpha^2+q^2}\partial q,\quad \tfrac{1}{2}\pi e^{-a\alpha} = \int_0^\infty \frac{q\sin aq}{\alpha^2+q^2}\partial q,$$

wie schon in (162.) und (163.) auf anderm Wege gefunden worden ist.

Man setze ferner $f(x) = x^n$; so ist nach (247.):

$$x^n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta^n \sin q\theta\sin qx\,\partial\theta\,\partial q$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin qx\,\partial q\int_0^\infty \theta^n\sin q\theta\,\partial\theta,$$

$$\int_0^\infty \theta^n\sin q\theta\,\partial\theta = \frac{1}{q^{n+1}}\int_0^\infty (q\theta)^n\sin q\theta\,\partial(q\theta)$$

$$= \frac{1}{q^{n+1}}\int_0^\infty z^n\sin z\,\partial z = \frac{L}{q^{n+1}}.$$

Also

$$x^n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{L \sin qx\,\partial q}{q^{n+1}} = \frac{2}{\pi} Lx^n \int_0^\infty (qx)^{-n-1} \sin qx\,\partial(qx)$$

$$= \frac{2}{\pi} Lx^n \int_0^\infty z^{-n-1} \sin z\,\partial z = \frac{2}{\pi} LL' x^n \,.$$

Also ist $LL' = \frac{1}{2}\pi$, d. i., wenn wir jetzt x für z schreiben:

$$(248.) \quad \tfrac{1}{2}\pi = \int_0^\infty x^n \sin x\,\partial x \,.\int_0^\infty x^{-n-1} \sin x\,\partial x \,.$$

Für $n = -\frac{1}{2}$ erhält man hieraus:

$$(249.) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x\,\partial x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \,.$$

Ganz auf ähnliche Art ist nach (246.)

$$x^n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \Theta^n \cos q\Theta \cos qx\,\partial\Theta\,\partial q$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\,\partial q \int_0^\infty \Theta^n \cos q\Theta\,\partial\Theta \,,$$

woraus man, wie vorher, erhält:

$$(250.) \quad \tfrac{1}{2}\pi = \int_0^\infty x^n \cos x\,\partial x \,.\int_0^\infty x^{-n-1} \cos x\,\partial x \,,$$

$$(251.) \quad \int_0^\infty \frac{\cos x\,\partial x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \,.$$

60. Sey jetzt $f(x, y)$ eine Function zweier veränderlichen Größen. Nach (242*.) ist, in so fern y zwischen den Gränzen a′, b′ liegt:

$$f(\Theta, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{a'}^{b'} f(\Theta, \Theta')\,\partial\Theta' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q'(y-\Theta')\,\partial q' \,,$$

und eben so:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\Theta, y)\,\partial\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\Theta)\,\partial q \,,$$

in so fern x zwischen den Gränzen a und b liegt. Also ist auch

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \partial\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Theta, y) \cos q(x-\Theta)\,\partial q \,.$$

Folglich

$$f(x, y) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \partial\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\Theta)\,\partial q \int_{a'}^{b'} f(\Theta, \Theta')\,\partial\Theta' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q'(y-\Theta')\,\partial q'$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \partial\Theta \int_{a'}^{b'} f(\Theta,\Theta')\,\partial\Theta' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\Theta)\,\partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q'(y-\Theta'')\,\partial q$$

d. i. wenn x zwischen den Gränzen a, b; y zwischen den Gränzen a′, b′ liegt:

(252.) $f(x, y) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \int_{a'}^{b'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta, \theta') \cos q(x-\theta) \cos q'(y-\theta') \partial q' \partial q \partial \theta' \partial \theta,$$

welches wir kürzer bloß so schreiben wollen:

(253.) $f(x, y) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int f(\theta, \theta') \cos q(x-\theta) \cos q'(y-\theta') \partial \theta \partial \theta' \partial q \partial q'$$

mit der Bemerkung, daß die Integrale in Bezug auf θ, θ' zwischen willkührlichen, die Integrale in Bezug auf q, q' aber zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen sind. Die Werthe von x und y müssen respective zwischen den Gränzen liegen, zwischen denen die Integrale in Bezug auf θ und θ' genommen worden sind. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt; so würde das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (253.) verschwinden, wie aus (242*.) leicht folgt.

Für eine Function $f(x, y, z)$ dreier veränderlichen Größen hat man hieraus:

$$f(\theta, y, z) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{a'}^{b'} \partial \theta' \int_{a''}^{b''} f(\theta, \theta', \theta'') \partial \theta'' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q'(y-\theta') \partial q'$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos q''(z-\theta'') \partial q'';$$

$$f(x, y, z) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b f(\theta, y, z) \partial \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\theta) \partial q$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \partial \theta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta, y, z) \cos q(x-\theta) \partial q$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_a^b \partial \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\theta) \partial q \int_{a'}^{b'} \partial \theta' \int_{a''}^{b''} f(\theta, \theta', \theta'') \partial \theta''$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos q'(y-\theta') \partial q' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q''(z-\theta'') \partial q'';$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_a^b \partial \theta \int_{a'}^{b'} \partial \theta' \int_{a''}^{b''} f(\theta, \theta', \theta'') \partial \theta''$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\theta) \partial q \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q'(y-\theta') \partial q' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q''(z-\theta'') \partial q'',$$

in so fern x, y, z respective zwischen den Gränzen a, b; a', b'; a'', b'' liegen, indem im entgegengesetzten Falle das Integral verschwindet. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt leicht in die Augen. Es ist für eine beliebige Function von n veränderlichen Größen

(254.) $f(x, y, z, \ldots.) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int f(\theta, \theta', \theta'', \ldots) \cos q(x-\theta) \cos q'(y-\theta') \ldots \partial \theta \partial q \partial \theta' \partial q' \ldots.$$

unter der Bedingung, daß die bestimmten Integrale in Bezug auf Θ, Θ', Θ'', ... zwischen willkührlichen, die Integrale in Bezug auf q, q', q'', ... dagegen sämmtlich zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen sind, und daß die Werthe von x, y, z, ... sämmtlich zwischen den Gränzen zu nehmen sind, zwischen welchen die entsprechenden Integrale in Bezug auf Θ, Θ', Θ'', ... genommen werden, indem im entgegengesetzten Falle das Integral verschwinden würde. Diesen überaus merkwürdigen und wichtigen Satz verdankt man ebenfalls dem berühmten Fourier (a. a. O. p. 534.). Indeß s. m. auch Cauchy in seinen Exercices de Math. 18me Livraison. p. 157., und einen zum Theil hierher gehörenden Aufsatz von J. D. G. Jacobi in Crelles Journal. B. II. S. 1.

Bewegung. Ueber motus reptionis oder reptorius, motus evolutionis, motus tractionis s. Joh. Bern. Opp. T. I. pp. 408. 415.

Binomial-Coefficienten. Euler (Acta Petrop. 1781. P. I. p. 89.) bezeichnet den xten Coefficienten der αten Potenz durch $\left[\frac{\alpha}{x}\right]$, Thibaut (Grundriß der allgemeinen Arithmetik. Gött. 1809. S. 44.) durch $^{\alpha}\overset{x}{\mathfrak{B}}$, Rothe (Theorie der combinatorischen Integrale. Nürnberg. 1820. S. 44.) durch α_x. Der letztern Bezeichnung ist man namentlich in neuerer Zeit häufig gefolgt.

Ueber den Thl. I. S. 321. Nr. VII. bewiesenen wichtigen Satz vergleiche man den Artikel binomischer Lehrsatz (10.) i. d. Z.

Den Satz, daß jeder Binomial-Coefficient eines ganzen Exponenten eine ganze Zahl ist, welcher leicht aus dem im Artikel Versetzungen (5.) bewiesenen allgemeinen arithmetischen Satze folgt, hat Gioachino Pessuti sehr weitläufig in den Memorie di Matematica della Societa Italiana. T. XI. Modena. 1804. p. 446. bewiesen.

Euler de insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis. Acta Petrop. 1781. P. II. p. 76.

Binomischer Lehrsatz. 1. Die Beweise des allgemeinen Binomial-Theorems werden entweder, wie der Thl. I. S. 330. gegebene Beweis, durch bloße Multiplication der Reihen zu Stande gebracht, oder sie beruhen auf der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie Thl. V. S. 496., oder bedienen sich der Differentialrechnung, wie Thl. V. S. 18., oder sie nehmen, wie der von Crelle in seinem Journal (B. IV. S. 305.) ge-

gebene schöne Beweis, die Differenzenrechnung zu Hülfe. Die neuern Mathematiker, und unter ihnen vorzüglich Cauchy, haben das Verdienst, bei allen Summirungen von Reihen, die Convergenz und Divergenz derselben genauer und allgemeiner, als früher, berücksichtigt zu haben, weil allerdings nur bei einer convergirenden Reihe von einer eigentlichen Summe die Rede seyn kann, worüber der Artikel Convergenz der Reihen nachzusehen ist. Ohne uns hier auf diesen Artikel unmittelbar zu beziehen, wollen wir jetzt einige der dort mitgetheilten Sätze, ihrer Wichtigkeit wegen, noch auf eine andere Art beweisen, und dann von denselben eine Anwendung auf das Binomial-Theorem machen.

2. Eine Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots,$$

deren Glieder wir zunächst sämmtlich als reell annehmen wollen, convergirt, wenn die Summe

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1},$$

für wachsende n, sich immer mehr und mehr einer gewissen Gränze s nähert, und derselben, wenn man nur n groß genug annimmt, beliebig nahe gebracht werden kann, oder, was dasselbe ist, wenn die Differenz

$$s_{n+m} - s_n = t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots + t_{n+m-1},$$

für jedes bestimmte m und für wachsende n, sich der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben, wenn man nur n groß genug annimmt, beliebig nahe gebracht werden kann. Im entgegengesetzten Falle divergirt die Reihe. Die Gränze s heißt die Summe der entsprechenden convergirenden Reihe. Eine divergirende Reihe hat keine Summe im eigentlichen Sinne.

3. Wenn die Glieder der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots$$

sämmtlich positiv sind, und der Quotient

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}$$

sich, wenn n wächst, fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade, einer gewissen Gränze L nähert; so ist die in Rede stehende Reihe convergent oder divergent, jenachdem $L <$ oder > 1 ist.

Sey zuerst $L < 1$. Man nehme eine Größe T so an, daß

$$L < T < 1$$

ist; so wird es nach der Voraussetzung offenbar immer einen Werth von n geben, für welchen, und über welchen hinaus,

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} < T$$

ist. Dieser Werth von n sey n selbst; so ist also

$$t_{n+1} < Tt_n$$
$$t_{n+2} < Tt_{n+1}$$
$$t_{n+3} < Tt_{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{n+m-1} < Tt_{n+m-2}\,,$$

woraus sogleich erhalten wird:

$$t_{n+1} < Tt_n$$
$$t_{n+2} < T^2t_n$$
$$t_{n+3} < T^3t_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{n+m-1} < T^{m-1}t_n\,.$$

Folglich

$$s_{n+m} - s_n < \{1 + T + T^2 + T^3 + \ldots + T^{m-1}\}t_n\,,$$
$$s_{n+m} - s_n < \frac{1-T^m}{1-T}t_n,\ s_{n+m} - s_n < \frac{t_n}{1-T}\,,$$

wobei zu bemerken, daß $T < 1$, also um so mehr auch $T^m < 1$ ist. Denken wir uns jetzt n als constant; so ist nach dem Vorhergehenden

$$t_{n+x} < T^x t_n\,,$$

woraus sich, da $T < 1$ ist, sogleich ergiebt, daß, für wachsende x, t_{n+x} der Null beliebig nahe gebracht werden kann. Also kann offenbar auch t_n, für wachsende n, der Null beliebig nahe gebracht werden. Da man nun augenscheinlich T als constant betrachten kann, so erhellet aus dem Obigen, daß auch, wenn n wächst, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n\,,$$

für jedes m, der Null beliebig nahe gebracht werden kann, und daß folglich die gegebene Reihe convergent ist.

Ist ferner $L > 1$, so nehme man T so an, daß

$$L > T > 1;$$

dann läßt sich nach der Voraussetzung n immer so annehmen, daß

$$t_{n+1} > Tt_n$$
$$t_{n+2} > Tt_{n+1}$$
$$t_{n+3} > Tt_{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{n+m-1} > Tt_{n+m-2}\,,$$

oder, wie leicht erhellet:

$$t_{n+1} > Tt_n$$
$$t_{n+2} > T^2t_n$$
$$t_{n+3} > T^3t_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{n+m-1} > T^{m-1}t_n\,,$$

d. i.

$$s_{n+m} - s_n > \{1 + T + T^2 + T^3 + \ldots + T^{m-1}\} t_n ,$$

$$s_{n+m} - s_n > \frac{T^m - 1}{T - 1} t_n$$

ist. Weil aber $T > 1$ ist, so kann man offenbar m immer so annehmen, daß $T^m - 1 > 1$, also

$$s_{n+m} - s_n > \frac{t_n}{T - 1}$$

ist. Nach dem Vorhergehenden ist

$$t_{n+x} > T^x t_n ;$$

also kann, weil $T > 1$ ist, t_{n+x}, wenn x wächst, über alle Gränzen wachsen, welches also auch von t_n gilt, wenn n wächst. Demnach kann also auch, weil man T als constant betrachten kann, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n ,$$

wenn n wächst, über alle Gränzen wachsen, so daß also diese Differenz nicht für alle m, wenn n wächst, der Null beliebig nahe gebracht werden kann, und die gegebene Reihe folglich divergent ist (2.).

4. Der vorhergehende Satz gilt auch, wenn nicht alle Glieder der Reihe

$$t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , \ldots .$$

positiv sind, und der numerische Werth von

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} ,$$

für wachsende n, sich einer gewissen Gränze nähert, die wir wieder durch L bezeichnen wollen.

Die numerischen Werthe der Glieder der obigen Reihe seyen respective

$$\varrho_0 , \varrho_1 , \varrho_2 , \varrho_3 , \varrho_4 , \ldots .$$

Auch sey

$$\sigma_{n+m} - \sigma_n = \varrho_n + \varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \ldots + \varrho_{n+m-1} ;$$

so ist klar, daß der numerische Werth von

$$s_{n+m} - s_n$$

nie größer als

$$\sigma_{n+m} - \sigma_n$$

ist. Ist nun $L < 1$, so ist die Reihe

$$\varrho_0 , \varrho_1 , \varrho_2 , \varrho_3 , \varrho_4 , \ldots .$$

convergent (3.), und es kann also

$$\sigma_{n+m} - \sigma_n ,$$

für wachsende n und jedes m, also um so mehr, unter derselben Bedingung, auch der numerische Werth von

$$s_{n+m} - s$$

der Null beliebig nahe gebracht werden, so daß also die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$$

convergirt.

Ist $L > 1$, so wird man offenbar n groß genug annehmen können, daß

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} > 1, \ \frac{\varrho_{n+2}}{\varrho_{n+1}} > 1, \ \frac{\varrho_{n+3}}{\varrho_{n+2}} > 1, \ \frac{\varrho_{n+4}}{\varrho_{n+3}} > 1, \ \ldots$$

d. i.

$$\begin{aligned} &\varrho_{n+1} > \varrho_n \\ &\varrho_{n+2} > \varrho_{n+1} \\ &\varrho_{n+3} > \varrho_{n+2} \\ &\varrho_{n+4} > \varrho_{n+3} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ist. Man wird also immer n groß genug annehmen können, daß, für wachsende n, ϱ_n sich der Null nicht nähert. Es ist aber

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \varrho_n .$$

Also wird man n groß genug annehmen können, daß, für wachsende n, die Differenz

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n$$

sich der Null nicht nähert. Dem absoluten Werthe nach ist aber

$$s_{n+1} - s_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n ,$$

und man wird also n groß genug annehmen können, daß, für wachsende n, die Differenz

$$s_{n+1} - s_n$$

der Null sich nicht nähert, so daß es also immer einen Werth von m giebt, für welchen, wenn n wächst, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n$$

sich der Null nicht nähert, woraus die Divergenz der gegebenen Reihe folgt.

5. Wenn

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots;$$
$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots;$$

convergirende Reihen mit positiven Gliedern, und deren Summen s und s' (2.) sind; so ist auch immer die Reihe

$$\begin{aligned} &t_0 u_0 \\ &t_0 u_1 + t_1 u_0 \\ &t_0 u_2 + t_1 u_1 + t_2 u_0 \\ &t_0 u_3 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + t_3 u_0 \\ &t_0 u_4 + t_1 u_3 + t_2 u_2 + t_3 u_1 + t_4 u_0 \\ &\quad \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

convergent, und ihre Summe $= ss'$.

Man setze, wie gewöhnlich,

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_{n-1},$$
$$s'_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_{n-1}.$$

Die einzelnen Glieder der obigen Reihe, deren Convergenz bewiesen werden soll, bezeichne man durch

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots..,$$

und setze

$$S_n = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \ldots. + T_{n-1};$$

so erhellet leicht, daß man die einzelnen Glieder der Summe S_{2n+1} auf folgende Art ordnen kann:

$$\begin{aligned}
& t_0(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) \\
&+ t_1(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + n_n) \\
&+ t_2(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) \\
&+ t_3(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ t_n(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) \\
&+ t_0 u_{2n} \\
&+ (t_0 + t_1) u_{2n-1} \\
&+ (t_0 + t_1 + t_2) u_{2n-2} \\
&+ (t_0 + t_1 + t_2 + t_3) u_{2n-3} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1}) u_{n+1} \\
&+ u_0 t_{2n} \\
&+ (u_0 + u_1) t_{2n-1} \\
&+ (u_0 + u_1 + u_2) t_{2n-2} \\
&+ (u_0 + u_1 + u_2 + u_3) t_{2n-3} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}) t_{n+1},
\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} = s_{n+1} s'_{n+1} &+ s_1 u_{2n} + s_2 u_{2n-1} + \ldots + s_n u_{n+1} \\
&+ s'_1 t_{2n} + s'_2 t_{2n-1} + \ldots + s'_n t_{n+1},
\end{aligned}$$

welches wir der Kürze wegen durch

$$S_{2n+1} = s_{n+1} s'_{n+1} + U + U'$$

bezeichnen wollen. Es ist aber offenbar

$$U < s_n (u_{2n} + u_{2n-1} + \ldots + u_{n+1})$$
$$U' < s'_n (t_{2n} + t_{2n-1} + \ldots + t_{n+1}),$$

d. i.

$$U < s_n (s'_{2n+1} - s'_{n+1})$$
$$U' < s'_n (s_{2n+1} - s_{n+1}).$$

Folglich, weil

$$S_{2n+1} - s_{n+1} s'_{n+1} = U + U'$$

ist:

$$S_{2n+1} - s_{n+1} s'_{n+1} < s_n (s'_{2n+1} - s'_{n+1}) + s'_n (s_{2n+1} - s_{n+1}).$$

Läßt man nun n wachsen, so nähern nach der Voraussetzung s_n und s'_n sich respective den bestimmten Gränzen s und s', dagegen nähern sich die Differenzen

$$s_{2n+1} - s_{n+1},\ s'_{2n+1} - s'_{n+1}$$

beide der Gränze Null. Folglich nähert, für wachsende n, auch die Differenz

$$S_{2n+1} - s_{n+1} s'_{n+1}$$

sich der Gränze Null. Das Product $s_{n+1}\ s'_{n+1}$ nähert sich aber der Gränze ss', und es muß also auch, für wachsende n, S_{2n+1} sich der Gränze ss' nähern, welches also natürlich auch von S_n gilt. Daher ist unsere obige Reihe convergent, und ihre Summe $= ss' = S$.

6. Der vorhergehende Satz gilt auch, wenn die Reihen

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots\ldots;$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ldots;$$

negative Glieder enthalten, vorausgesetzt, daß diese Reihen convergent bleiben, wenn man sämmtliche Glieder auf ihre numerischen Werthe bringt.

Die numerischen Werthe der Glieder der obigen Reihen seyen respective

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots;$$
$$\varrho'_0,\ \varrho'_1,\ \varrho'_2,\ \varrho'_3,\ \varrho'_4,\ \ldots\ldots;$$

so sind nach der Voraussetzung auch diese beiden Reihen convergent. Man setze

$$\sigma_n = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots\ldots + \varrho_{n-1},$$
$$\sigma'_n = \varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \varrho'_3 + \ldots\ldots + \varrho'_{n-1},$$

und bezeichne die Summe der n ersten Glieder der Reihe

$$\varrho_0\,\varrho'_0$$
$$\varrho_0\,\varrho'_1 + \varrho_1\,\varrho'_0$$
$$\varrho_0\,\varrho'_2 + \varrho_1\,\varrho'_1 + \varrho_2\,\varrho'_0$$
$$\varrho_0\,\varrho'_3 + \varrho_1\,\varrho'_2 + \varrho_2\,\varrho'_1 + \varrho_3\,\varrho'_0$$
$$\varrho_0\,\varrho'_4 + \varrho_1\,\varrho'_3 + \varrho_2\,\varrho'_2 + \varrho_3\,\varrho'_1 + \varrho_4\,\varrho'_0$$

u. s. f. u. s. f.

durch Σ_n; so kann, für wachsende n, die Differenz

$$\Sigma_{2n+1} - \sigma_{n+1}\,\sigma'_{n+1}$$

der Null beliebig nahe gebracht werden. Es ist aber klar, daß der numerische Werth von

$$S_{2n+1} - s_{n+1}\,s'_{n+1}$$

nie obige Differenz übersteigt. Daher kann, für wachsende n, auch

$$S_{2n+1} - s_{n+1}\,s'_{n+1}$$

der Null beliebig nahe gebracht werden, woraus, ganz wie in (5.), der zu beweisende Satz folgt.

7. Sey jetzt

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3,\ a_4 x^4,\ \ldots\ldots$$

eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe.

Der numerische Werth von a_n sey α_n, so wie ξ der numerische Werth von x. Wenn, für wachsende n, der Quotient

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

sich der Gränze L nähert; so nähert

$$\frac{\alpha_{n+1}\xi^{n+1}}{\alpha_n \xi^n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\xi$$

sich der Gränze $L\xi$. Die gegebene Reihe ist convergent oder divergent, jenachdem

$$L\xi < 1 \text{ oder } L\xi > 1$$

ist (4.), d. i. jenachdem

$$\xi < \frac{1}{L} \text{ oder } \xi > \frac{1}{L}$$

ist. Nähert sich also, für wachsende n, der numerische Werth von

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

einer gewissen Gränze L, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, so ist die Reihe

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3,\ a_4 x^4,\ \ldots\ldots$$

convergent oder divergent, jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x = -\frac{1}{L} \text{ und } x = +\frac{1}{L}$$

enthalten ist, oder nicht.

8. Aus (6.) ergiebt sich augenblicklich folgender Satz:

Wenn die Reihen

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3,\ a_4 x^4,\ \ldots\ldots;$$
$$b_0,\ b_1 x,\ b_2 x^2,\ b_3 x^3,\ b_4 x^4,\ \ldots\ldots;$$

convergent sind, und die numerischen Werthe ihrer Glieder gleichfalls convergirende Reihen bilden, so ist auch

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 \\ + & \{a_0 b_1 + a_1 b_0\} x \\ + & \{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\} x^2 \\ + & \{a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0\} x^3 \\ + & \{a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0\} x^4 \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

eine convergirende Reihe. Die Summe dieser Reihe ist $= ss'$, wenn s und s' die Summe der beiden gegebenen Reihen sind.

9. **Eine Reihe** mit einer bestimmten endlichen Anzahl von Gliedern **kann immer** als eine Reihe mit einer unendlichen Anzahl von Gliedern betrachtet werden, deren Glieder, von irgend einem gewissen Gliede an, sämmtlich verschwinden. Für eine solche Reihe kann also immer n so groß angenommen werden, daß, für jedes m,

$$s_{n+m} - s_n = 0$$

ist, so daß folglich eine Reihe dieser Art immer als convergent zu betrachten ist. Demnach gelten die in (5.), (6.) und (8.) bewiesenen Sätze auch dann noch, wenn eine der beiden gegebenen Reihen, oder beide, eine endliche Anzahl von Gliedern hat, da es für sich klar ist, daß eine solche Reihe auch dann noch jederzeit convergent bleibt, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt.

10. Bezeichnen wir jetzt die Binomial-Coefficienten für den Exponenten α nach der Reihe durch

$${}_{\alpha}B,\ {}_{\alpha}\overset{1}{B},\ {}_{\alpha}\overset{2}{B},\ {}_{\alpha}\overset{3}{B},\ {}_{\alpha}\overset{4}{B},\ \ldots\ldots;$$

so findet für jedes α und γ die folgende merkwürdige Relation Statt:

$${}_{\alpha+\gamma}\overset{n}{B} = {}_{\alpha}\overset{n}{B} + {}_{\alpha}\overset{n-1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{1}{B} + {}_{\alpha}\overset{n-2}{B}\,{}_{\gamma}\overset{2}{B} + \ldots + {}_{\alpha}\overset{1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{n-1}{B} + {}_{\gamma}\overset{n}{B}.$$

Um diese Relation allgemein zu beweisen, bezeichne man die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch $\varphi(n)$. Da nun

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+\gamma-n}{n+1} &= \frac{\alpha-n}{n+1} + \frac{\gamma}{n+1}\\
&= \frac{\alpha-n+1}{n+1} + \frac{\gamma-1}{n+1}\\
&= \frac{\alpha-n+2}{n+1} + \frac{\gamma-2}{n+1}\\
&\quad \cdots\cdots\\
&= \frac{\alpha-1}{n+1} + \frac{\gamma-n+1}{n+1}\\
&= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\gamma-n}{n+1}
\end{aligned}$$

ist; so ist

$$\begin{aligned}
\varphi(n).\frac{\alpha+\gamma-n}{n+1} = {} & {}_{\alpha}\overset{n}{B}.\frac{\alpha-n}{n+1} + {}_{\alpha}\overset{n}{B}.\frac{\gamma}{n+1}\\
& + {}_{\alpha}\overset{n-1}{B}.\frac{\alpha-n+1}{n+1}\,{}_{\gamma}\overset{1}{B} + {}_{\alpha}\overset{n-1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{1}{B}.\frac{\gamma-1}{n+1}\\
& + {}_{\alpha}\overset{n-2}{B}.\frac{\alpha-n+2}{n+1}\,{}_{\gamma}\overset{2}{B} + {}_{\alpha}\overset{n-2}{B}\,{}_{\gamma}\overset{2}{B}.\frac{\gamma-2}{n+1}\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$+ {}_{\alpha}\overset{1}{B}.\frac{\alpha-1}{n+1}{}_{\gamma}\overset{n-1}{B} + {}_{\alpha}\overset{1}{B}{}_{\gamma}\overset{n-1}{B}.\frac{\gamma-n+1}{n+1}$$

$$+ \frac{\alpha}{n+1}{}_{\gamma}\overset{n}{B} + {}_{\gamma}\overset{n}{B}.\frac{\gamma-n}{n+1}$$

$$= {}_{\alpha}\overset{n+1}{B} + {}_{\alpha}\overset{n}{B}\,{}_{\gamma}\overset{1}{B}.\frac{1}{n+1}$$

$$+ {}_{\alpha}\overset{n}{B}\,{}_{\gamma}\overset{1}{B}.\frac{n}{n+1} + {}_{\alpha}\overset{n-1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{2}{B}.\frac{2}{n+1}$$

$$+ {}_{\alpha}\overset{n-1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{2}{B}.\frac{n-1}{n+1} + {}_{\alpha}\overset{n-2}{B}\,{}_{\gamma}\overset{3}{B}.\frac{3}{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$+ {}_{\alpha}\overset{2}{B}\,{}_{\gamma}\overset{n-1}{B}.\frac{2}{n+1} + {}_{\alpha}\overset{1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{n}{B}.\frac{n}{n+1}$$

$$+ {}_{\alpha}\overset{1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{n}{B}.\frac{1}{n+1} + {}_{\gamma}\overset{n+1}{B}$$

$$= {}_{\alpha}\overset{n+1}{B} + {}_{\alpha}\overset{n}{B}\,{}_{\gamma}\overset{1}{B} + {}_{\alpha}\overset{n-1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{2}{B} + \ldots + {}_{\alpha}\overset{1}{B}\,{}_{\gamma}\overset{n}{B} + {}_{\gamma}\overset{n+1}{B}.$$

Also hat man die Relation:

$$\varphi(n+1) = \varphi(n).\frac{\alpha+\gamma-n}{n+1}.$$

Aber

$$\varphi(1) = {}_{\alpha}\overset{1}{B} + {}_{\alpha}\overset{1}{B} = \frac{\alpha+\gamma}{1}.$$

Also

$$\varphi(1) = \frac{\alpha+\gamma}{1}$$

$$\varphi(2) = \frac{\alpha+\gamma}{1}.\frac{\alpha+\gamma-1}{2}$$

$$\varphi(3) = \frac{\alpha+\gamma}{1}.\frac{\alpha+\gamma-1}{2}.\frac{\alpha+\gamma-2}{3}$$

$$\varphi(4) = \frac{\alpha+\gamma}{1}.\frac{\alpha+\gamma-1}{2}.\frac{\alpha+\gamma-2}{3}.\frac{\alpha+\gamma-3}{4}$$

u. s. f. u. s. f.

d. i.

$$\varphi(n) = \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma-1)\ldots(\alpha+\gamma-n+1)}{1.2.3.4\ldots.n} = {}_{\alpha+\gamma}\overset{n}{B},$$

welches die zu beweisende Summe war.

11. Sey nun

$$f(\alpha) = 1 + {}_{\alpha}\overset{1}{B}x + {}_{\alpha}\overset{2}{B}x^2 + {}_{\alpha}\overset{3}{B}x^3 + \ldots + {}_{\alpha}\overset{n}{B}x^n + \ldots..$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots. ;$$

so ist nach (7.)

$$a_n = {}_{\alpha}\overset{n}{B},\ a_{n+1} = {}_{\alpha}\overset{n+1}{B} = {}_{\alpha}\overset{n}{B}.\frac{\alpha-n}{n+1}.$$

Also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} = -\frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Demnach nähert sich, wenn n wächst, der numerische Werth dieses Quotienten fortwährend der Gränze 1, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden. Folglich ist die obige Reihe convergent oder divergent, jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthalten ist, oder nicht (7.).

Sey nun x zwischen diesen Gränzen enthalten, und ξ, welches also < 1 ist, sey der numerische Werth von x. Der numerische Werth von

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x$$

nähert sich, für wachsende n, offenbar der Gränze ξ, welche im vorliegenden Falle < 1 ist. Daher bilden, wenn x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthalten ist, die numerischen Werthe der Glieder unserer Reihe auch noch eine convergirende Reihe (3.). Auf die durch $f(\alpha)$ bezeichnete Reihe, und jede ihr ähnliche, ist also der in (8.) bewiesene Satz anwendbar, wenn nur x zwischen den obigen Gränzen enthalten ist.

12. Unter der Voraussetzung, daß x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthalten ist, sind die Reihen

$$1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}x + {}^{\alpha}\overset{2}{B}x^2 + {}^{\alpha}\overset{3}{B}x^3 + \ldots + {}^{\alpha}\overset{n}{B}x^n + \ldots\ldots,$$

$$1 + {}^{\gamma}\overset{1}{B}x + {}^{\gamma}\overset{2}{B}x^2 + {}^{\gamma}\overset{3}{B}x^3 + \ldots + {}^{\gamma}\overset{n}{B}x^n + \ldots\ldots$$

beide convergent, so daß also auch jede eine Summe im eigentlichen Sinne hat (2.), welche wir, wie in (11.), respective durch $f(\alpha)$ und $f(\gamma)$ bezeichnen wollen. Auch ist auf diese Reihen der in (8.) bewiesene Satz anwendbar (11.). Bildet man also, wie in (8.), aus den beiden obigen Reihen eine neue Reihe; so findet man als allgemeines Glied dieser Reihe:

$$\{{}^{\alpha}\overset{n}{B} + {}^{\alpha}\overset{n-1}{B}\,{}^{\gamma}\overset{1}{B} + {}^{\alpha}\overset{n-2}{B}\,{}^{\gamma}\overset{2}{B} + \ldots + {}^{\alpha}\overset{1}{B}\,{}^{\gamma}\overset{n-1}{B} + {}^{\gamma}\overset{n}{B}\}x^n,$$

d. i. nach (10.):

$${}^{\alpha+\gamma}\overset{n}{B}x^n,$$

so daß also diese Reihe die Reihe

$$1 + {}^{\alpha+\gamma}\overset{1}{B}x + {}^{\alpha+\gamma}\overset{2}{B}x^2 + {}^{\alpha+\gamma}\overset{3}{B}x^3 + \ldots + {}^{\alpha+\gamma}\overset{n}{B}x^n + \ldots\ldots$$

ist. Nach (8.) ist diese Reihe convergent, und hat folglich eine

wirkliche Summe, welche, der Analogie nach, durch $f(\alpha+\gamma)$ bezeichnet werden muß. Auch ist nach (8.)

$$f(\alpha+\gamma) = f(\alpha).f(\gamma),$$

wobei aber immer vorausgesetzt wird, daß x zwischen den Gränzen

$$x = -1, \; x = +1$$

enthalten ist.

13. Sey jetzt zuerst α eine positive ganze Zahl; so ist, wie leicht erhellet,

$${}_\alpha\overset{\alpha+1}{B} = {}_\alpha\overset{\alpha+2}{B} = {}_\alpha\overset{\alpha+3}{B} = {}_\alpha\overset{\alpha+4}{B} = \ldots = 0.$$

Also ist in diesem Falle für jedes x:

$$f(\alpha) = 1 + {}_\alpha\overset{1}{B}x + {}_\alpha\overset{2}{B}x^2 + {}_\alpha\overset{3}{B}x^3 + \ldots + {}_\alpha\overset{\alpha-1}{B}x^{\alpha-1} + {}_\alpha\overset{\alpha}{B}x^\alpha.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $1+x$; so wird

$$\begin{aligned} f(\alpha).(1+x) = 1 &+ |1 + {}_\alpha\overset{1}{B}|x \\ &+ |{}_\alpha\overset{1}{B} + {}_\alpha\overset{2}{B}|x^2 \\ &+ |{}_\alpha\overset{2}{B} + {}_\alpha\overset{3}{B}|x^3 \\ &\ldots\ldots \\ &+ |{}_\alpha\overset{\alpha-1}{B} + {}_\alpha\overset{\alpha}{B}|x^\alpha \\ &+ {}_\alpha\overset{\alpha}{B}x^{\alpha+1} \end{aligned}$$

d. i., wie leicht erhellet:

$$\begin{aligned} f(\alpha).(1+x) = 1 &+ {}_{\alpha+1}\overset{1}{B}x + {}_{\alpha+1}\overset{2}{B}x^2 + {}_{\alpha+1}\overset{3}{B}x^3 + \ldots \\ &\ldots + {}_{\alpha+1}\overset{\alpha}{B}x^\alpha + {}_{\alpha+1}\overset{\alpha+1}{B}x^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

oder

$$f(\alpha).(1+x) = f(\alpha+1).$$

Da nun offenbar

$$f(1) = 1 + x$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + x \\ f(2) &= (1+x)(1+x) = (1+x)^2 \\ f(3) &= (1+x)^2(1+x) = (1+x)^3 \\ f(4) &= (1+x)^3(1+x) = (1+x)^4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

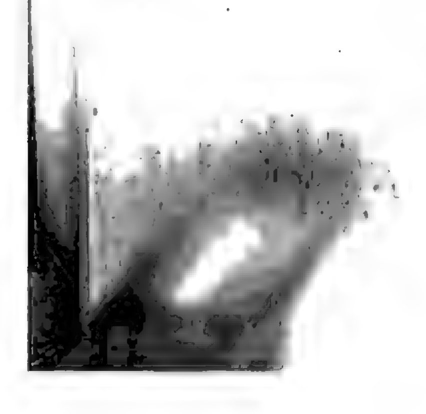
Folglich, für jedes ganze positive α und jedes x:

$$f(\alpha) = (1+x)^\alpha.$$

14. Ist nun wieder α eine positive ganze Zahl, und $\gamma = -\alpha$; so ist, wenn x zwischen den Gränzen

$$x = -1, \; x = +1$$

enthalten ist, nach (12.)



$$f(\alpha).f(-\alpha) = f(\alpha-\alpha) = f(0) .$$

Aber offenbar

$$f(0) = 1 .$$

Also

$$f(\alpha).f(-\alpha) = 1, \; f(-\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)} ;$$

d. i. nach (13.), da α eine positive ganze Zahl ist:

$$f(-\alpha) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} = (1+x)^{-\alpha} .$$

15. Die in (12.) bewiesene Relation läßt sich leicht noch allgemeiner machen. Es ist nämlich, wenn x zwischen den Gränzen

$$x = -1, \; x = +1$$

enthalten ist:

$$f(\alpha).f(\beta) = f(\alpha+\beta)$$
$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma) = f(\alpha+\beta).f(\gamma) = f(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta) = f(\alpha+\beta+\gamma).f(\delta) = f(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

u. s. f. u. s. f.

Also allgemein:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta) \ldots = f(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots) .$$

Setzen wir

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \ldots\ldots ,$$

und die Anzahl dieser Größen $= n$; so folgt aus obiger Gleichung augenblicklich:

$$\{f(\alpha)\}^n = f(n\alpha) .$$

16. Sey nun $\frac{\alpha}{\gamma}$ ein Bruch, wo α positiv oder negativ seyn, γ aber immer als positiv angenommen werden kann; so ist, immer unter der Voraussetzung, daß x zwischen den Gränzen

$$x = -1, \; x = +1$$

enthalten ist, nach (15.), da γ eine positive ganze Zahl ist:

$$\left\{f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right\}^\gamma = f\left(\gamma\frac{\alpha}{\gamma}\right) = f(\alpha) .$$

Aber nach (13.) und (14.):

$$f(\alpha) = (1+x)^\alpha .$$

Also

$$\left\{f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right\}^\gamma = (1+x)^\alpha ,$$

woraus sogleich erhalten wird:

$$f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = (1+x)^{\frac{\alpha}{\gamma}} .$$

17. Ist also x zwischen den Gränzen

$$x = -1, \; x = +1$$

enthalten; so ist nach (13.), (14.) und (16.) für jedes α:

$$f(\alpha) = (1+x)^\alpha ,$$

d. i.

$$(1+x)^\alpha = 1 + {}^\alpha\overset{1}{B}x + {}^\alpha\overset{2}{B}x^2 + {}^\alpha\overset{3}{B}x^3 + \ldots + {}^\alpha\overset{n}{B}x^n + \ldots. ,$$

oder, um zugleich die Gränzen anzudeuten, zwischen welchen x enthalten seyn muß, wenn diese Gleichung arithmetisch richtig seyn soll:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \ldots \begin{Bmatrix} x = -1 \\ x = +1 \end{Bmatrix},$$

nach einer Bezeichnung, deren sich zuerst Cauchy bedient hat. α kann jeden, nur reellen, Werth haben. Auch ist x als reell angenommen worden.

18. Die Summe der n ersten Glieder der imaginären Reihe

$$\begin{aligned} t_0 &= p_0 + q_0 \sqrt{-1} \\ t_1 &= p_1 + q_1 \sqrt{-1} \\ t_2 &= p_2 + q_2 \sqrt{-1} \\ t_3 &= p_3 + q_3 \sqrt{-1} \\ &\text{u. s. f.} \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

sey $= S_n$; so ist

$$\begin{aligned} S_n = & \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots. + p_{n-1} \\ & + \{q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + \ldots. + q_{n-1}\}\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

welches wir der Kürze wegen durch

$$S_n = s_n + \sigma_n \sqrt{-1}$$

bezeichnen wollen. Nähern sich nun s_n und σ_n, wenn n wächst, fortwährend den Gränzen s und σ; so nähert, wenn n wächst, S_n sich der Gränze

$$S = s + \sigma\sqrt{-1} ,$$

und die gegebene imaginäre Reihe ist convergent. Nähert sich aber, wenn n wächst, eine der beiden Größen s_n und σ_n, oder beide, keiner bestimmten Gränze; so wird auch S_n, für wachsende n, sich keiner bestimmten Gränze nähern, und die gegebene imaginäre Reihe folglich divergent seyn. Hieraus folgt also, daß jede imaginäre Reihe

$$\begin{aligned} & p_0 + q_0 \sqrt{-1} \\ & p_1 + q_1 \sqrt{-1} \\ & p_2 + q_2 \sqrt{-1} \\ & p_3 + q_3 \sqrt{-1} \\ & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

convergent ist, wenn die Reihen

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots. ;$$
$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots.$$

beide convergent sind; im entgegengesetzten Falle ist die in Rede stehende imaginäre Reihe divergent.

19. Multiplicirt man die imaginären Größen

$$\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1},\quad \cos\theta' + \sin\theta'\sqrt{-1}$$

in einander; so findet man, nach elementaren trigonometrischen Principien, das Product =

$$\cos(\theta+\theta') + \sin(\theta+\theta')\sqrt{-1}.$$

Hieraus schließt man ferner leicht, daß das Product der Größen

$$\begin{array}{l} \cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1} \\ \cos\theta' + \sin\theta'\sqrt{-1} \\ \cos\theta'' + \sin\theta''\sqrt{-1} \\ \cos\theta''' + \sin\theta'''\sqrt{-1} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$= \cos(\theta+\theta'+\theta''+\theta'''+\ldots) + \sin(\theta+\theta'+\theta''+\theta'''+\ldots)\sqrt{-1}$$

ist. Ist also n eine beliebige positive ganze Zahl; so ist

$$(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^n = \cos n\theta + \sin n\theta\sqrt{-1}.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\{\cos n\theta + \sin n\theta\sqrt{-1}\}\{\cos(-n\theta) + \sin(-n\theta)\sqrt{-1}\}$$
$$= \cos(n\theta - n\theta) + \sin(n\theta - n\theta)\sqrt{-1} = 1;$$

also, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$\cos(-n\theta) + \sin(-n\theta)\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos n\theta + \sin n\theta\sqrt{-1}} =$$
$$= \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^n} = (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-n}.$$

Ist $\frac{n}{m}$ ein Bruch, dessen Nenner positiv ist, der Zähler aber positiv oder negativ seyn kann; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\cos\frac{n}{m}\varphi + \sin\frac{n}{m}\varphi.\sqrt{-1}\right)^m = \cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}$$
$$= (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n;$$

also

$$\cos\frac{n}{m}\varphi + \sin\frac{n}{m}\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}},$$

so daß folglich für jedes n:

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}$$

ist.

Jede imaginäre Größe $a + b\sqrt{-1}$ läßt sich auf die Form

$$\varrho(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})$$

bringen, wo ϱ immer positiv ist, und der **Modulus** genannt wird. Aus der Gleichung

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

folgt nämlich:

$$\varrho\cos\Theta = a,\ \varrho\sin\Theta = b\ ;$$

$$\varrho^2(\cos\Theta^2 + \sin\Theta^2) = \varrho^2 = a^2 + b^2\ ;$$

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\Theta = \frac{a}{\varrho},\ \sin\Theta = \frac{b}{\varrho}.$$

Hierdurch sind ϱ und Θ völlig bestimmt. Aus dem Vorhergehenden folgt:

$$(a + b\sqrt{-1})^n = \varrho^n(\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}).$$

20. Noch fügen wir, bevor wir zu weitern Betrachtungen über die imaginären Reihen übergehen, folgende Bemerkungen über die reellen Reihen bei.

Aus jeder convergenten Reihe mit lauter positiven Gliedern:

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots.$$

erhält man immer auch eine convergente Reihe, wenn man einige Glieder der gegebenen Reihe, in willkührlicher Anzahl, negativ nimmt, ohne den absoluten Werth derselben zu ändern. Ist nämlich s_n die Summe der n ersten Glieder der gegebenen Reihe mit lauter positiven Gliedern, s'_n die Summe der n ersten Glieder der aus dieser Reihe, indem man einige Glieder negativ nimmt, hervorgehenden Reihe; so ist klar, daß, rücksichtlich des numerischen Werths, die Differenz

$$s'_{n+m} - s'_n$$

nie größer als die Differenz

$$s_{n+m} - s_n$$

ist. Diese Differenz kann aber, wenn n wächst, der Null beliebig nahe gebracht werden, welches also um so mehr auch von der Differenz

$$s'_{n+m} - s'_n$$

gilt.

Multiplicirt man die Glieder einer convergenten Reihe mit lauter positiven Gliedern mit positiven Größen, deren keine die Einheit übersteigt; so ist die auf diese Weise entstehende Reihe ebenfalls convergent, wie sehr leicht durch ganz ähnliche Schlüsse, wie vorher, bewiesen werden kann. Da nun diese Reihe auch convergent bleibt, wenn man einige Glieder, in willkührlicher Anzahl, negativ nimmt; so ist klar, daß man stets eine convergirende Reihe erhält, wenn man alle Glieder einer convergirenden Reihe mit positiven Gliedern mit beliebigen, positiven oder negativen, Größen multiplicirt, wenn nur der numerische Werth keiner dieser Größen die Einheit übersteigt.

Wenn

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots.\ ;$$

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots.$$

convergirende Reihen, und s, s' deren Summen sind; so ist auch

$$t_0 \pm u_0,\; t_1 \pm u_1,\; t_2 \pm u_2,\; t_3 \pm u_3,\; \ldots\ldots$$

eine convergirende Reihe, und die Summe dieser Reihe $= s \pm s'$.

Die Summen der n ersten Glieder der beiden ersten Reihen seyen s_n, s'_n; so ist $s_n \pm s'$ die Summe der n ersten Gliedern der dritten Reihe. Da nun, wenn n wächst, s_n und s'_n sich fortwährend den Gränzen s und s' nähern; so nähert sich, für wachsende n, offenbar $s_n \pm s'_n$ immer mehr und mehr der Gränze $s \pm s'$, und kann derselben, eben so wie s_n und s'_n ihren Gränzen, beliebig nahe gebracht werden. Also ist die in Rede stehende Reihe convergent, und ihre Summe $= s \pm s'$ (2.).

21. Wenn

$$t_0,\; t_1,\; t_2,\; t_3,\; t_4,\; \ldots\ldots;$$
$$u_0,\; u_1,\; u_2,\; u_3,\; u_4,\; \ldots\ldots$$

zwei convergirende imaginäre Reihen, und deren Summen S und S' sind; so ist immer auch

$$t_0\, u_0$$
$$t_0\, u_1 + t_1\, u_0$$
$$t_0\, u_2 + t_1\, u_1 + t_2\, u_0$$
$$t_0\, u_3 + t_1\, u_2 + t_2\, u_1 + t_3\, u_0$$
$$t_0\, u_4 + t_1\, u_3 + t_2\, u_2 + t_3\, u_1 + t_4 + u_0$$
u. s. f. u. s. f.

eine convergirende Reihe, deren Summe $= SS'$ ist, wenn nur auch die Moduli der einzelnen Glieder der beiden gegebenen Reihen convergirende Reihen bilden.

Man setze (19.)

$$t_n = \varrho_n(\cos\Theta_n + \sin\Theta_n\sqrt{-1}),\quad u_n = \varrho'_n(\cos\Theta'_n + \sin\Theta'_n\sqrt{-1});$$

so sind nach der Voraussetzung

$$\varrho_0,\; \varrho_1,\; \varrho_2,\; \varrho_3,\; \varrho_4,\; \varrho_5,\; \ldots\ldots;$$
$$\varrho'_0,\; \varrho'_1,\; \varrho'_2,\; \varrho'_3,\; \varrho'_4,\; \varrho'_5,\; \ldots\ldots$$

convergirende Reihen mit lauter positiven Gliedern. Folglich sind auch

$$\varrho_0\cos\Theta_0,\; \varrho_1\cos\Theta_1,\; \varrho_2\cos\Theta_2,\; \varrho_3\cos\Theta_3,\; \ldots\ldots;$$
$$\varrho_0\sin\Theta_0,\; \varrho_1\sin\Theta_1,\; \varrho_2\sin\Theta_2,\; \varrho_3\sin\Theta_3,\; \ldots\ldots;$$
$$\varrho'_0\cos\Theta'_0,\; \varrho'_1\cos\Theta'_1,\; \varrho'_2\cos\Theta'_2,\; \varrho'_3\cos\Theta'_3,\; \ldots\ldots;$$
$$\varrho'_0\sin\Theta'_0,\; \varrho'_1\sin\Theta'_1,\; \varrho'_2\sin\Theta'_2,\; \varrho'_3\sin\Theta'_3,\; \ldots\ldots$$

convergirende Reihen (20.), deren Summen wir respective durch s, σ, s', σ' bezeichnen wollen. Auch bleiben nach (20.) diese Reihen offenbar convergent, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt. Also sind nach (6.) auch

$$\varrho_0\varrho'_0\cos\Theta_0\cos\Theta'_0$$
$$\varrho_0\varrho'_1\cos\Theta_0\cos\Theta'_1 + \varrho_1\varrho'_0\cos\Theta_1\cos\Theta'_0$$
$$\varrho_0\varrho'_2\cos\Theta_0\cos\Theta'_2 + \varrho_1\varrho'_1\cos\Theta_1\cos\Theta'_1 + \varrho_2\varrho'_0\cos\Theta_2\cos\Theta'_0$$
u. s. f. u. s. f.

$$\varrho_0 \varrho'_0 \sin\theta_0 \sin\theta'_0$$
$$\varrho_0 \varrho'_1 \sin\theta_0 \sin\theta'_1 + \varrho_1 \varrho'_0 \sin\theta_1 \sin\theta'_0$$
$$\varrho_0 \varrho'_2 \sin\theta_0 \sin\theta'_2 + \varrho_1 \varrho'_1 \sin\theta_1 \sin\theta'_1 + \varrho_2 \varrho'_0 \sin\theta_2 \sin\theta'_0$$
u. s. f. u. s. f.

$$\varrho_0 \varrho'_0 \cos\theta_0 \sin\theta'_0$$
$$\varrho_0 \varrho'_1 \cos\theta_0 \sin\theta'_1 + \varrho_1 \varrho'_0 \cos\theta_1 \sin\theta'_0$$
$$\varrho_0 \varrho'_2 \cos\theta_0 \sin\theta'_2 + \varrho_1 \varrho'_1 \cos\theta_1 \sin\theta'_1 + \varrho_2 \varrho'_0 \cos\theta_2 \sin\theta'_0$$
u. s. f. u. s. f.

$$\varrho_0 \varrho'_0 \sin\theta_0 \cos\theta'_0$$
$$\varrho_0 \varrho'_1 \sin\theta_0 \cos\theta'_1 + \varrho_1 \varrho'_0 \sin\theta_1 \cos\theta'_0$$
$$\varrho_0 \varrho'_2 \sin\theta_0 \cos\theta'_2 + \varrho_1 \varrho'_1 \sin\theta_1 \cos\theta'_1 + \varrho_2 \varrho'_0 \sin\theta_2 \cos\theta'_0$$
u. s. f. n. s. f.

convergirende Reihen, deren Summen respective ss', $\sigma\sigma'$, $s\sigma'$, $\sigma s'$ sind. Bezeichnet man nun die Glieder der obigen Reihen respective durch

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,\ \ldots\ldots;$$
$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ \ldots\ldots;$$
$$T'_0,\ T'_1,\ T'_2,\ T'_3,\ T'_4,\ T'_5,\ \ldots\ldots;$$
$$U'_0,\ U'_1,\ U'_2,\ U'_3,\ U'_4,\ U'_5,\ \ldots\ldots;$$

so sind auch

$$T_0 - U_0,\ T_1 - U_1,\ T_2 - U_2,\ T_3 - U_3,\ \ldots\ldots;$$
$$T'_0 + U'_0,\ T'_1 + U'_1,\ T'_2 + U'_2,\ T'_3 + U'_3,\ \ldots\ldots$$

convergirende Reihen, deren Summen $ss' - \sigma\sigma'$, $s\sigma' + \sigma s'$ sind (20.). Also ist auch

$$T_0 - U_0 + (T'_0 + U'_0)\sqrt{-1}$$
$$T_1 - U_1 + (T'_1 + U'_1)\sqrt{-1}$$
$$T_2 - U_2 + (T'_2 + U'_2)\sqrt{-1}$$
$$T_3 - U_3 + (T'_3 + U'_3)\sqrt{-1}$$
u. s. f. u. s. f.

eine convergirende Reihe, und

$$ss' - \sigma\sigma' + (s\sigma' + \sigma s')\sqrt{-1}$$

die Summe dieser Reihe (18.). Allgemein ist nun

$$t_n u_m = \varrho_n \varrho'_m (\cos\theta_n + \sin\theta_n \sqrt{-1})(\cos\theta'_m + \sin\theta'_m \sqrt{-1})$$
$$= \varrho_n \varrho'_m \cos\theta_n \cos\theta'_m - \varrho_n \varrho'_m \sin\theta_n \sin\theta'_m$$
$$+ \{\varrho_n \varrho'_m \cos\theta_n \sin\theta'_m + \varrho_n \varrho'_m \sin\theta_n \cos\theta'_m\}\sqrt{-1},$$

woraus sogleich erhellet, daß die Reihe

$$t_0 u_0$$
$$t_0 u_1 + t_1 u_0$$
$$t_0 u_2 + t_1 u_1 + t_2 u_0$$
$$t_0 u_3 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + t_3 u_0$$
u. s. f. u. s. f.

welche im Folgenden durch (R) bezeichnet werden soll, mit der Reihe

$$T_0 - U_0 + (T'_0 + U'_0)\sqrt{-1}$$
$$T_1 - U_1 + (T'_1 + U'_1)\sqrt{-1}$$
$$T_2 - U_2 + (T'_2 + U'_2)\sqrt{-1}$$
$$T_3 - U_3 + (T'_3 + U'_3)\sqrt{-1}$$
u. s. f. u. s. f.

einerlei ist. Also ist die Reihe (R) convergent, und ihre Summe

$$= ss' - \sigma\sigma' + (s\sigma' + \sigma s')\sqrt{-1} = \Sigma\,.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$S = s + \sigma\sqrt{-1},\ S' = s' + \sigma'\sqrt{-1};$$
$$SS' = ss' - \sigma\sigma' + (s\sigma' + \sigma s')\sqrt{-1}\,.$$

Folglich $\Sigma = SS'$, w. z. b. w.

22. Um zu beurtheilen, ob die imaginäre Reihe

$$p_0 + q_0\sqrt{-1}$$
$$p_1 + q_1\sqrt{-1}$$
$$p_2 + q_2\sqrt{-1}$$
$$p_3 + q_3\sqrt{-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

convergirt oder divergirt, bringe man dieselbe auf die Form:

$$\varrho_0(\cos\Theta_0 + \sin\Theta_0\sqrt{-1})$$
$$\varrho_1(\cos\Theta_1 + \sin\Theta_1\sqrt{-1})$$
$$\varrho_2(\cos\Theta_2 + \sin\Theta_2\sqrt{-1})$$
$$\varrho_3(\cos\Theta_3 + \sin\Theta_3\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nähert nun, für wachsende n, das Verhältniß

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$$

sich einer bestimmten Gränze; so ist die Reihe

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots,$$

deren Glieder sämmtlich positiv sind, convergent, wenn diese Gränze < 1 ist (3.). Also sind auch die Reihen

$$\varrho_0\cos\Theta_0,\ \varrho_1\cos\Theta_1,\ \varrho_2\cos\Theta_2,\ \varrho_3\cos\Theta_3,\ \ldots\ldots;$$
$$\varrho_0\sin\Theta_0,\ \varrho_1\sin\Theta_1,\ \varrho_2\sin\Theta_2,\ \varrho_3\sin\Theta_3,\ \ldots\ldots$$

convergent (20.); folglich auch die gegebene Reihe (18.).

Ist aber die Gränze, welcher, für wachsende n, das Verhältniß

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$$

sich nähert, > 1; so wird es, wenn wir diese Gränze durch L bezeichnen, immer eine Größe T von solcher Beschaffenheit geben, daß

$$L > T > 1$$

ist, und n wird man immer groß genug annehmen können, daß

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} > T\,,\quad \varrho_{n+1} > T\varrho_n\,;$$

$$\frac{\varrho_{n+2}}{\varrho_{n+1}} > T\,,\quad \varrho_{n+2} > T\varrho_{n+1}\,;$$

$$\frac{\varrho_{n+3}}{\varrho_{n+2}} > T\,,\quad \varrho_{n+3} > T\varrho_{n+2}\,;$$

u. s. f. u. s. f.

ist. Hieraus ergiebt sich

$$\varrho_{n+1} > T\varrho_n$$
$$\varrho_{n+2} > T^2\varrho_n$$
$$\varrho_{n+3} > T^3\varrho_n$$
$$\varrho_{n+4} > T^4\varrho_n$$
u. s. f. u. s. f.

Die Potenzen von T wachsen, da $T > 1$ ist, über alle Gränzen. Also wächst auch ϱ_{n+x} mit x, d. i. ϱ_n mit n, über alle Gränzen. Nun ist aber

$$\varrho_n = \sqrt{(p_n)^2 + (q_n)^2}\,,$$

und kann folglich mit n nicht über alle Gränzen wachsen, wenn nicht wenigstens eine der Größen p_n, q_n, rücksichtlich ihres absoluten Werths, mit n über alle Gränzen wächst. In einem solchen Falle ist aber immer eine der Reihen, deren allgemeine Glieder p_n, q_n sind, divergent, weil dann für eine solche Reihe die Differenz

$$s_{n+m} - s_n$$

für $m = 1$, der Null nicht beliebig nahe gebracht werden kann, wenn n wächst, da dies doch für jedes m Statt finden müßte, wenn die Reihe convergent seyn sollte (2.). Folglich ist auch die imaginäre Reihe divergent, wenn $L > 1$ ist (18.).

23. Betrachten wir endlich noch die Reihe

$$a_0(\cos\Theta_0 + \sin\Theta_0\sqrt{-1})$$
$$a_1x(\cos\Theta_1 + \sin\Theta_1\sqrt{-1})$$
$$a_2x^2(\cos\Theta_2 + \sin\Theta_2\sqrt{-1})$$
$$a_3x^3(\cos\Theta_3 + \sin\Theta_3\sqrt{-1})$$
. . . .

Die numerischen Werthe von a_n und x seyen α_n und ξ. Der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

nähere sich, wenn n wächst, der Gränze L; so nähert

$$\frac{\alpha_{n+1}\xi^{n+1}}{\alpha_n\xi^n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\xi$$

sich der Gränze $L\xi$. Setzen wir nun, eine willkührliche Folge der Vorzeichen annehmend, daß die Reihe

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ a_5x^5,\ \ldots\ldots$$

übereinstimmend sey mit der Reihe

$$-\alpha_0,\ -\alpha_1\xi,\ \alpha_2\xi^2,\ -\alpha_3\xi^3,\ \alpha_4\xi^4,\ -\alpha_5\xi^5,\ \ldots\ldots$$

Nach (22.) ist die Reihe

$$\alpha_0\{\cos(\pi+\Theta_0)+\sin(\pi+\Theta_0)\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_1\xi\{\cos(\pi+\Theta_1)+\sin(\pi+\Theta_1)\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_2\xi^2\{\cos\Theta_2+\sin\Theta_2\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_3\xi^3\{\cos(\pi+\Theta_3)+\sin(\pi+\Theta_3)\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_4\xi^4\{\cos\Theta_4+\sin\Theta_4\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_5\xi^5\{\cos(\pi+\Theta_5)+\sin(\pi+\Theta_5)\sqrt{-1}\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

convergent oder divergent, jenachdem $L\xi < 1$, oder $L\xi > 1$, d. i. jenachdem $\xi < \frac{1}{L}$, oder $\xi > \frac{1}{L}$ ist. Die letztere Reihe bringt man aber leicht auf:

$$-\alpha_0(\cos\Theta_0+\sin\Theta_0\sqrt{-1})$$
$$-\alpha_1\xi(\cos\Theta_1+\sin\Theta_1\sqrt{-1})$$
$$\alpha_2\xi^2(\cos\Theta_2+\sin\Theta_2\sqrt{-1})$$
$$-\alpha_3\xi^3(\cos\Theta_3+\sin\Theta_3\sqrt{-1})$$
$$\alpha_4\xi^4(\cos\Theta_4+\sin\Theta_4\sqrt{-1})$$
$$-\alpha_5\xi^5(\cos\Theta_5+\sin\Theta_5\sqrt{-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. i. auf:

$$a_0(\cos\Theta_0+\sin\Theta_0\sqrt{-1})$$
$$a_1x(\cos\Theta_1+\sin\Theta_1\sqrt{-1})$$
$$a_2x^2(\cos\Theta_2+\sin\Theta_2\sqrt{-1})$$
$$a_3x^3(\cos\Theta_3+\sin\Theta_3\sqrt{-1})$$
$$a_4x^4(\cos\Theta_4+\sin\Theta_4\sqrt{-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so daß also auch diese Reihe convergent oder divergent ist, jenachdem $\xi < \frac{1}{L}$, oder $\xi > \frac{1}{L}$, d. i. jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x = -\frac{1}{L},\quad x = +\frac{1}{L}$$

enthalten ist, oder nicht.

24. Wir wollen nun die Reihe

$$\begin{aligned} 1 &+ {}^{\alpha}\overset{1}{B}x(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{2}{B}x^2(\cos2\theta + \sin2\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{3}{B}x^3(\cos3\theta + \sin3\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{4}{B}x^4(\cos4\theta + \sin4\theta\sqrt{-1}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

zu summiren suchen. Aus (11.) und (23.) ergiebt sich sogleich, daß diese Reihe convergirt oder divergirt, jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthalten ist, oder nicht. Auch ist klar, daß der Modulus des Gliedes

$${}^{\alpha}\overset{n}{B}x^n(\cos n\theta + \sin n\theta\sqrt{-1})$$

der positive Werth von ${}^{\alpha}\overset{n}{B}x^n$ ist, und daß folglich, wie sogleich aus (3.) und (11.) erhellet, unter derselben Voraussetzung in Bezug auf die Gränzen von x, auch die Moduli der einzelnen Glieder obiger Reihe eine convergirende Reihe bilden. Daher ist der in (21.) bewiesene Satz auf diese Reihe und eine jede ihr ähnliche anwendbar.

Setzen wir also für jedes zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthaltene x:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 1 &+ {}^{\alpha}\overset{1}{B}x(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{2}{B}x^2(\cos2\theta + \sin2\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{3}{B}x^3(\cos3\theta + \sin3\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{4}{B}x^4(\cos4\theta + \sin4\theta\sqrt{-1}) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\gamma) = 1 &+ {}^{\gamma}\overset{1}{B}x(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\gamma}\overset{2}{B}x^2(\cos2\theta + \sin2\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\gamma}\overset{3}{B}x^3(\cos3\theta + \sin3\theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\gamma}\overset{4}{B}x^4(\cos4\theta + \sin4\theta\sqrt{-1}) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus (21.), mit Anwendung von (19.) und (10.):

$$f(\alpha).f(\gamma) =$$

$$1 + |{}^{\alpha}\overset{1}{B} + {}^{\gamma}\overset{1}{B}|x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ |{}^{\alpha}\overset{2}{B} + {}^{\alpha}\overset{1}{B}{}^{\gamma}\overset{1}{B} + {}^{\gamma}\overset{2}{B}|x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ |{}^{\alpha}\overset{3}{B} + {}^{\alpha}\overset{2}{B}{}^{\gamma}\overset{1}{B} + {}^{\alpha}\overset{1}{B}{}^{\gamma}\overset{2}{B} + {}^{\gamma}\overset{3}{B}|x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= 1 + {}^{\alpha+\gamma}\overset{1}{B}x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha+\gamma}\overset{2}{B}x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha+\gamma}\overset{3}{B}x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha+\gamma}\overset{4}{B}x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

d. i. für jedes x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1:$$
$$f(\alpha).f(\gamma) = f(\alpha+\gamma).$$

25. Sey zunächst α eine positive ganze Zahl, und x eine beliebige reelle Größe; so ist

$$f(\alpha) = 1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha}\overset{2}{B}x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha}\overset{3}{B}x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ {}^{\alpha}\overset{\alpha}{B}x^{\alpha}(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1})$$

Folglich, wenn man mit

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

multiplicirt, nach (19.)

$$f(\alpha).|1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})| = 1$$
$$+ (1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B})x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ ({}^{\alpha}\overset{1}{B} + {}^{\alpha}\overset{2}{B})x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ ({}^{\alpha}\overset{\alpha-1}{B} + {}^{\alpha}\overset{\alpha}{B})x^{\alpha}(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha}\overset{\alpha}{B}x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta + \sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1})$$

$$= 1 + {}^{\alpha+1}\overset{1}{B}x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha+1}\overset{2}{B}x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ {}^{\alpha+1}\overset{\alpha}{B}x^{\alpha}(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ {}^{\alpha+1}\overset{\alpha+1}{B}x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta + \sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}),$$

d. i.

$$f(\alpha+1) = f(\alpha).\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}.$$

Weil nun

$$f(1) = 1+x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

ist; so ergiebt sich hieraus, ganz wie in (13.), daß für jedes ganze positive α

$$f(\alpha) = \{1+x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\alpha}$$

ist.

26. Ist nun wieder α eine positive ganze Zahl, und $\gamma = -\alpha$, x aber zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten; so folgt aus (24.):

$$f(\alpha).f(-\alpha) = f(0) = 1;$$

also nach (25.):

$$f(-\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)} = \{1+x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{-\alpha}.$$

Aus der in (24.) bewiesenen Relation folgt leicht, ganz wie in (15.),

$$\{f(\alpha)\}^{n} = f(n\alpha),$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist. Ist nun $\frac{\alpha}{\gamma}$ ein positiver oder negativer Bruch, wo α positiv oder negativ seyn, γ aber immer als positiv angenommen werden kann; so ist, immer unter der obigen Voraussetzung in Bezug auf die Gränzen von x:

$$\left\{f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right\}^{\gamma} = f\left(\gamma\frac{\alpha}{\gamma}\right) = f(\alpha),$$

$$f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \{f(\alpha)\}^{\frac{1}{\gamma}} = \{1+x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Ist also x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthalten; so ist immer

$$f(\alpha) = \{1+x(\cos x + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\alpha}.$$

Setzen wir jetzt

$$1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1});$$

so wird

$$\varrho\cos\varphi = 1+x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta;$$

$$\varrho^2 = (1+x\cos\Theta)^2 + x^2\sin\Theta^2$$
$$= 1+2x\cos\Theta + x^2,$$

$$\varrho = (1+2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{x\sin\Theta}{\varrho},\quad \cos\varphi = \frac{1+x\cos\Theta}{\varrho},\quad \tan\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}.$$

Da x zwischen den Gränzen — 1 und + 1 enthalten ist, so ist $\cos\varphi$ offenbar immer positiv. Also wird den Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\ \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta$$

durch den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen φ genügt, für welchen

$$\tan\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ist. Für diesen Bogen ist folglich

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Also nach (19.)

$$f(\alpha) = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$

für jedes zwischen den Gränzen — 1 und + 1 enthaltene x.

27. Durch Vergleichung der reellen und imaginären Glieder in dieser Gleichung ergiebt sich für jedes x zwischen denselben Gränzen:

$$(1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha\varphi$$

$$= 1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}x\cos\Theta + {}^{\alpha}\overset{2}{B}x^2\cos2\Theta + {}^{\alpha}\overset{3}{B}x^3\cos3\Theta + \ldots\ldots,$$

$$(1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha\varphi$$

$$= {}^{\alpha}\overset{1}{B}x\sin\Theta + {}^{\alpha}\overset{2}{B}x^2\sin2\Theta + {}^{\alpha}\overset{3}{B}x^3\sin3\Theta + \ldots\ldots,$$

wo immer φ der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene Bogen ist, für welchen

$$\tan\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ist.

28. Sey jetzt die Reihe

$$\begin{aligned}1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}(a + b\sqrt{-1}) &+ {}^{\alpha}\overset{2}{B}(a + b\sqrt{-1})^2 \\ &+ {}^{\alpha}\overset{3}{B}(a + b\sqrt{-1})^3 \\ &+ {}^{\alpha}\overset{4}{B}(a + b\sqrt{-1})^4 \\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

zu summiren. Man setze

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1});$$

so findet man

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\Theta = \frac{a}{\varrho},\ \sin\Theta = \frac{b}{\varrho},$$

und unsere Reihe wird:

$$\begin{aligned}1 &+ {}^{\alpha}\overset{1}{B}\varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{2}{B}\varrho^2(\cos2\Theta + \sin2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ {}^{\alpha}\overset{3}{B}\varrho^3(\cos3\Theta + \sin3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Für $\varrho = \sqrt{a^2+b^2} < 1$ ist diese Reihe convergent, wie aus dem Vorhergehenden erhellet. Nach (26.) erhält man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{1+a},\ \varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a},$$

vorausgesetzt, daß φ immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird. Ferner ist

$$1 + 2\varrho\cos\Theta + \varrho^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2 = (1+a)^2 + b^2 .$$

Also ist, für

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1,$$

die Summe unserer Reihe nach (26.):

$$\left\{(1+a)^2+b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}.\left\{\cos\left(\alpha\operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}\right)+\sin\left(\alpha\operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}\right).\sqrt{-1}\right\}.$$

29. Bevor wir zu andern Entwickelungen über die Binomial-Reihe übergehen, wollen wir zuvörderst noch einige andere Summirungen einschalten, welche sich aus dem Obigen leicht ergeben. Suchen wir zuerst die Summe der Reihe

$$\begin{aligned}1 &+ \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\\ &+ \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ &+ \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Setzen wir in der in (26.) summirten Reihe

$$\alpha = \frac{1}{\gamma},\ x = \gamma x;$$

so wird nach (26.)

$$\begin{aligned}1 &+ \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\\ &+ \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})(1-\gamma)\\ &+ \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})(1-\gamma)(1-2\gamma)\\ &+ \frac{x^4}{1\ldots4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})(1-\gamma)(1-2\gamma)(1-3\gamma)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= (1 + 2\gamma x\cos\Theta + \gamma^2x^2)^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\cos\frac{\varphi}{\gamma} + \sin\frac{\varphi}{\gamma}.\sqrt{-1}\right),\end{aligned}$$

für jedes x, welches zwischen den Gränzen

$$x = -\frac{1}{\gamma},\ x = +\frac{1}{\gamma}$$

enthalten ist. Der Winkel φ wird aus der Gleichung

$$\tan g\,\varphi = \frac{\gamma x \sin\Theta}{1 + \gamma x \cos\Theta}$$

bestimmt, unter der Bedingung, daß φ zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird. Läßt man nun den numerischen Werth von γ in's Unendliche abnehmen; so ergiebt sich aus obiger Gleichung, bei welcher man zu bemerken hat, daß die Reihe auf der linken Seite convergirt, augenblicklich:

$$1 + \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$

$$+ \frac{x^4}{1\ldots 4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \mathrm{Lim}\left\{(1 + 2\gamma x\cos\Theta + \gamma^2 x^2)^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\cos\frac{\varphi}{\gamma} + \sin\frac{\varphi}{\gamma}\sqrt{-1}\right)\right\}$$

für jedes x zwischen den Gränzen

$$x = -\infty,\ x = +\infty.$$

Sey jetzt

$$2\gamma x\cos\Theta + \gamma^2 x^2 = \varDelta;$$

so ist

$$x\cos\Theta + \frac{\gamma x^2}{2} = \frac{\varDelta}{2\gamma},\ \frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{\varDelta}\left\{x\cos\Theta + \frac{\gamma x^2}{2}\right\};$$

also

$$(1 + 2\gamma x\cos\Theta + \gamma^2 x^2)^{\frac{1}{2\gamma}} = \left\{(1+\varDelta)^{\frac{1}{\varDelta}}\right\}^{x\cos\Theta + \frac{\gamma x^2}{2}}.$$

Nimmt nun γ in's Unendliche ab, so nimmt auch $\varDelta$ in's Unendliche ab. Die Gränze, welcher

$$x\cos\Theta + \frac{\gamma x^2}{2}$$

sich nähert, ist $= x\cos\Theta$. Die Gränze, welcher

$$(1+\varDelta)^{\frac{1}{\varDelta}}$$

sich nähert, wenn $\varDelta$ sich der Null nähert, sey $= e$; denn daß es eine solche Gränze wirklich giebt, soll sogleich gezeigt werden, indem wir dabei zugleich zu der Bestimmung dieser Gränze selbst gelangen werden. Es ist nämlich

$$1 + \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \mathrm{Lim}\left\{\left((1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right)^{x\cos\Theta + \frac{\gamma x^2}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{\gamma} + \sin\frac{\varphi}{\gamma}.\sqrt{-1}\right)\right\};$$

also für $\Theta = 0$:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots\ldots$$
$$= \mathrm{Lim}\left\{\left((1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right)^{x+\frac{\gamma x^2}{2}}\right\}$$
$$= \mathrm{Lim}\left\{\left((1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right)^{x}\right\}.\mathrm{Lim}\left\{\left((1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right)^{\frac{\gamma x^2}{2}}\right\}.$$

Da aber $\frac{\gamma x^2}{2}$, wenn γ abnimmt, sich der Null immer mehr und mehr nähert; so ist offenbar

$$\mathrm{Lim}\left\{\left((1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right)^{\frac{\gamma x^2}{2}}\right\} = 1.$$

Folglich

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots = \mathrm{Lim}\left\{\left((1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right)x\right\}$$

für jedes x zwischen den Gränzen

$$x = -\infty,\ x = +\infty.$$

Also für $x = 1$:

$$\mathrm{Lim}\left\{(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\right\} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots4} + \ldots = e,$$

wodurch e bestimmt ist. Daher ist

$$\mathrm{Lim}(1 + 2\gamma x\cos\Theta + \gamma^2 x^2)^{\frac{1}{2\gamma}} = e^{x\cos\Theta}.$$

Da nun, wenn γ abnimmt,

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\gamma x\sin\Theta}{1 + \gamma x\cos\Theta}$$

sich offenbar der Null immer mehr und mehr nähert; so nähert

$$\frac{\varphi}{\mathrm{tang}\,\varphi} = \frac{1}{\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}\cos\varphi$$

sich augenscheinlich fortwährend der Einheit, wobei zu bemerken ist, daß φ und $\mathrm{tang}\,\varphi$ immer gleichzeitig positiv und negativ sind. Ferner ist

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{\varphi}{\mathrm{tang}\,\varphi}.\frac{x\sin\Theta}{1 + \gamma x\cos\Theta}.$$

Also nähert $\frac{\varphi}{\gamma}$ sich, wenn γ abnimmt, immer mehr und mehr der Größe $x \sin\Theta$. Es ist folglich

$$\text{Lim}\left\{(1+2\gamma x\cos\Theta+\gamma^2x^2)^{\frac{1}{2\gamma}}\cos\frac{\varphi}{\gamma}\right\}=e^{x\cos\Theta}\cos(x\sin\Theta),$$

$$\text{Lim}\left\{(1+2\gamma x\cos\Theta+\gamma^2x^2)^{\frac{1}{2\gamma}}\sin\frac{\varphi}{\gamma}\right\}=e^{x\cos\Theta}\sin(x\sin\Theta),$$

$$\text{Lim}\left\{(1+2\gamma x\cos\Theta+\gamma^2x^2)^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\cos\frac{\varphi}{\gamma}+\sin\frac{\varphi}{\gamma}.\sqrt{-1}\right)\right\}$$
$$=e^{x\cos\Theta}\left\{\cos(x\sin\Theta)+\sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\right\}.$$

Wir erhalten also:

$$1+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^2}{1.2}(\cos2\Theta+\sin2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}(\cos3\Theta+\sin3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^4}{1\ldots4}(\cos4\Theta+\sin4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=e^{x\cos\Theta}\left\{\cos(x\sin\Theta)+\sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\right\}$$

für jedes x zwischen den Gränzen

$$x=-\infty,\ x=+\infty.$$

Um e zu bestimmnn setze man $\Theta=0$; so wird

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1\ldots4}+\ldots=e^x,$$

für jedes x zwischen obigen Gränzen. Für $x=1$ also

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1\ldots4}+\ldots\ldots,$$

wie vorher.

Aus Vergleichung der reellen und imaginären Theile in obiger Gleichung ergiebt sich:

$$e^{x\cos\Theta}\cos(x\sin\Theta)=$$
$$1+\frac{x}{1}\cos\Theta+\frac{x^2}{1.2}\cos2\Theta+\frac{x^3}{1.2.3}\cos3\Theta+\ldots\ldots,$$
$$e^{x\cos\Theta}\sin(x\sin\Theta)=$$
$$\frac{x}{1}\sin\Theta+\frac{x^2}{1.2}\sin2\Theta+\frac{x^3}{1.2.3}\sin3\Theta+\ldots\ldots,$$

für jedes x zwischen

$$x=-\infty,\ x=+\infty.$$

Setzt man $\Theta=\frac{1}{2}\pi$; so ist

$$\cos\Theta = 0,\ \cos 2\Theta = -1,\ \cos 3\Theta = 0,\ \cos 4\Theta = +1, \ldots;$$
$$\sin\Theta = 1,\ \sin 2\Theta = 0,\ \sin 3\Theta = -1,\ \sin 4\Theta = 0, \ldots.$$

Dies giebt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots,$$

für jedes x zwischen

$$x = -\infty,\ x = +\infty.$$

30. Die Summe der Reihe

$$\frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

läßt sich in dem Falle, daß x zwischen den Gränzen

$$x = -1,\ x = +1$$

enthalten ist, ebenfalls aus dem Vorhergehenden **ableiten.** Bezeichnen wir nämlich die Logarithmen, deren Basis $= e$ **(29.)** ist, durch l; so ist

$$(1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}\alpha} = e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}.$$

Also nach (26.) für jedes zwischen obigen Gränzen **enthaltene x:**

$$1 + \frac{\alpha}{1}x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$

für

$$\tang\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}.$$

Nach (29.) ist nun

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1..4} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1..4} - \frac{z^6}{1...6} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1..5} - \frac{z^7}{1...7} + \ldots,$$

für jedes y und z, so daß also diese Reihen, weil sie sich summiren lassen, auch für jedes y und jedes z convergent sind. Da allgemein

$$\frac{y^{n+1}}{1...(n+1)} : \frac{y^n}{1....n} = \frac{y}{n+1},$$

$$\frac{z^{n+2}}{1...(n+2)} : \frac{z^n}{1....n} = \frac{z^2}{(n+1)(n+2)}$$

ist; so ist klar, daß diese Quotienten, wenn n wächst, sich fortwährend der Null nähern, und daß also unsere obigen Reihen auch dann noch convergent bleiben, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt (4.). Man kann also auf diese Reihen den in (6.) bewiesenen Satz anwenden. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos\beta x = \; & 1 \\ & + \frac{\alpha x}{1} - \frac{\beta^2 x^2}{1.2} \\ & + \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} - \frac{\alpha x}{1}.\frac{\beta^2 x^2}{1.2} + \frac{\beta^4 x^4}{1..4} \\ & + \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} - \frac{\alpha^2 x^2}{1.2}.\frac{\beta^2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha x}{1}.\frac{\beta^4 x^4}{1..4} - \frac{\beta^6 x^6}{1..6} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\sin\beta x = \; & \frac{\beta x}{1} \\ & + \frac{\alpha x}{1}.\frac{\beta x}{1} - \frac{\beta^3 x^3}{1.2.3} \\ & + \frac{\alpha^2 x^2}{1.2}.\frac{\beta x}{1} - \frac{\alpha x}{1}.\frac{\beta^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\beta^5 x^5}{1..5} \\ & + \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3}.\frac{\beta x}{1} - \frac{\alpha^2 x^2}{1.2}.\frac{\beta^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\alpha x}{1}.\frac{\beta^5 x^5}{1..5} - \frac{\beta^7 x^7}{1..7} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Also

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x\sqrt{-1}) =$$

$$\begin{aligned} 1 & + \{\alpha + \beta\sqrt{-1}\}\frac{x}{1} \\ & + \{\alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{-1} - \beta^2\}\frac{x^2}{1.2} \\ & + \{\alpha^3 + 3\alpha^2\beta\sqrt{-1} - 3\alpha\beta^2 - \beta^3\sqrt{-1}\}\frac{x^3}{1.2.3} \end{aligned}$$

$$+\left\{\alpha^4+4\alpha^3\beta\sqrt{-1}-6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3\sqrt{-1}+\beta^4\right\}\frac{x^4}{1\ldots4}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=1$$
$$+\left\{\alpha+\beta\sqrt{-1}\right\}\frac{x}{1}$$
$$+\left\{\alpha^2+2\alpha(\beta\sqrt{-1})+(\beta\sqrt{-1})^2\right\}\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\left\{\alpha^3+3\alpha^2(\beta\sqrt{-1})+3\alpha(\beta\sqrt{-1})^2+(\beta\sqrt{-1})^3\right\}\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+\left\{\alpha^4+4\alpha^3(\beta\sqrt{-1})+6\alpha^2(\beta\sqrt{-1})^2+4\alpha(\beta\sqrt{-1})^3+(\beta\sqrt{-1})^4\right\}\frac{x^4}{1\ldots4}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. i.

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x+\sin\beta x\sqrt{-1})=$$
$$1+(\alpha+\beta\sqrt{-1}).\frac{x}{1}$$
$$+(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3.\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+(\alpha+\beta\sqrt{-1})^4.\frac{x^4}{1\ldots4}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

Folglich nach dem Obigen

$$1+\frac{\alpha}{1}x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2(\cos2\Theta+\sin2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3(\cos3\Theta+\sin3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=1+\left\{\tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}.\frac{\alpha}{1}$$
$$+\left\{\tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^2.\frac{\alpha^2}{1.2}$$
$$+\left\{\tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^3.\frac{\alpha^3}{1.2.3}$$
$$+\left\{\tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}\right\}^4.\frac{\alpha^4}{1\ldots4}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für jedes x zwischen den Gränzen

$$x=-1,\ x=+1.$$

Hebt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung die Einheit

auf, dividirt auf beiden Seiten durch α, und nimmt, indem man α ins Unendliche abnehmen, d. h. sich beliebig der Null nähern läßt, auf beiden Seiten die Gränzen; so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\\
&-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
&+\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
&-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1})\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\varphi\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

für jedes x zwischen den Gränzen -1 und $+1$, wenn man φ aus der Gleichung

$$\tang\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

bestimmt, unter der Bedingung, daß φ immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird. Die hier durch l bezeichneten Logarithmen nennt man (bekanntlich) natürliche oder hyperbolische Logarithmen.

Durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile ergiebt sich, immer in Bezug auf dieselben Gränzen von x:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)\\
&=\frac{x}{1}\cos\Theta-\frac{x^2}{2}\cos 2\Theta+\frac{x^3}{3}\cos 3\Theta-\frac{x^4}{4}\cos 4\Theta+\ldots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Arc tang}\,\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}\\
&=\frac{x}{1}\sin\Theta-\frac{x^2}{2}\sin 2\Theta+\frac{x^3}{3}\sin 3\Theta-\frac{x^4}{4}\sin 4\Theta+\ldots.
\end{aligned}$$

Für $\Theta = 0$ erhält man:

$$\tfrac{1}{2}l(1+2x+x^2)=l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots,$$

und für $\Theta = \frac{1}{2}\pi$:

$$\text{Arc tang}\,x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots$$

für jedes x zwischen -1 und $+1$. Arc tang x ist zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten. Also ist für $x=1$:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\ldots$$

31. Wir wollen nun, indem wir wieder zu der Binomial-Reihe zurückkehren, die Reihe

$$1$$
$$+\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1})$$
$$+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1}-1)}{1.2}(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1}-1)(\alpha+\beta\sqrt{-1}-2)}{1.2.3}(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

zu summiren suchen. Sey

$$a+b\sqrt{-1}=x(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$
$$(a+b\sqrt{-1})^n=x^n(\cos n\varphi+\sin n\varphi\sqrt{-1}),$$
$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}-n+1}{n}=\lambda_n(\cos\gamma_n+\sin\gamma_n.\sqrt{-1});$$

so ist (19.):

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}^n_B=$$
$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\{\cos(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n)+\sin(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma^n).\sqrt{-1}\},$$
$$\alpha+\beta\sqrt{-1}^n_B(a+b\sqrt{-1})^n=$$
$$x^n\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\{\cos(n\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n)+\sin(n\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n).\sqrt{-1}\}$$

oder, wenn wir

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=\varrho_n,\ n\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n=\Omega_n$$

setzen:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}^n_B(a+b\sqrt{-1})^n$$
$$=x^n\varrho_n(\cos\Omega_n+\sin\Omega_n\sqrt{-1}),$$

und folglich die gegebene Reihe:

$$1+x\varrho_1(\cos\Omega_1+\sin\Omega_1\sqrt{-1})$$
$$+x^2\varrho_2(\cos\Omega_2+\sin\Omega_2\sqrt{-1})$$
$$+x^3\varrho_3(\cos\Omega_3+\sin\Omega_3\sqrt{-1})$$
$$+x^4\varrho_4(\cos\Omega_4+\sin\Omega_4\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$=p+q\sqrt{-1},$$

wo

$$p=1+x\varrho_1\cos\Omega_1+x^2\varrho_2\cos\Omega_2+x^3\varrho_3\cos\Omega_3+\ldots.$$
$$q=\quad x\varrho_1\sin\Omega_1+x^2\varrho_2\sin\Omega_2+x^3\varrho_3\sin\Omega_3+\ldots.$$

Die Moduli der einzelnen Glieder der gegebenen Reihe bilden die Reihe:

$$1,\ \varrho_1x,\ \varrho_2x^2,\ \varrho_3x^3,\ \varrho_4x^4,\ \varrho_5x^5,\ \ldots.$$

und es ist nach dem Obigen:

$$\varrho_{n+1}=\varrho_n\lambda_{n+1},\ \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}=\lambda_{n+1}.$$

Da

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}-n}{n+1}=\lambda_{n+1}(\cos\gamma_{n+1}+\sin\gamma_{n+1}.\sqrt{-1})$$

ist; so ist

$$\lambda_{n+1}=\left\{\left(\frac{\alpha-n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{\beta}{n+1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\left(\frac{\alpha+1}{n+1}-1\right)^2+\left(\frac{\beta}{n+1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\left(\frac{\alpha+1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{\beta}{n+1}\right)^2-\frac{2(\alpha+1)}{n+1}+1\right\}^{\frac{1}{2}},$$

woraus man sieht, daß, für wachsende n, λ_{n+1} oder

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$$

sich der Einheit fortwährend nähert. Daher ist nach (23.)

$$1+x\varrho_1(\cos\Omega_1+\sin\Omega_1\sqrt{-1})$$
$$+x^2\varrho_2(\cos\Omega_2+\sin\Omega_2\sqrt{-1})$$
$$+x^3\varrho_3(\cos\Omega_3+\sin\Omega_3\sqrt{-1})$$
$$+x_4\varrho_4(\cos\Omega_4+\sin\Omega_4\sqrt{-1})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

convergent oder divergent, jenachdem x, welches immer positiv ist, $<$ oder $>$ 1 ist. Man kann also, wenn $x<1$ ist, den Satz (21.) auf die vorhergehende, oder jede ihr ähnliche, Reihe anwenden, weil nach (7.), für $x<1$, offenbar auch die Moduli

$$1,\ \varrho x,\ \varrho_2 x^2,\ \varrho_3 x^3,\ \varrho_4 x^4,\ \ldots.$$

eine convergirende Reihe bilden. Setzen wir also, für $x<1$:

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1})=1+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{1}{\mathrm{B}}(a+b\sqrt{-1})$$
$$+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{2}{\mathrm{B}}(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{3}{\mathrm{B}}(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})=1+{}^{\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\overset{1}{\mathrm{B}}(a+b\sqrt{-1})$$
$$+{}^{\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\overset{2}{\mathrm{B}}(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+{}^{\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\overset{3}{\mathrm{B}}(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man aus (21.), da offenbar der in (10.) bewiesene Satz auch in dem Falle imaginärer Exponenten richtig bleibt, ganz wie in (12.):

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}).F(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})=F\{(\alpha+\alpha_1)+(\beta+\beta_1)\sqrt{-1}\}.$$

32. Setzen wir nun:

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = f(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, \beta)\sqrt{-1},$$

denn daß unsere Function auf diese Form gebracht werden kann, erhellet aus dem Obigen; so ist

$$\{f(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, \beta)\sqrt{-1}\}\{f(\alpha_1, \beta_1) + \varphi(\alpha_1, \beta_1)\sqrt{-1}\}$$
$$= f(\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1) + \varphi(\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1)\sqrt{-1}$$
$$= \quad f(\alpha, \beta) f(\alpha_1, \beta_1) - \varphi(\alpha, \beta)\varphi(\alpha_1, \beta_1)$$
$$+ \{f(\alpha, \beta)\varphi(\alpha_1, \beta_1) + \varphi(\alpha, \beta) f(\alpha_1, \beta_1)\}\sqrt{-1},$$

woraus:

$$f(\alpha, \beta) f(\alpha_1, \beta_1) - \varphi(\alpha, \beta)\varphi(\alpha_1, \beta_1) = f(\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1)$$
$$f(\alpha, \beta)\varphi(\alpha_1, \beta_1) + \varphi(\alpha, \beta) f(\alpha_1, \beta_1) = \varphi(\alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1).$$

Also, für $\alpha_1 = \beta_1 = 0$:

$$f(\alpha, \beta) f(0, 0) - \varphi(\alpha, \beta)\varphi(0, 0) = f(\alpha, \beta)$$
$$f(\alpha, \beta)\varphi(0, 0) + \varphi(\alpha, \beta) f(0, 0) = \varphi(\alpha, \beta).$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$f(0, 0) = 1, \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

Nun ist aber, für $\alpha_1 = -\alpha$, $\beta_1 = -\beta$:

$$f(\alpha, \beta) f(-\alpha, -\beta) - \varphi(\alpha, \beta)\varphi(-\alpha, -\beta) = f(0, 0)$$
$$f(\alpha, \beta)\varphi(-\alpha, -\beta) + \varphi(\alpha, \beta) f(-\alpha, -\beta) = \varphi(0, 0).$$

Also

$$f(\alpha, \beta) f(-\alpha, -\beta) - \varphi(\alpha, \beta)\varphi(-\alpha, -\beta) = 1$$
$$f(\alpha, \beta)\varphi(-\alpha, -\beta) + \varphi(\alpha, \beta) f(-\alpha, -\beta) = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$f(-\alpha, -\beta) = \frac{f(\alpha, \beta)}{\{f(\alpha, \beta)\}^2 + \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2}$$

$$\varphi(-\alpha, -\beta) = -\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\{f(\alpha, \beta)\}^2 + \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2}.$$

Also

$$f(-\alpha, -\beta) + \varphi(-\alpha, -\beta)\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha, \beta) - \varphi(\alpha, \beta)\sqrt{-1}}{\{f(\alpha, \beta)\}^2 + \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2}$$

$$= \frac{\{f(\alpha, \beta)\}^2 + \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2}{\{\{f(\alpha, \beta)\}^2 + \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2\}\{f(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, \beta)\sqrt{-1}\}}$$

$$= \{f(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, \beta)\sqrt{-1}\}^{-1}.$$

Folglich

$$F(-\alpha-\beta\sqrt{-1}) = \{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^{-1}.$$

Nun erhellet leicht, daß

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}).F(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}).F(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})\ldots\ldots$$
$$=F(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots)+F(\beta+\beta_1+\beta_2+\ldots)\sqrt{-1};$$

also, für jedes ganze positive n:

$$\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^n=F(n\alpha+n\beta\sqrt{-1}).$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber:

$$F(-n\alpha-n\beta\sqrt{-1})=\{F(n\alpha+n\beta\sqrt{-1})\}^{-1};$$

also

$$F(-n\alpha-n\beta\sqrt{-1})=\{(F(\alpha+\beta\sqrt{-1}))^n\}^{-1},$$

d. i.

$$F(-n\alpha-n\beta\sqrt{-1})=\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^{-n}.$$

Folglich ist für jedes ganze positive oder negative n:

$$\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^n=F(n\alpha+n\beta\sqrt{-1}).$$

Ist nun $\frac{n}{m}$ ein beliebiger Bruch, dessen Nenner immer als positiv angenommen werden kann; so ist

$$\left\{F\left(\frac{n}{m}\alpha+\frac{n}{m}\beta\sqrt{-1}\right)\right\}^m=F(n\alpha+n\beta\sqrt{-1})$$
$$=\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^n;$$

$$\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^{\frac{n}{m}}=F\left(\frac{n}{m}\alpha+\frac{n}{m}\beta\sqrt{-1}\right).$$

Also ist für jedes n:

$$\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\}^n=F(n\alpha+n\beta\sqrt{-1}).$$

Folglich auch:

$$\{F(\alpha)\}^n=F(n\alpha),$$
$$\{F(\beta\sqrt{-1})\}^n=F(n\beta\sqrt{-1}).$$

Aus dem Obigen erhellet auch, daß immer

$$F(\alpha).F(\beta\sqrt{-1})=F(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

ist.

33. Sey nun

$$F(\alpha)=f_1(\alpha)\{\cos\varphi_1(\alpha)+\sin\varphi_1(\alpha).\sqrt{-1}\};$$

so ist für jedes n:

$$\{F(\alpha)\}^n=\{f_1(\alpha)\}^n\{\cos n\varphi_1(\alpha)+\sin n\varphi_1(\alpha).\sqrt{-1}\}$$
$$F(n\alpha)=f_1(n\alpha)\{\cos\varphi_1(n\alpha)+\sin\varphi_1(n\alpha).\sqrt{-1}\}.$$

Aber

$$\left\{F(\alpha)\right\}^n = F(n\alpha) \quad (32.) .$$

Also

$$\left\{f_1(\alpha)\right\}^n . \cos n\varphi_1(\alpha) = f_1(n\alpha) . \cos\varphi_1(n\alpha)$$

$$\left\{f_1(\alpha)\right\}^n . \sin n\varphi_1(\alpha) = f_1(n\alpha) . \sin\varphi_1(n\alpha) .$$

Quadrirt man auf beiden Seiten und addirt; so erhält man

$$\left\{f_1(\alpha)\right\}^{2n} = \left\{f_1(n\alpha)\right\}^2 .$$

Folglich, weil $f_1(\alpha)$, als der Modulus der imaginären Grö $F(\alpha)$, immer positiv ist:

$$\left\{f_1(\alpha)\right\}^n = f_1(n\alpha) ,$$

und demnach

$$\cos n\varphi_1(\alpha) = \cos\varphi_1(n\alpha), \ \sin n\varphi_1(\alpha) = \sin\varphi_1(n\alpha) .$$

Also

$$n\varphi_1(\alpha) = 2\varkappa\pi + \varphi_1(n\alpha) ,$$

wo $\varkappa$ eine ganze, positive oder negative, Zahl ist.

34. Auf ähnliche Art sey

$$F(\beta\sqrt{-1}) = f_2(\beta)\left\{\cos\varphi_2(\beta) + \sin\varphi_2(\beta).\sqrt{-1}\right\} ;$$

so findet man ganz wie vorher:

$$\left\{f_2(\beta)\right\}^n = f_2(n\beta) ,$$

$$n\varphi_2(\beta) = 2\varkappa'\pi + \varphi_2(n\beta) ,$$

wo wieder $\varkappa'$ eine ganze, positive oder negative, Zahl ist.

35. Untersuchen wir nun zuerst die Gleichungen

$$\left\{f_1(\alpha)\right\}^n = f_1(n\alpha), \ \left\{f_2(\beta)\right\}^n = f_2(n\beta) ,$$

wo n jede Zahl bedeuten kann. Wenn eine Function $\psi(x)$ beschaffen ist, daß für jedes reelle α:

$$\left\{\psi(x)\right\}^\alpha = \psi(\alpha x)$$

ist; so ist für $x = 1$:

$$\left\{\psi(1)\right\}^\alpha = \psi(\alpha) ,$$

d. i., wenn man x für α setzt:

$$\left\{\psi(1)\right\}^x = \psi(x) ,$$

wo $\psi(1)$ eine constante Größe ist. Es ist also

$$f_1(\alpha) = \left\{f_1(1)\right\}^\alpha,\ f_2(\beta) = \left\{f_2(1)\right\}^\beta.$$

Da aber $f_1(1)$ und $f_2(1)$, wie aus dem Obigen erhellet, positive Größen sind; so kann man, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$f_1(1) = e^\Theta,\ f_2(1) = e^{\Theta'}$$

setzen, wo Θ und Θ' constante, von α und β ganz unabhängige Größen sind. Also ist

$$f_1(\alpha) = e^{\Theta\alpha},\ f_2(\beta) = e^{\Theta'\beta}.$$

Bevor wir ferner zu einer nähern Untersuchung der Gleichungen

$$n\varphi_1(\alpha) = 2\varkappa\pi + \varphi_1(n\alpha)$$
$$n\varphi_2(\beta) = 2\varkappa'\pi + \varphi_2(n\beta)$$

übergehen, müssen wir vorher noch zeigen, daß $F(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ eine stetige Function von α und β ist. Man setze

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

$$\left\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\right\}^n = \varrho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1});$$

aber

$$\left\{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})\right\}^n = F(n\alpha + n\beta\sqrt{-1}) \quad (32.);$$

also

$$F(n\alpha + n\beta\sqrt{-1}) = \varrho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}).$$

Man nehme α und β als constant an, so sind auch ϱ und φ constant. Läßt man nun n, wachsend und abnehmend, wobei n auch negativ werden kann, von $n = 1$ an, alle Grade der Größe stetig durchlaufen; so werden auch $n\alpha$ und $n\beta$, respective von α und β an, alle Grade der Größe stetig durchlaufen. Wenn aber n sich stetig verändert, so verändern sich offenbar, da ϱ und φ constant sind, auch

$$\varrho^n \cos n\varphi \text{ und } \varrho^n \sin n\varphi,$$

also auch

$$\varrho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}),$$

von

$$\varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

an, stetig. Hieraus übersieht man ganz deutlich, daß, wenn man α und β, von α und β an, stetig alle Grade der Größe durchlaufen läßt, auch $F(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ sich fortwährend stetig verändern wird. Es sind also auch $F(\alpha)$ und $F(\beta\sqrt{-1})$ stetige Functionen von α und β. Da nun

$$F(\alpha) = f_1(\alpha)\left\{\cos\varphi_1(\alpha) + \sin\varphi_1(\alpha).\sqrt{-1}\right\},$$

$$F(\beta\sqrt{-1}) = f_2(\beta)\left\{\cos\varphi_2(\beta) + \sin\varphi_2(\beta).\sqrt{-1}\right\}$$

ist; so sind auch

$$f_1(\alpha).\cos\varphi_1(\alpha),\ f_1(\alpha).\sin\varphi_1(\alpha);$$
$$f_2(\beta).\cos\varphi_2(\beta),\ f_2(\beta).\sin\varphi_2(\beta)$$

stetige Functionen von α und β. Diese Functionen könnten aber offenbar nicht stetig seyn, wenn nicht

$$f_1(\alpha),\ \cos\varphi_1(\alpha),\ \sin\varphi_1(\alpha);\ f_2(\beta),\ \cos\varphi_2(\beta),\ \sin\varphi_2(\beta);$$

d. i.

$$f_1(\alpha),\ \varphi_1(\alpha);\ f_2(\beta),\ \varphi_2(\beta)$$

selbst stetige Functionen von α und von β wären.

Offenbar sind nun auch

$$n\varphi_1(\alpha),\ \varphi_1(n\alpha);\ n\varphi_2(\beta),\ \varphi_2(n\beta)$$

stetige Functionen von α, n und β, n. Folglich können die oben durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ bezeichneten ganzen Zahlen offenbar nicht respective von α, n und β, n abhängen; sondern müssen constante Größen seyn, die also für alle α, n, und alle β, n, ungeändert bleiben.

36. Wenn aber die Function $\psi(x)$ so beschaffen ist, daß, für jedes α,

$$\alpha\psi(x) = \psi(\alpha x) + a$$

ist; so ist

$$\alpha\psi(1) = \psi(\alpha) + a,$$

d. i.

$$x\psi(1) = \psi(x) + a,$$

wo $\psi(1)$ eine gewisse constante Größe ist. Es ist also nach (35.)

$$\Theta_1\alpha = 2\varkappa\pi + \varphi_1(\alpha),\ \Theta'_1\beta = 2\varkappa'\pi + \varphi_2(\beta);$$
$$\varphi_1(\alpha) = \Theta_1\alpha - 2\varkappa\pi,\ \varphi_2(\beta) = \Theta'_1\beta - 2\varkappa'\pi;$$
$$\cos\varphi_1(\alpha) = \cos\Theta_1\alpha,\ \sin\varphi_1(\alpha) = \sin\Theta_1\alpha;$$
$$\cos\varphi_2(\beta) = \cos\Theta'_1\beta,\ \sin\varphi_2(\beta) = \sin\Theta'_1\beta.$$

Folglich haben wir:

$$F(\alpha) = e^{\Theta\alpha}\left\{\cos\Theta_1\alpha + \sin\Theta_1\alpha.\sqrt{-1}\right\},$$
$$F(\beta\sqrt{-1}) = e^{\Theta'\beta}\left\{\cos\Theta'_1\beta + \sin\Theta'_1\beta.\sqrt{-1}\right\}.$$

Aber

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = F(\alpha).F(\beta\sqrt{-1}).$$

Also

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = e^{\Theta\alpha+\Theta'\beta}\left\{\cos\Theta_1\alpha\cos\Theta'_1\beta - \sin\Theta_1\alpha\sin\Theta'_1\beta\right\}$$
$$+ e^{\Theta\alpha+\Theta'\beta}\left\{\cos\Theta_1\alpha\sin\Theta'_1\beta + \sin\Theta_1\alpha\cos\Theta'_1\beta\right\}\sqrt{-1},$$

d. i.

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = e^{\Theta\alpha+\Theta'\beta}\left\{\cos(\Theta_1\alpha+\Theta'_1\beta) + \sin(\Theta_1\alpha+\Theta'_1\beta).\sqrt{-1}\right\};$$

oder, weil nach (31.)

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = p+q\sqrt{-1}$$

ist:

$$p = e^{\Theta\alpha+\Theta'\beta}\cos(\Theta_1\alpha+\Theta'_1\beta)$$
$$q = e^{\Theta\alpha+\Theta'\beta}\sin(\Theta_1\alpha+\Theta'_1\beta).$$

37. Es kommt nun darauf an, die Constanten Θ, Θ_1, Θ', Θ'_1 zu bestimmen. Sey zuerst $\beta = 0$; so ist

$$p = e^{\Theta\alpha}\cos\Theta_1\alpha,\quad q = e^{\Theta\alpha}\sin\Theta_1\alpha;$$

d. i. nach dem Obigen (31.):

$$e^{\Theta\alpha}\cos\Theta_1\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x\cos\varphi + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2\cos 2\varphi + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3\cos 3\varphi + \ldots\ldots$$

$$e^{\Theta\alpha}\sin\Theta_1\alpha = \frac{\alpha}{1}x\sin\varphi + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2\sin 2\varphi + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3\sin 3\varphi + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4\sin 4\varphi + \ldots\ldots$$

$$\frac{(e^{\Theta\alpha}-1)\cos\Theta_1\alpha + \cos\Theta_1\alpha - 1}{\alpha} =$$
$$= \frac{1}{1}x\cos\varphi + \frac{\alpha-1}{1.2}x^2\cos 2\varphi + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3\cos 3\varphi + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4\cos 4\varphi + \ldots\ldots$$

$$\frac{e^{\Theta\alpha}\sin\varphi_1\alpha}{\alpha} =$$
$$= \frac{1}{1}x\sin\varphi + \frac{\alpha-1}{1.2}x^2\sin 2\varphi + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3\sin 3\varphi + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4\sin 4\varphi + \ldots\ldots$$

d. i. nach (29.)

$$\left\{\Theta+\frac{\Theta^2\alpha}{1.2}+\ldots\right\}\left\{1-\frac{\Theta_1^2\alpha^2}{1.2}+\ldots\right\}-\frac{\Theta_1^2\alpha}{1.2}+\frac{\Theta_1^4\alpha^3}{1..4}-\ldots$$

$$=\tfrac{1}{1}x\cos\varphi+\frac{\alpha-1}{1.2}x^2\cos 2\varphi$$
$$+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3\cos 3\varphi$$
$$+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4\cos 4\varphi$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{1+\frac{\Theta\alpha}{1}+\frac{\Theta^2\alpha^2}{1.2}\right\}\left\{\Theta_1-\frac{\Theta_1^3\alpha^2}{1.2.3}+\ldots\right\}$$

$$=\tfrac{1}{1}x\sin\varphi+\frac{\alpha-1}{1.2}x^2\sin 2\varphi$$
$$+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3\sin 3\varphi$$
$$+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4\sin 4\varphi$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, sämmtliche Reihen convergiren. Läßt man nun α sich der Null nähern, und nimmt auf beiden Seiten die Gränzen; so erhält man:

$$\Theta=x\cos\varphi-\tfrac{1}{2}x^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}x^3\cos 3\varphi-\tfrac{1}{4}x^4\cos 4\varphi+\ldots.$$
$$\Theta_1=x\sin\varphi-\tfrac{1}{2}x^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}x^3\sin 3\varphi-\tfrac{1}{4}x^4\sin 4\varphi+\ldots.$$

Ferner sey $\alpha=0$, so wird

$$p=e^{\Theta'\beta}\cos\Theta'_1\beta,\ q=e^{\Theta'\beta}\sin\Theta'_1\beta;$$

d. i. nach (31.)

$$e^{\Theta'\beta}\cos\Theta'_1\beta=1+x\varrho_1\cos\Omega_1+x^2\varrho_2\cos\Omega_2+x^3\varrho_3\cos\Omega_3+\ldots$$
$$e^{\Theta'\beta}\sin\Theta'_1\beta=\quad x\varrho_1\sin\Omega_1+x^2\varrho_2\sin\Omega_2+x^3\varrho_3\sin\Omega_3+\ldots$$
$$\frac{e^{\Theta'\beta}\cos\Theta'_1\beta-1}{\beta}=\frac{\varrho_1}{\beta}x\cos\Omega_1+\frac{\varrho_2}{\beta}x^2\cos\Omega_2+\frac{\varrho_3}{\beta}x^3\cos\Omega_3+\ldots$$
$$\frac{e^{\Theta'\beta}\sin\Theta'_1\beta}{\beta}=\frac{\varrho_1}{\beta}x\sin\Omega_1+\frac{\varrho_2}{\beta}x^2\sin\Omega_2+\frac{\varrho_3}{\beta}x^3\sin\Omega_3+\ldots$$

Aber nach (31.)

$$\varrho_n=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\ldots.\lambda_n,$$
$$\Omega_n=n\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots.\gamma_n.$$

Also

$$\frac{e^{\Theta'\beta}\cos\Theta'_1\beta-1}{\beta}=$$

$$\frac{\lambda_1}{\beta}x\cos\Omega_1+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\beta}x^2\cos\Omega_2+\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\beta}x^3\cos\Omega_3+\ldots$$

$$\frac{e^{\Theta'\beta}\sin\Theta'_1\beta}{\beta} =$$

$$\frac{\lambda_1}{\beta}x\sin\Omega_1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\beta}x^2\sin\Omega_2 + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\beta}x^3\sin\Omega_3 + \ldots$$

Ferner ist nach (31.) für $\alpha = 0$:

$$\lambda_n = \left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

woraus sogleich $\lambda_1 = \beta$. Also

$$\frac{e^{\Theta'\beta}\cos\Theta'_1\beta - 1}{\beta} =$$

$$x\cos\Omega_1 + \lambda_2 x^2\cos\Omega_2 + \lambda_2\lambda_3 x^3\cos\Omega_3 + \ldots.$$

$$\frac{e^{\Theta'\beta}\sin\Theta'_1\beta}{\beta} =$$

$$x\sin\Omega_1 + \lambda_2 x^2\sin\Omega_2 + \lambda_2\lambda_3 x^3\sin\Omega_3 + \ldots.$$

Die Gränze, welcher sich λ_n nähert, wenn β sich der Null nähert, ist

$$= \frac{n-1}{n}.$$

Die Gränze, welcher sich $\lambda_2\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_n$ nähert, wenn β sich der Null nähert, ist also

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\ldots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Ferner ist, für $\alpha = 0$, nach (31.):

$$\cos\gamma_n = -\frac{n-1}{n\lambda_n},\ \sin\gamma_n = \frac{\beta}{n\lambda_n}.$$

Man sieht also, daß, wenn β sich der Null nähert, $\cos\gamma_n$ und $\sin\gamma_n$, für $n > 1$, sich respective den Gränzen

$$-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = -1,\ \frac{0}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 0$$

nähern. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\cos\Omega_n &= \cos(n\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n)\\ &= \cos(n\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1})\cos\gamma_n\\ &\quad - \sin(n\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1})\sin\gamma_n\\ \sin\Omega_n &= \sin(n\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n)\\ &= \sin(n\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1})\cos\gamma_n\\ &\quad + \cos(n\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1})\sin\gamma_n.\end{aligned}$$

Also nach dem Obigen, für $n > 1$:

$$\begin{aligned}\text{Lim}\cos\Omega_n &= -\text{Lim}\cos\Omega_{n-1},\\ \text{Lim}\sin\Omega_n &= -\text{Lim}\sin\Omega_{n-1},\end{aligned}$$

und hieraus:

$$\text{Lim}\cos\Omega_n = -\text{Lim}\cos\Omega_{n-1} = \text{Lim}\cos\Omega_{n-2}$$
$$= -\text{Lim}\cos\Omega_{n-3} = .. = \text{Lim}\cos\Omega_{n-(n-1)}.(-1)^{n-1}$$
$$\text{Lim}\sin\Omega_n = -\text{Lim}\sin\Omega_{n-1} = \text{Lim}\sin\Omega_{n-2}$$
$$= -\text{Lim}\sin\Omega_{n-3} = .. = \text{Lim}\sin\Omega_{n-(n-1)}.(-1)^{n-1},$$

d. i.

$$\text{Lim}\cos\Omega_n = \text{Lim}\cos\Omega_1.(-1)^{n-1}$$
$$\text{Lim}\sin\Omega_n = \text{Lim}\sin\Omega_1.(-1)^{n-1}.$$

Aber

$$\cos\Omega_1 = \cos n\varphi\cos\gamma_1 - \sin n\varphi\sin\gamma_1$$
$$\sin\Omega_1 = \sin n\varphi\cos\gamma_1 + \cos n\varphi\sin\gamma_1,$$

und nach dem Obigen

$$\cos\gamma_1 = -\frac{o}{\beta} = 0,\ \sin\gamma_1 = \frac{\beta}{\beta} = 1.$$

Also

$$\cos\Omega_1 = -\sin n\varphi,\ \sin\Omega_1 = \cos n\varphi.$$

Man muß also auch, weil φ von β ganz unabhängig ist,

$$\text{Lim}\cos\Omega_1 = -\sin n\varphi,\ \text{Lim}\sin\Omega_1 = \cos n\varphi$$

setzen. Folglich nach dem Obigen:

$$\text{Lim}\cos\Omega_n = -\sin n\varphi.(-1)^{n-1}$$
$$\text{Lim}\sin\Omega_n = \cos n\varphi.(-1)^{n-1}$$

oder

$$\text{Lim}\cos\Omega_n = \sin n\varphi.(-1)^{n}$$
$$\text{Lim}\sin\Omega_n = -\cos n\varphi.(-1)^{n}.$$

Die Gränzen von

$$\frac{e^{\Theta'\beta}\cos\Theta'_1\beta - 1}{\beta} \text{ und } \frac{e^{\Theta'\beta}\sin\Theta'_1\beta}{\beta},$$

wenn β sich der Null nähert, sind, auf ganz ähnliche Art, wie vorher, respective Θ' und Θ'_1. Nimmt man nun auf beiden Seiten obiger Gleichungen die Gränzen, wenn β sich der Null nähert; so erhält man:

$$\Theta' = -x\sin\varphi + \tfrac{1}{2}x^2\sin 2\varphi - \tfrac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}x^4\sin 4\varphi - \ldots$$
$$\Theta'_1 = x\cos\varphi - \tfrac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}x^3\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4}x^4\cos 4\varphi + \ldots$$

und es ist folglich

$$\Theta' = -\Theta_1,\ \Theta'_1 = \Theta.$$

Also nach (36.)

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = e^{\Theta\alpha-\Theta_1\beta}\left\{\cos(\Theta_1\alpha+\Theta\beta)+\sin(\Theta_1\alpha+\Theta\beta).\sqrt{-1}\right\}$$

oder

$$p = e^{\Theta\alpha-\Theta_1\beta}\cos(\Theta_1\alpha+\Theta\beta),$$
$$q = e^{\Theta\alpha-\Theta_1\beta}\sin(\Theta_1\alpha+\Theta\beta).$$

38. Für $\beta = 0$ ist nun nach (27.) und (28.)

$$p = (1+2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha\sigma,$$
$$q = (1+2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha\sigma;$$

wenn σ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Bogen bezeichnet, für welchen

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{x\sin\varphi}{1+x\cos\varphi},$$

oder, was dasselbe ist,

$$p = \left\{(1+a)^2 + b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha\sigma,\ q = \left\{(1+a)^2 + b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha\sigma;$$

wenn σ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Bogen bezeichnet, für welchen

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{b}{1+a}$$

ist. Für $\beta = 0$ ist aber

$$p = e^{\Theta\alpha}\cos\Theta_1\alpha,\ q = e^{\Theta\alpha}\sin\Theta_1\alpha.$$

Setzt man nun

$$(1+2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} = e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\varphi+x^2)}$$

$$\left\{(1+a)^2+b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}} = e^{\frac{1}{2}\alpha l\{(1+a)^2+b^2\}};$$

so wird

$$p = e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\varphi+x^2)}\cos\alpha\sigma$$

$$q = e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\varphi+x^2)}\sin\alpha\sigma,$$

oder

$$p = e^{\frac{1}{2}\alpha l\{(1+a)^2+b^2\}}\cos\alpha\sigma$$

$$q = e^{\frac{1}{2}\alpha l\{(1+a)^2+b^2\}}\sin\alpha\sigma.$$

Dies mit dem Obigen verglichen, giebt:

$$\Theta = \tfrac{1}{2}l(1+2x\cos\varphi+x^2) = \tfrac{1}{2}l\left\{(1+a)^2+b^2\right\}$$

$$\Theta_1 = \sigma = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\varphi}{1+x\cos\varphi} = \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a},$$

den Bogen immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen.

39. Nach (37.) ergiebt sich also

$$p = \left\{(1+a)^2+b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\beta\sigma}\cos\left\{\alpha\sigma+\tfrac{1}{2}\beta l((1+a)^2+b^2)\right\},$$

$$q = \left\{(1+a)^2+b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\beta\sigma}\sin\left\{\alpha\sigma+\tfrac{1}{2}\beta l((1+a)^2+b^2)\right\}.$$

Folglich

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}) =$$

$$\left\{(1+a)^2+b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\beta\sigma}\left\{\begin{array}{l}\cos\{\alpha\sigma+\frac{1}{2}\beta l((1+a)^2+b^2)\}\\ +\sin\{\alpha\sigma+\frac{1}{2}\beta l((1+a)^2+b^2)\}.\sqrt{-1}\end{array}\right\},$$

wo immer σ der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene Bogen ist, für welchen

$$\tang \sigma = \frac{b}{1+a}$$

ist, oder, unter obiger Voraussetzung,

$$\sigma = \text{Arc tang} \frac{b}{1+a}.$$

So haben wir also die Summe unserer Reihe gefunden, unter der Voraussetzung, daß

$$x = \sqrt{a^2+b^2} < 1$$

ist.

40. Wir haben bisher nur die beiden Fälle $x = \sqrt{a^2+b^2} < 1$, $x > 1$ betrachtet. Im ersten Falle war die gegebene Reihe stets convergent, im zweiten divergent. Es ist nun noch die Untersuchung des Falls $x = 1$ übrig, in welchem die durch p und q (31.) bezeichneten Reihen in

$$p = 1 + \varrho_1 \cos \Omega_1 + \varrho_2 \cos \Omega_2 + \varrho_3 \cos \Omega_3 + \ldots.$$
$$q = \quad \varrho_1 \sin \Omega_1 + \varrho_2 \sin \Omega_2 + \varrho_3 \sin \Omega_3 + \ldots.$$

übergehen. Bei Untersuchung der Convergenz und Divergenz der gegebenen Reihe unterscheiden wir drei Fälle: wenn α zwischen $-\infty$ und -1 liegt, oder $= -1$ ist; wenn α zwischen -1 und 0 liegt, oder $= 0$ ist; wenn α zwischen 0 und $+\infty$ liegt.

I. α sey $= -1$, oder liege zwischen $-\infty$ und -1. Nach (31.) ist

$$\lambda_n = \left\{\left(\frac{\alpha-n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Sey nun $\alpha = -1 - \delta$, wo δ auch $= 0$ seyn kann. Also

$$\lambda_n = \left\{\left(\frac{\delta+n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left\{\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist folglich immer $\lambda_n > 1$. Nun ist

$$\varrho_n = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n,$$
$$\varrho_{n+1} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n \lambda_{n+1},$$
$$\varrho_{n+1} = \varrho_n \cdot \lambda_{n+1};$$

also $\varrho_{n+1} > \varrho_n$. Folglich wachsen die Glieder der Reihe

$$1, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots.$$

beständig. Setzen wir nun die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe $= \sigma_n$; so nähert $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \varrho_n$ sich der Null nicht, und unsere Reihe ist folglich divergent (2.).

Bezeichnen wir die allgemeinen Glieder der oben durch p und q bezeichneten Reihen durch t_n und u_n; so ist immer

$$\varrho_n = \sqrt{(t_n)^2 + (u_n)^2}.$$

Ich behaupte nun, daß immer eine der Reihen p, q divergent ist. Bezeichnen wir, um dies zu zeigen, die Summen der n ersten Glieder dieser Reihen durch s_n und s'_n; so ist

$$s_{n+1} - s_n = t_n, \; s'_{n+1} - s'_n = u_n.$$

Convergirte nun z. B. die Reihe p; so müßte

$$s_{n+1} - s_n = t_n,$$

wenn n wächst, sich der Null nähern. In der Formel

$$\varrho_n = \sqrt{(t_n)^2 + (u_n)^2},$$

müßte also, weil nach dem Vorhergehenden ϱ_n wächst, wenn n wächst, u_n, seinem absoluten Werthe nach, zunehmen; es würde also der absolute Werth von

$$s'_{n+1} - s'_n$$

sich, wenn n wächst, nicht der Null nähern, und folglich die Reihe q divergent seyn (2.). Da also immer wenigstens eine der Reihen p, q divergent ist; so ist in dem vorliegenden Falle die Reihe $p + q\sqrt{-1}$, d. i. die gegebene, jederzeit divergent (18).

II. α liege zwischen 0 und $+\infty$, d. h. α sey positiv; μ sey eine positive Größe, welche $< \alpha$ ist; so ist

$$(n-\alpha-1+\mu)^2 = (n-\alpha-1)^2 + 2\mu(n-\alpha-1) + \mu^2$$

$$(n-\alpha-1)^2 + \beta^2 =$$

$$(n-\alpha-1+\mu)^2 + \beta^2 - \mu^2 - 2\mu(n-\alpha-1).$$

Setzt man nun

$$n > \alpha + 1 - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{\beta^2}{2\mu};$$

so ist

$$2n\mu > 2\alpha\mu + 2\mu - \mu^2 + \beta^2,$$

$$\beta^2 - \mu^2 - 2\mu(n-\alpha-1) < 0.$$

Also ist

$$\beta^2 - \mu^2 - 2\mu(n-\alpha-1)$$

eine negative Größe, und folglich

$$(n-\alpha-1)^2 + \beta^2 < (n-\alpha-1+\mu)^2$$

$$(\alpha-n+1)^2 + \beta^2 < (n-\alpha-1+\mu)^2.$$

Nach dem Obigen ist offenbar

$$n + \tfrac{1}{2}\mu > \alpha + 1;$$

also, weil μ positiv ist, um so mehr

$$n + \mu > \alpha + 1;$$

folglich

$$n - \alpha - 1 + \mu$$

eine positive Größe. Zugleich erhellet aus

$$n > \alpha + 1 - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{\beta^2}{2\mu},$$

da μ positiv und $< \alpha$ ist, leicht, daß $n > 1$ ist. Auch ist, weil $\mu < \alpha + 1$ ist, $\alpha + 1 - \mu$ eine positive Größe. Es ist nun

$$\lambda_n = \left\{\left(\frac{\alpha-n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\{(\alpha-n+1)^2+\beta^2\}^{\frac{1}{2}}}{n},$$

Also

$$\lambda_n < \frac{n-\alpha-1+\mu}{n},$$

$$\lambda_n < 1 - \frac{\alpha+1-\mu}{n}.$$

Für jedes ganze positive m ist

$$m(n-1) \geqq n-1,\ mn \geqq m-1+n$$

wenn nur m nicht = 0 ist. Also, weil

$$n > \alpha + 1 - \mu$$

ist, immer

$$mn > m-1+\alpha+1-\mu,\ \frac{m-1+\alpha+1-\mu}{mn} < 1.$$

Nach dem Obigen ist

$$n > 1,\ \frac{1}{n} < 1.$$

Also, wenn wir der Kürze wegen

$$\alpha + 1 - \mu = \varepsilon$$

setzen, nach (17.):

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^{-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$- \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\cdot\left\{1-\frac{2+\varepsilon}{3n}\right\}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\cdot\left\{1-\frac{4+\varepsilon}{5n}\right\}\cdot\frac{1}{n^4}$$

$$+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)\ldots(\varepsilon+5)}{1.2.3.4\ldots6}\cdot\left\{1-\frac{6+\varepsilon}{7n}\right\}\cdot\frac{1}{n^6}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich, weil ε positiv ist, und nach dem Obigen auch

$$1 - \frac{2+\varepsilon}{3n},\ 1 - \frac{4+\varepsilon}{5n},\ 1 - \frac{6+\varepsilon}{7n},\ \ldots\ldots$$

sämmtlich positive Größen sind, offenbar

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^{-\varepsilon} > 1 - \frac{\varepsilon}{n},$$

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}^{\mu-\alpha-1} > 1 - \frac{\alpha+1-\mu}{n},$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu} > 1 - \frac{\alpha+1-\mu}{n}.$$

Also

$$\lambda_n < \left\{\frac{n}{n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu},$$

wobei immer vorausgesetzt wird, daß

$$n > \alpha + 1 - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{\beta^2}{2\mu}.$$

Bezeichnet nun i einen Werth von n, welcher dieser Bedingung genügt; so ist

$$\lambda_{i+n} < \left\{\frac{i+n}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu},$$

für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ Setzt man also $n = 1, 2, 3, 4, \ldots n$; so hat man:

$$\lambda_{i+1} < \left\{\frac{i+1}{i+2}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\lambda_{i+2} < \left\{\frac{i+2}{i+3}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{i+n-1} < \left\{\frac{i+n-1}{i+n}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\lambda_{i+n} < \left\{\frac{i+n}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}.$$

Also

$$\lambda_{i+1}.\lambda_{i+2}.\lambda_{i+3}\ldots\lambda_{i+n} < \left\{\frac{i+1}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu},$$

d. i. nach (31.)

$$\varrho_{i+n} < \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_i . \left\{\frac{i+1}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\varrho_{i+n} < \varrho_i . \left\{\frac{i+1}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

für $n > 0$. Wir haben also

$$\varrho_i = \varrho_i . \left\{\frac{i+1}{i+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\varrho_{i+1} < \varrho_i . \left\{\frac{i+1}{i+2}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\varrho_{i+2} < \varrho_i . \left\{\frac{i+1}{i+3}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varrho_{i+n} < \varrho_i . \left\{\frac{i+1}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}.$$

Folglich, wenn wir wieder $\alpha + 1 - \mu = \varepsilon$ setzen:

$$\varrho_i + \varrho_{i+1} + \varrho_{i+2} + \ldots + \varrho_{i+n}$$

$$< \varrho_i (i+1)^\varepsilon . \left\{\frac{1}{(i+1)^\varepsilon} + \frac{1}{(i+2)^\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon}\right\}$$

für jedes n, welches > 0 ist. Da $i + n + 1 > 1$ ist, auch für $n = 0$, da schon $i > 1$ ist; so ist nach (17.)

$$\left\{1 - \frac{1}{i+n+1}\right\}^{\mu-\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{\alpha-\mu}{1} \cdot \frac{1}{i+n+1}$$

$$+ \frac{(\alpha-\mu)(\alpha-\mu+1)}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{i+n+1}\right)^2$$

$$+ \frac{(\alpha-\mu)(\alpha-\mu+1)(\alpha-\mu+2)}{1.2.3} \cdot \left(\frac{1}{i+n+1}\right)^3$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich, weil $\alpha - \mu$ positiv ist:

$$\left\{\frac{i+n}{i+n+1}\right\}^{\mu-\alpha} > 1 + \frac{\alpha-\mu}{i+n+1}$$

$$\left\{\frac{i+n+1}{i+n}\right\}^{\alpha-\mu} > 1 + \frac{\alpha-\mu}{i+n+1}$$

$$\frac{1}{(\alpha-\mu)(i+n)^{\alpha-\mu}} > \frac{1}{(\alpha-\mu)(i+n+1)^{\alpha-\mu}} + \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1-\mu}}$$

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1-\mu}} < \frac{1}{\alpha-\mu} \cdot \left\{\frac{1}{(i+n)^{\alpha-\mu}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha-\mu}}\right\}.$$

Also für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots n$:

$$\frac{1}{(i+1)^{\alpha+1-\mu}} < \frac{1}{\alpha-\mu} \cdot \left\{\frac{1}{i^{\alpha-\mu}} - \frac{1}{(i+1)^{\alpha-\mu}}\right\}$$

$$\frac{1}{(i+2)^{\alpha+1-\mu}} < \frac{1}{\alpha-\mu} \cdot \left\{\frac{1}{(i+1)^{\alpha-\mu}} - \frac{1}{(i+2)^{\alpha-\mu}}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(i+n)^{\alpha+1-\mu}} < \frac{1}{\alpha-\mu} \cdot \left\{\frac{1}{(i+n-1)^{\alpha-\mu}} - \frac{1}{(i+n)^{\alpha-\mu}}\right\}$$

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1-\mu}} < \frac{1}{\alpha-\mu} \cdot \left\{\frac{1}{(i+n)^{\alpha-\mu}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha-\mu}}\right\},$$

woraus durch Addition:

$$\frac{1}{(i+1)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+2)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+3)^{\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{(i+n+1)^{\varepsilon}}$$

$$< \frac{1}{\alpha-\mu} \cdot \left\{\frac{1}{i^{\alpha-\mu}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha-\mu}}\right\}.$$

Also nach dem Obigen

$$\varrho_i + \varrho_{i+1} + \varrho_{i+2} + \ldots + \varrho_{i+n}$$

$$< \varrho_i \cdot \frac{(i+1)^{\alpha+1-\mu}}{(\alpha-\mu)\, i^{\alpha-\mu}}.$$

Das Aggregat

$$\varrho_i + \varrho_{i+1} + \varrho_{i+2} + \ldots + \varrho_{i+n},$$

dessen Glieder sämmtlich positiv sind, und welches also immer wächst, wenn n wächst, bleibt folglich dessen ungeachtet doch

immer kleiner als die bestimmte, von n nicht abhängende, Größe

$$\varrho i \cdot \frac{(i+1)^{\alpha+1-\mu}}{(\alpha-\mu)\, i^{\alpha-\mu}} = A \,,$$

wie groß auch n werden mag. Könnte nun auch obiges Aggregat, wenn man n wachsen läßt, der Größe A selbst nicht beliebig nahe gebracht werden; so übersieht man doch leicht, daß es dann immer eine andere gewisse Größe $B < A$ geben müßte, welche dieses Aggregat, wie sehr auch n wachsen mag, nie übersteigen, der es aber zugleich beliebig genähert werden kann. Diese Größe wäre demnach die Summe der Reihe

$$\varrho_i\,,\ \varrho_{i+1}\,,\ \varrho_{i+2}\,,\ \varrho_{i+3}\,,\ \varrho_{i+4}\,,\ \ldots\,,$$

und folglich diese Reihe, so wie natürlich auch nun überhaupt die Reihe

$$1\,,\ \varrho_1\,,\ \varrho_2\,,\ \varrho_3\,,\ \varrho_4\,,\ \ldots$$

convergent. Nach (18.) sind also auch die Reihen p und q, folglich auch die gegebene Reihe $p + q\sqrt{-1}$ convergent.

III. Wenn $\alpha = 0$ ist, oder zwischen 0 und -1 liegt, läßt sich auf folgende Weise die Bedingung der Convergenz finden.

In diesem Falle ist nämlich $\alpha + 1$ immer eine positive Größe, welche nicht $= 0$ ist, und man kann folglich die positive Größe μ immer so nehmen, daß $\mu < \alpha + 1$ ist. Wie in II. ist nun

$$(n-\alpha-1+\mu)^2 = (n-\alpha-1)^2 + 2\mu(n-\alpha-1) + \mu^2$$

$$(n-\alpha-1)^2 + \beta^2 =$$

$$(n-\alpha-1+\mu)^2 + \beta^2 - \mu^2 - 2\mu(n-\alpha-1)\,,$$

und, wenn man

$$n > \alpha + 1 - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{\beta^2}{2\mu}$$

nimmt:

$$2n\mu > 2\alpha\mu + 2\mu - \mu^2 + \beta^2$$

$$\beta^2 - \mu^2 - 2\mu(n-\alpha-1) < 0\,,$$

so daß also

$$\beta^2 - \mu^2 - 2\mu(n-\alpha-1)$$

eine negative Größe, folglich

$$(n-\alpha-1)^2 + \beta^2 < (n-\alpha-1+\mu)^2\,,$$

$$(\alpha-n+1)^2 + \beta^2 < (n-\alpha-1+\mu)^2$$

ist. Auch ist nach dem Obigen

$$n + \tfrac{1}{2}\mu > \alpha + 1\,;$$

folglich, weil μ positiv ist, um so mehr

$$n + \mu > \alpha + 1\,,$$

und demnach

$$n - \alpha - 1 + \mu$$

eine positive Größe. Also

$$\{(\alpha-n+1)^2+\beta^2\}^{\frac{1}{2}} < n-\alpha-1+\mu\,;$$

$$\frac{\{(\alpha-n+1)^2+\beta^2\}^{\frac{1}{2}}}{n} < 1-\frac{\alpha+1-\mu}{n},$$

d. i.

$$\lambda_n < 1-\frac{\alpha+1-\mu}{n}.$$

Nach dem Obigen ist $n > \alpha+1-\mu$. Auch kann man n immer so nehmen, daß den Bedingungen

$$n > \alpha+1-\tfrac{1}{2}\mu+\frac{\beta^2}{2\mu}, \; n > 1$$

zugleich genügt wird. Unter dieser Voraussetzung findet man ganz wie in II.:

$$\lambda_n < \left\{\frac{n}{n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}.$$

Ist nun i ein Werth von n, welcher vorstehenden Bedingungen genügt; so ist

$$\lambda_{i+n} < \left\{\frac{n+i}{n+i+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$, woraus sich, ganz wie in II.,

$$\varrho_{i+n} < \varrho_i \cdot \left\{\frac{i+1}{i+n+1}\right\}^{\alpha+1-\mu}$$

ergiebt. Man sieht also, daß ϱ_{i+n} sich der Null nähert, wenn n wächst. Nach (31.) ist aber

$$\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,i+n}_{B} =$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{i+n}\{\cos(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{i+n})+\sin(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{i+n}).\sqrt{-1}\}$$
$$= \varrho_{i+n}\{\cos(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{i+n})+\sin(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{i+n}).\sqrt{-1}\},$$

so daß sich also auch

$$\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,i+n}_{B} \text{ oder } \overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,n}_{B}$$

der Null nähert, wenn n wächst. Da nach der Voraussetzung $x=1$ ist; so ist (31.)

$$a+b\sqrt{-1} = \cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1} = x.$$

Sey nun

$$P_n = 1+\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,1}_{B}x+\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,2}_{B}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,n}_{B}x^n;$$

so ist

$$P_n(1+x) = 1+\{1+\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,1}_{B}\}x$$
$$+\{\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,1}_{B}+\overline{\alpha+\beta\sqrt{-1}}^{\,2}_{B}\}x^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n-1}{\mathrm{B}}+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}\right\}x^{n}$$
$$+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}x^{n+1}$$
$$=1+{}^{\alpha+1+\beta\sqrt{-1}}\overset{1}{\mathrm{B}}x+{}^{\alpha+1+\beta\sqrt{-1}}\overset{2}{\mathrm{B}}x^{2}+\ldots$$
$$\ldots+{}^{\alpha+1+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}x^{n}+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}x^{n+1},$$

$$P_{n}(1+x)-{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}x^{n+1}=P'_{n},$$

wo die Bedeutung von P'_n sogleich erhellen wird, oder

$$P'_{n}=P_{n}(1+x)-{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}\{\cos(n+1)\varphi+\sin(n+1)\varphi\sqrt{-1}\}.$$

$\alpha+1$ ist im vorliegenden Falle positiv. Folglich nähert nach II., wenn n wächst, P'_n sich einer gewissen bestimmten Gränze, die wir durch S bezeichnen wollen. Der Coefficient

$${}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}},$$

und folglich um so mehr die Größe

$${}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}\{\cos(n+1)\varphi+\sin(n+1)\varphi\sqrt{-1}\},$$

nähert sich, wie wir so eben gesehen haben, für wachsende n, der Gränze Null. Also nähert

$$P_{n}(1+x)=$$
$$P'_{n}+{}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{n}{\mathrm{B}}\{\cos(n+1)\varphi+\sin(n+1)\varphi\sqrt{-1}\},$$

für wachsende n, sich ebenfalls der Gränze S, und folglich nähert sich, wofern nur $1+x$ nicht $=0$ ist, für wachsende n, P_n der Gränze

$$\frac{S}{1+x}.$$

Unsere Reihe ist also auch in dem vorliegenden Falle convergent, wenn $1+x$ nicht $=0$ ist. Für $1+x=0$ ist

$$1+\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}=0,$$
$$1+\cos\varphi=0,\ \cos\varphi=-1,\ \sin\varphi=0;$$

also $\varphi=(2m+1)\pi$, für jedes ganze positive oder negative m. Demnach ist im vorliegenden Falle unsere Reihe convergent, so lange nicht $\varphi=(2m+1)\pi$ ist.

41. Setzen wir nun, daß die Reihe

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ a_5x^5,\ \ldots$$

für jedes positive x, welches <1 ist, convergire, und daß auch

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots$$

eine convergente Reihe sey; so ist klar, daß, wenn man x sich beständig der Einheit nähern läßt, die Summe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

sich der Summe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$

als ihrer Gränze nähern wird. Setzen wir also die Summe der ersten Reihe $= f(x)$; so ist die Summe der letztern Reihe $= \text{Lim}\, f(x)$, wenn man x sich der Einheit nähern läßt. In allen den Fällen also, wo die Reihen

$$1 + \varrho_1 \cos\Omega_1 + \varrho_2 \cos\Omega_2 + \varrho_3 \cos\Omega_3 + \ldots$$
$$\varrho_1 \sin\Omega_1 + \varrho_2 \sin\Omega_2 + \varrho_3 \sin\Omega_3 + \ldots$$

convergiren, sind nach (37.) ihre Summen respective

$$\text{Lim}\, e^{\Theta\alpha - \Theta_1\beta} \cos(\Theta_1\alpha + \Theta\beta),$$
$$\text{Lim}\, e^{\Theta\alpha - \Theta_1\beta} \sin(\Theta_1\alpha + \Theta\beta),$$

wenn man die Größe x, von welcher Θ und Θ_1 abhängen, sich der Einheit nähern läßt. Bezeichnet man, unter dieser Voraussetzung, die Gränzen von Θ und Θ_1, durch L und L_1; so sind obige Summen:

$$e^{L\alpha - L_1\beta} \cos(L_1\alpha + L\beta),$$
$$e^{L\alpha - L_1\beta} \sin(L_1\alpha + L\beta).$$

Es ist aber

$$\Theta = \tfrac{1}{2} l(1 + 2x\cos\varphi + x^2),$$
$$\Theta_1 = \text{Arc tang} \frac{x \sin\varphi}{1 + x\cos\varphi},$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{x}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{x}, \quad \text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a}.$$

Also ist offenbar

$$L = \tfrac{1}{2} l(2 + 2a), \quad L_1 = \text{Arc tang} \frac{b}{1+a}.$$

Aber

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} = 1, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad b = \sqrt{1 - a^2};$$
$$\frac{b}{1+a} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a} = \frac{\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}.\sqrt{1+a}} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}};$$

also

$$L = \tfrac{1}{2} l(2 + 2a), \quad L_1 = \text{Arc tang} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.$$

42. Wir wollen nun nochmals alle Fälle, in denen die gegebene Reihe convergent ist, und sich demnach summiren läßt, hier zusammenstellen.

I. $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$.

$$1 + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}B^{1}(a + b\sqrt{-1}) + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}B^{2}(a + b\sqrt{-1})^2$$
$$+ {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}B^{3}(a + b\sqrt{-1})^3 + \ldots$$

$$= \left\{(1+a)^2 + b^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\beta\sigma} \left\{ \begin{array}{l} \cos\{\alpha\sigma + \frac{1}{2}\beta l[(1+a)^2+b^2]\} \\ + \sin\{\alpha\sigma + \frac{1}{2}\beta l[(1+a)^2+b^2]\}.\sqrt{-1} \end{array} \right\},$$

wo σ der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltene Bogen ist, für welchen

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{b}{1+a}$$

ist.

Als besondere Fälle sind zu unterscheiden:

A) $\beta = 0$.

$$1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}(a+b\sqrt{-1}) + {}^{\alpha}\overset{2}{B}(a+b\sqrt{-1})^2 + {}^{\alpha}\overset{3}{B}(a+b\sqrt{-1})^3 + \ldots$$
$$= \{(1+a)^2 + b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}.\{\cos\alpha\sigma + \sin\alpha\sigma.\sqrt{-1}\};$$
$$\sigma = \operatorname{Arc tang}\frac{b}{1+a}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$.

B) $b = 0$.

$$1 + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{1}{B}a + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{2}{B}a^2 + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{3}{B}a^3 + \ldots$$
$$= (1+a)^{\alpha}\{\cos[\beta l(1+a)] + \sin[\beta l(1+a)].\sqrt{-1}\}$$

weil hier $\sigma = 0$ ist.

C) $\beta = 0$, $b = 0$.

$$1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}a + {}^{\alpha}\overset{2}{B}a^2 + {}^{\alpha}\overset{3}{B}a^3 + \ldots = (1+a)^{\alpha},$$

welches für jedes α gilt, dessen positiver Werth < 1 ist.

II. $\sqrt{a^2+b^2} = 1$.

In diesem Falle ist $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Wenn α positiv ist, oder, wenn $\alpha = 0$ ist, oder zwischen 0 und -1 liegt, vorausgesetzt, daß in den beiden letzten Fällen nicht $1 + a + b\sqrt{-1} = 0$, d. i. $a = -1$, $b = 0$, oder $\varphi = (2m+1)\pi$ ist, ist immer:

$$1 + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{1}{B}(a + \sqrt{a^2-1}) + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{2}{B}(a + \sqrt{a^2-1})^2 + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{3}{B}(a + \sqrt{a^2-1})^3 + \ldots$$
$$= (2+2a)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\beta\sigma} \left\{ \begin{array}{l} \cos\{\alpha\sigma + \frac{1}{2}\beta l(2+2a)\} \\ + \sin\{\alpha\sigma + \frac{1}{2}\beta l(2+2a)\}.\sqrt{-1} \end{array} \right\},$$

für

$$\sigma = \operatorname{Arc tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

und zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten.

A) $\beta = 0$

$$1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}(a+\sqrt{a^2-1}) + {}^{\alpha}\overset{2}{B}(a+\sqrt{a^2-1})^2 + {}^{\alpha}\overset{3}{B}(a+\sqrt{a^2-1})^3 + \dots$$
$$= (2+2a)^{\frac{\alpha}{2}}.\{\cos\alpha\sigma + \sin\alpha\sigma.\sqrt{-1}\},$$

für den obigen Werth von σ.

B) $b = 0$.

Wenn α positiv ist, so ist $a = \pm 1$, und man hat:

$$1 + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{1}{B} + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{2}{B} + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{3}{B} + \dots$$
$$= 2^{\alpha}\{\cos(\beta l2) + \sin(\beta l2).\sqrt{-1}\},$$
$$1 - {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{1}{B} + {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{2}{B} - {}^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\overset{3}{B} + \dots = 0.$$

Liegt aber α zwischen 0 und -1, oder ist $\alpha = 0$; so darf a nicht $= -1$ seyn. In diesem Falle gilt also bloß die erste der beiden obigen Reihen.

C) $\beta = 0$, $b = 0$.

Für jeden positiven Werth von α ist:

$$1 - {}^{\alpha}\overset{1}{B} + {}^{\alpha}\overset{2}{B} - {}^{\alpha}\overset{3}{B} + {}^{\alpha}\overset{4}{B} - \dots = 0.$$

Für jeden Werth von α zwischen -1 und $+\infty$ ist:

$$1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B} + {}^{\alpha}\overset{2}{B} + {}^{\alpha}\overset{3}{B} + {}^{\alpha}\overset{4}{B} + \dots = 2^{\alpha}.$$

Man sieht also hieraus, daß die Gleichung

$$1 + {}^{\alpha}\overset{1}{B}a + {}^{\alpha}\overset{2}{B}a^2 + {}^{\alpha}\overset{3}{B}a^3 + {}^{\alpha}\overset{4}{B}a^4 + \dots = (1+a)^{\alpha}$$

gilt:

1) für jeden Werth von α, wenn der numerische Werth von $a < 1$ ist;

2) für jeden Werth von α zwischen -1 und $+\infty$, wenn $a = 1$ ist;

3) für jeden positiven Werth von α, wenn $a = -1$ ist.

43. Vorstehende Resultate sind mit denen einerlei, welche Abel in einer Abhandlung in Crelles Journal I. S. 311. gefunden hat. Unsere obige Darstellung weicht aber von Abels Darstellung in mehreren Punkten wesentlich ab, und wir haben uns bemüht, Mehreres deutlicher zu erläutern und strenger zu begründen. Noch hat Abel a. a. O. S. 159. einen Ausdruck mitgetheilt, von welchem die Binomial-Formel, wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist, ein besonderer Fall ist. Der Ausdruck ist folgender:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}\alpha(\alpha-\lambda\beta)^{\lambda-1}(x+\lambda\beta)^{n-\lambda}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta)$$

$$+ \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}.$$

Für $n=0$ erhält man $(x+\alpha)^0 = x^0$, wie es seyn muß. Man kann nun beweisen, das der Ausdruck für $n+1$ gilt, wenn er für n gilt. Zu dem Ende multiplicire man mit $(n+1)\partial x$, und integrire; so erhält man:

$$(x+\alpha)^{n+1} = x^{n+1} + \frac{n+1}{1}\alpha(x+\beta)^n$$

$$+ \frac{(n+1)n}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-1}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(x+3\beta)^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n+1}{1}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)$$

$$+ \text{Const}.$$

Im letzten Gliede setze man vor der Integration $(x+n\beta)^0\partial x$ für ∂x. Zur Bestimmung der Constante setze man

$$x = -(n+1)\beta$$

$$x + \beta = -n\beta$$

$$x + 2\beta = -(n-1)\beta$$

$$x + 3\beta = -(n-2)\beta$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x + n\beta = -\beta.$$

Also, nach der angenommenen und abgeleiteten Gleichung:

$$\{\alpha-(n+1)\beta\}^n = (-1)^n.\left\{\begin{aligned}&(n+1)^0\beta^n - \frac{n}{1}\alpha n^{n-1}\beta^{n-1}\\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(n-1)^{n-2}\beta^{n-2}\\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(n-2)^{n-3}\beta^{n-3}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\},$$

$$\{\alpha-(n+1)\beta\}^{n+1} = (-1)^{n+1}.\left\{\begin{aligned}&(n+1)^{n+1}\beta^{n+1} - \frac{n+1}{1}\alpha n^n\beta^n\\ &+ \frac{(n+1)n}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(n-1)^{n-1}\beta^{n-1}\\ &- \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(n-2)^{n-2}\beta^{n-2}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$

$$+ \text{Const}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $(n+1)\beta$; so erhält man:

$$(n+1)\beta\{\alpha-(n+1)\beta\}^n=(-1)^n.\left\{\begin{array}{l}(n+1)^{n+1}\beta^{n+1}-\frac{n+1}{1}\alpha n^n\beta^n \\ +\frac{(n+1)n}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(n-1)^{n-1}\beta^{n-1} \\ -\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(n-2)^{n-2}\beta^{n-2} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich:

$$\{\alpha-(n+1)\beta\}^{n+1}+(n+1)\beta\{\alpha-(n+1)\beta\}^n=\text{Const},$$

d. i.

$$\text{Const}=\{\alpha-(n+1)\beta\}^n.\alpha\,.$$

Folglich

$$(x+\alpha)^{n+1}=x^{n+1}+\frac{n+1}{1}\alpha(x+\beta)^n$$
$$+\frac{(n+1)n}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-1}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(x+3\beta)^{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{n+1}{1}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)$$
$$+\alpha(\alpha-(n+1)\beta)^n,$$

so daß also der Satz auch für $n+1$ gilt, und demnach allgemein ist, da er für $n=0$ richtig ist, wie wir gesehen haben.

Für $\beta=0$ wird

$$(x+\alpha)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\alpha+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\alpha^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\alpha^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots,$$

die Binomial-Formel.

Für $\alpha=-x$ wird:

$$0=x^n-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x(x+3\beta)^{n-1}+\ldots.$$

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+3\beta)^{n-1}+\ldots.$$

welches auch sonst schon bekannt ist, da das zweite Glied dieser Gleichung nichts anders ist, als $(-1)^{n-1}\,\Delta^n(x^{n-1})$, wenn man $\Delta x = \beta$ setzt, und $\Delta^n(x^{n-1})$ ist bekanntlich immer $= 0$.

Einen noch allgemeinern Ausdruck giebt Burg a. a. O. S. 367.

44. Zur Literatur des Binomial-Theorems bemerke ich, außer den schon vorher angeführten Schriften:

Eine Abhandlung von Crelle in seinem Journal (V. S. 187.) über die Convergenz der Binomial-Reihe.

Bolzano: Der binomische Lehrsatz, und, als Folgerung aus ihm, der polynomische u. s. w. Prag. 1816.

Paucker: Neuer und allgemeiner Beweis des binomischen und polynomischen Lehrsatzes in den Jahresverhandlungen der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst. I. Mitau. 1819.

Robertson: A new demonstration of the binomial theorem. Phil. Transact. 1806. p. 305.

R. Burrow: A proof that the Hindoos had the binomial theorem. Asiatick Researches. Vol. II. p. 487.

Ein Beweis von Palmquist in den Schwed. Abhandlungen. 1750. S. 257.

Cauchy's Cours d'Analyse algebrique. P. I. Paris, 1821. ist überall zu citiren, wo es auf gründliche analytische Untersuchungen ankommt. M. s. p. 164. p. 291.

Brennlinie, s. Caustische Flächen und Linien.

Bürmannische Reihe ist eine von Bürmann, Professor zu Mannheim, gefundene und schon im Jahre 1796 dem Französischen Institut vorgelegte Reihe zur Entwickelung einer beliebigen Function X von x nach den positiven ganzen Potenzen einer andern beliebigen Function u von x (Mémoires de l'Institut. Tom. II. p. 14. 15. Legendre Exercices de Calcul intégral. Tom. II. Paris. 1817. p. 230. Lacroix Traité du Calcul diff. et du Calcul int. T. III. Sec. éd. Paris. 1819. p. 623.).

1. Da u eine Function von x, also auch umgekehrt x eine Function von u ist; so kann man auch X als eine Function von u betrachten, und es ist folglich nach der Maclaurin'schen Reihe (Taylor's Lehrsatz. 12.), wenn wir für $u = 0$

$$\frac{\partial^n X}{\partial u^n} = T^{(n)}$$

setzen:

$$X = T^{\circ} + T'.\frac{u}{1} + T''.\frac{u^2}{1.2} + T'''.\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

z sey im Folgenden immer eine Function von x, welche mit u zugleich verschwindet, so daß aber das Verhältniß $\frac{z}{u}$ nie unendlich wird.

2. Es ist immer

$$\frac{\partial^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).\frac{\partial^{n-r}\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{\partial z^{n-r}},$$

wenn man nach der Differentiation $z = 0$ setzt.

Sey $\frac{z}{u} = p$, und

$$p^{n-r} = A^0 + A'z + A''z^2 + \ldots + A^{(x)}z^x + \ldots,$$

$$u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n = z^r p^{n-r} = z^r\{A^0 + A'z + A''z^2 + \ldots + A^{(x)}z^x + \ldots\}.$$

Für $n = r$ ist offenbar

$$\frac{\partial^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n} = r(r-1)\ldots2.1A^0 + (r+1)r\ldots3.2A'z + \ldots$$

Also für $z = 0$:

$$\frac{\partial^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n} = n(n-1)\ldots2.1A^0\,.$$

Für $z = 0$ ist aber:

$$p^{n-r} = \left(\frac{z}{u}\right)^{n-r} = A^0\,.$$

Also

$$\frac{\partial^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n} = n(n-1)\ldots2.1.\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}$$

$$= n(n-1)\ldots(n-r+1).\frac{\partial^{n-r}\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{\partial z^{n-r}},$$

da $n - r = 0$ ist.

Ist ferner $n > r$, so ist klar, daß der nte Differentialquotient des allgemeinen Gliedes $A^{(x)}z^{x+r}$ obiger Reihe

$$(x+r)(x+r-1)\ldots(x+r-n+1)A^{(x)}z^{x+r-n}$$

ist. Für $x + r < n$ kommt unter den Factoren

$$x+r,\ x+r-1,\ x+r-2,\ \ldots\ x+r-n+1$$

stets einer vor, welcher $= 0$ ist. Für $x + r > n$ enthält obiger Differentialquotient eine positive ganze Potenz von z, und verschwindet folglich für $z = 0$. Man erhält also den Werth von

$$\frac{\partial^n . u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n}$$

für $z = 0$, wenn man

$$\varkappa + r = n, \quad \varkappa = n - r$$

setzt, so daß also für $z = 0$:

$$\frac{\partial^n . u^r \left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n} = n(n-1)(n-2)..2.1\, A^{(n-r)}$$

ist. Da nun aber nach der Maclaurin'schen Reihe

$$A^{(n-r)} = \frac{\partial^{n-r} p^{n-r}}{1.2.3..(n-r)\partial z^{n-r}} = \frac{\partial^{n-r} . \left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{1.2.3..(n-r)\partial z^{n-r}}$$

ist, für $z = 0$; so ist unter derselben Voraussetzung:

$$\frac{\partial^n . u^r \left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n} = n(n-1)(n-2)..(n-r+1) . \frac{\partial^{n-r} . \left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{\partial z^{n-r}},$$

w. z. b. w.

3. Für $n > r$ ist

$$\frac{\partial^{n-1}\left(u^r \frac{\partial . p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}} = \frac{\partial^n . u^r p^n}{\partial z^n},$$

wenn man $z = 0$ setzt.

Es ist nämlich

$$u^r \frac{\partial . p^n}{\partial z} = n u^r p^{n-1} . \frac{\partial p}{\partial z} = n u^r \left(\frac{z}{u}\right)^{n-1} . \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$= n z^r \left(\frac{z}{u}\right)^{n-r-1} . \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{n}{n-r} z^r . (n-r) p^{n-r-1} . \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$= \frac{n}{n-r} z^r . \frac{\partial . p^{n-r}}{\partial z}.$$

Aber nach (2.)

$$p^{n-r} = A^0 + A'z + A''z^2 + \ldots + A^{(\varkappa)} z^\varkappa + \ldots.$$

$$\frac{\partial . p^{n-r}}{\partial z} = A' + 2A''z + 3A'''z^2 + \ldots + \varkappa A^{(\varkappa)} z^{\varkappa-1} + \ldots.$$

Also

$$u^r \frac{\partial . p^n}{\partial z} = \frac{n}{n-r} z^r \{A' + 2A''z + 3A'''z^2 + \ldots + \varkappa A^{(\varkappa)} z^{\varkappa-1} + \ldots\}.$$

Für $n = r$ wäre der Nenner $n - r = 0$, und für $n < r$ wäre dieser Nenner negativ. Im erstern Falle würde also vorstehende Reihe nicht mehr Statt finden, und auch $n < r$ ist nicht zulässig, weil, wie wir sogleich sehen werden, das Folgende auf dem in (2.) bewiesenen Satze, bei welchem offenbar n nicht kleiner als r seyn darf, beruhet. Das $(n-1)$te Differential des allgemeinen Gliedes

$$\frac{n\varkappa}{n-r} A^{(\varkappa)} z^{\varkappa+r-1}$$

ist offenbar:

$$(\varkappa+r-1)(\varkappa+r-2)\ldots(\varkappa+r-n+1).\frac{n\varkappa}{n-r}A^{(\varkappa)}z^{\varkappa+r-n}.$$

Ist nun $\varkappa+r \overline{\overline{<}} n-1$, so ist immer einer der Factoren

$$\varkappa+r-1,\ \varkappa+r-2,\ \varkappa+r-3,\ \ldots \varkappa+r-n+1$$

$=0$. Ist $\varkappa+r>n$, so enthält obiger Differentialquotient eine positive ganze Potenz von z, und verschwindet folglich für $z=0$. Man muß also, auf ähnliche Art wie in (2.),

$$\varkappa+r=n,\ \varkappa=n-r$$

setzen, und erhält demnach für $z=0$:

$$\frac{\partial^{n-1}\left(u^r\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1A^{(n-r)}.$$

Aber nach (2.)

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1A^{(n-r)}=n(n-1)\ldots(n-r+1).\frac{\partial^{n-r}.\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{\partial z^{n-r}}$$

$$=\frac{\partial^n.u^r\left(\frac{z}{u}\right)^n}{\partial z^n}=\frac{\partial^n.u^rp^n}{\partial z^n},$$

immer für $z=0$. Also unter derselben Voraussetzung:

$$\frac{\partial^{n-1}\left(u^r\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}=\frac{\partial^n.u^rp^n}{\partial z^n},$$

w. z. b. w.

Für $n=r$ ist

$$u^r\frac{\partial.p^n}{\partial z}=nu^np^{n-1}\frac{\partial p}{\partial z}=nuz^{n-1}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Differentiirt man nun dieses Product $n-1$ Mal, so enthält jedes Glied des Differentials offenbar einen der Factoren u oder z, so daß also, da nach der Voraussetzung z und u zugleich verschwinden, dieses Differential für $z=0$ verschwindet. Ist $n<r$, so ist

$$u^r\frac{\partial.p^n}{\partial z}=nu^rp^{n-1}\frac{\partial p}{\partial z}=nu^{r-n+1}z^{n-1}\frac{\partial p}{\partial z},$$

wo $r-n+1+n-1=r>n$ ist, so daß also, nach einer ganz ähnlichen Schlußweise, wie vorher, ebenfalls

$$\frac{\partial^{n-1}\left(u^r\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}=0$$

ist, für $z=0$.

4. Nach (1.) ist nun

$$Xp^n = T^0 p^n + T'.\frac{up^n}{1} + T''.\frac{u^2 p^n}{1.2} + T'''.\frac{u^3 p^n}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\ldots + T^{(r)}.\frac{u^r p^n}{1.2.3..r} + \ldots.$$

$$\frac{\partial^n . Xp^n}{\partial z^n} = T^0.\frac{\partial^n . p^n}{\partial z^n} + \frac{T'}{1}.\frac{\partial^n . up^n}{\partial z^n} + \frac{T''}{1.2}.\frac{\partial^n . u^2 p^n}{\partial z^n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{T^{(r)}}{1.2.3..r}.\frac{\partial^n . u^r p^n}{\partial z^n} + \ldots.$$

oder nach (2.)

$$\frac{\partial^n . Xp^n}{\partial z^n} = T^0.\frac{\partial^n . p^n}{\partial z^n} + \frac{n}{1}T'.\frac{\partial^{n-1} . p^{n-1}}{\partial z^{n-1}}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}T''.\frac{\partial^{n-2} . p^{n-2}}{\partial z^{n-2}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}T'''.\frac{\partial^{n-3} . p^{n-3}}{\partial z^{n-3}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{n}{1}T^{(n-1)}.\frac{\partial p}{\partial z} + T^{(n)}.$$

Ferner ist

$$X\frac{\partial . p^n}{\partial z} = T^0.\frac{\partial . p^n}{\partial z} + \frac{T'}{1}u\frac{\partial . p^n}{\partial z} + \frac{T''}{1.2}u^2\frac{\partial . p^n}{\partial z} + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{T^{(r)}}{1.2.3..r}u^r\frac{\partial . p^n}{\partial z} + \ldots.$$

$$\frac{\partial^{n-1}\left(X\frac{\partial . p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}} = T^0.\frac{\partial^n . p^n}{\partial z^n} + \frac{T'}{1}.\frac{\partial^{n-1}\left(u\frac{\partial . p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}$$
$$+ \frac{T''}{1.2}.\frac{\partial^{n-1}\left(u^2\frac{\partial . p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{T^{(r)}}{1.2.3..r}.\frac{\partial^{n-1}\left(u^r\frac{\partial . p^n}{\partial z^{n-1}}\right)}{\partial z^{n-1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Aber für $n > r$ nach (3.) und (2.):

$$\frac{\partial^{n-1}\left(u^r\frac{\partial . p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}} = n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{\partial^{n-r} . p^{n-r}}{\partial z^{n-r}}$$

und nach (3.)

$$\frac{\partial^{n-1}\left(u^n\frac{\partial . p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}} = 0.$$

also

$$\frac{\partial^{n-1}\left(X\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}} = T^0.\frac{\partial^n.p^n}{\partial z^n} + \frac{n}{1}T'.\frac{\partial^{n-1}.p^{n-1}}{\partial z^{n-1}}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}T''.\frac{\partial^{n-2}.p^{n-2}}{\partial z^{n-2}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}T'''.\frac{\partial^{n-3}.p^{n-3}}{\partial z^{n-3}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{n}{1}T^{(n-1)}.\frac{\partial p}{\partial z},$$

da die folgenden Glieder verschwinden. Es ist folglich, wie sogleich erhellet:

$$\frac{\partial^n.Xp^n}{\partial z^n} - \frac{\partial^{n-1}\left(X\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}} = T^{(n)}$$

$$\frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{\partial.Xp^n}{\partial z} - X\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right\}}{\partial z^{n-1}} = T^{(n)}$$

$$\frac{\partial^{n-1}\left\{X\frac{\partial.p^n}{\partial z} + p^n\frac{\partial X}{\partial z} - X\frac{\partial.p^n}{\partial z}\right\}}{\partial z^{n-1}} = T^{(n)}$$

d. i.

$$T^{(n)} = \frac{\partial^{n-1}\left(p^n\frac{\partial X}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}$$

immer unter der Voraussetzung, daß man nach der Differentiation $z=0$ setzt.

Sind also u und z zwei zugleich verschwindende Functionen von x, so ist für jede Function X von x, wenn wir

$$\frac{z}{u} = p$$

setzen:

$$X = X + p\frac{\partial X}{\partial z}.\frac{u}{1} + \frac{\partial\left(p^2\frac{\partial X}{\partial z}\right)}{\partial z}.\frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^2\left(p^3\frac{\partial X}{\partial z}\right)}{\partial z^2}.\frac{u^3}{1.2.3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial^{n-1}\left(p^n\frac{\partial X}{\partial z}\right)}{\partial z^{n-1}}.\frac{u^n}{1.2..n}$$
$$\cdots\cdots$$

wenn man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in X, $p\frac{\partial X}{\partial z}$ und allen Differentialquotienten nach der Differentiation $z=0$ setzt.

5. Sey

$$z = x - a,\ u = \frac{x-a}{\varphi(x)},\ p = \varphi(x),\ \partial z = \partial x;$$

so ist

$$x = a + u\varphi(x)$$

und

$$X = X + \varphi x \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial \left\{ (\varphi x)^2 \frac{\partial X}{\partial x} \right\}}{\partial x} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^2 \left\{ (\varphi x)^3 \frac{\partial X}{\partial x} \right\}}{\partial x^2} \cdot \frac{u^3}{1.2.3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial^{n-1} \left\{ (\varphi x)^n \frac{\partial X}{\partial x} \right\}}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{u^n}{1.2\ldots n}$$
$$\cdots\cdots$$

wenn man auf der rechten Seite $z = 0$, d. i. $x = a$ setzt. Setzen wir nun $X = \psi x$, $a = y$; so ist hiernach, wenn

$$x = y + u\varphi x,\ y = x - u\varphi x$$

ist:

$$\psi x = \psi y + \varphi y \frac{\partial \psi y}{\partial y} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial \left\{ (\varphi y)^2 \frac{\partial \psi y}{\partial y} \right\}}{\partial y} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^2 \left\{ (\varphi y)^3 \frac{\partial \psi y}{\partial y} \right\}}{\partial y^2} \cdot \frac{u^3}{1.2.3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial^{n-1} \left\{ (\varphi y)^n \frac{\partial \psi y}{\partial y} \right\}}{\partial y^{n-1}} \cdot \frac{u^n}{1.2\ldots n}$$
$$\cdots\cdots$$

welches die Lagrange'sche Reihe (Thl. II. S. 632.) ist, die also aus der Bürmannischen folgt.

6. Für

$$u = \varphi(x) - \varphi(a),\ z = x - a$$

ist

$$p = \frac{z}{u} = \frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a}\right)^{-1}.$$

Also

$$X = X + \left\{ \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a}\right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u}{1}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a}\right)^{-2} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a}\right)^{-3} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u^3}{1.2.3}$$
$$\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \right)^{-n} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u^n}{1.2\ldots n}$$

. . . .

wenn man auf der rechten Seite $z = 0$, d. i. $x = a$ setzt.

Für $\varphi(a) = 0$ wird:

$$X = X + \left(\frac{\varphi(x)}{x - a} \right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{u}{1}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\varphi(x)}{x - a} \right)^{-2} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left(\frac{\varphi(x)}{x - a} \right)^{-3} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u^3}{1.2.3}$$

. . . .

$$+ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\varphi(x)}{x - a} \right)^{-n} \frac{\partial X}{\partial x} \right\} \cdot \frac{u^n}{1.2\ldots n}$$

. . . .

wenn man auf der rechten Seite $x = a$ setzt.

Sey z. B. $X = b^x$; $\varphi(x) = xc^x$. Aus der Gleichung

$$\varphi(a) = 0 = ac^a$$

folgt $a = 0$. Auch ist, wenn wir die natürlichen Logarithmen bloß durch l bezeichnen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = b^x \, lb \, .$$

Ferner findet man durch fortgesetzte Differentiation leicht:

$$\frac{\partial^{n-1}(c^{-nx} b^x \, lb)}{\partial x^{n-1}} = lb\,(lb - nlc)^{n-1} c^{-nx} b^x \, .$$

Also

$$b^x = 1 + lb \frac{xc^x}{1} + lb\,(lb - 2lc) \frac{x^2 c^{2x}}{1.2}$$
$$+ lb\,(lb - 3lc)^2 \frac{x^3 c^{3x}}{1.2.3}$$
$$+ lb\,(lb - 4lc)^3 \frac{x^4 c^{4x}}{1\ldots 4}$$
$$+ lb\,(lb - 5lc)^4 \frac{x^5 c^{5x}}{1\ldots 5}$$
$$+ \ldots\ldots$$

C.

Cardans Regel. Hill: Casum irreducibilem solvendi conatus, und Additamenta ad conatum, casum irreducibilem solvendi in Crelles Journal II. S. 303. und VII. S. 44.

Catacaustica, s. Caustische Flächen und Linien.

Caustische Flächen und Linien. 1. Der Weg eines Lichtstrahls in einem homogenen diaphanen Medio bleibt nach den ersten Gründen der Optik so lange eine gerade Linie, so lange der Lichtstrahl nicht eine feste Fläche trifft, oder in ein anderes homogenes diaphanes Medium von verschiedener Dichtigkeit übergeht. Im ersten Falle findet eine Zurückwerfung oder Reflexion, im zweiten eine Brechung oder Refraction statt. Die Gesetze der erstern untersucht die Katoptrik, die der letztern die Dioptrik. Der Punkt, in welchem bei einer Reflexion der Lichtstrahl die zurückwerfende feste Fläche, bei einer Refraction die Fläche trifft, welche die beiden diaphanen Media von einander scheidet, heißt der Einfallspunkt, und eine durch denselben auf die entsprechende Fläche gezogene Normale das Einfallsloth. Der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe bildet, heißt der Einfallswinkel, und der von dem zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahle mit dem Einfallslothe eingeschlossene Winkel wird respective der Reflexions- oder Refractionswinkel genannt. Der einfallende und der zurückgeworfene oder gebrochene Strahl liegen, wie die Katoptrik und Dioptrik lehren, mit dem Einfallslothe stets in einer Ebene. Der Einfallswinkel ist immer dem Reflexionswinkel gleich, welches das Grundgesetz der Katoptrik ist. Bei der Brechung ist für dieselben zwei diaphanen Media das Verhältniß der Sinus des Einfalls- und Refractionswinkels, d. h. das Brechungsverhältniß, ein constantes Verhältniß, welches das Grundgesetz der Dioptrik ist. In der Katoptrik und Dioptrik erscheinen diese beiden Grundgesetze als Resultate der Erfahrung, sind aber auch das Einzige, was diese beiden Wissenschaften der Erfahrung entnehmen, indem alles Uebrige aus diesen beiden Gesetzen durch Schlüsse, denen nicht im Mindesten geometrische Evidenz mangelt, abgeleitet wird. Für gegenwärtigen Artikel sind diese Gesetze bloß geometrische Bedingungen, welchen zwei eine beliebige krumme Fläche oder Linie in einem Punkte treffende gerade Linien in Bezug auf ihre Lage gegen die in Rede stehende krumme Fläche oder krumme Linie unterworfen sind, so daß wir also, indem wir die Natur solcher geraden Linien hier näher studiren, durchaus nicht aus den Gränzen der reinen Mathematik heraustreten, indem alles Folgende ganz den Charakter der theoretischen Geometrie an sich tragen wird. Wir gehen von einem geometrischen Problem aus, welches uns zu einem Lehrsatz führen wird, der als die Grundlage dieser ganzen Theorie zu betrachten ist.

2. Seyen zwei willkührliche feste krumme Flächen im Raume gegeben, welche wir durch F und F′ bezeichnen wollen. Denkt man sich nun zwei bewegliche concentrische Kugeln S und S′, welche sich so bewegen, daß ihre Halbmesser sich zwar ändern, aber immer ein gegebenes constantes Verhältniß zu einander be-

halten, und daß diese beiden Kugeln die beiden gegebenen Flächen stets berühren, die Kugel S die Fläche F, die Kugel S' die Fläche F'; so wird bei dieser Bewegung der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kugeln eine dritte Fläche beschreiben, deren Relation zu den beiden gegebenen Flächen zu bestimmen die Aufgabe ist.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, indem wir voraussetzen, daß die gegebenen Flächen beide Ebenen sind, welche wir durch E und E' bezeichnen wollen. Die gesuchte Fläche mag immer durch G bezeichnet werden. Für irgend eine Lage und Größe der beiden Kugeln sey C ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt, und B, B' seyen ihre respectiven Berührungspuncte mit den beiden gegebenen Ebenen, also BC, B'C ihre auf denselben senkrechten Halbmesser. Durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebenen E, E' und das Centrum C denke man sich nun eine dritte Ebene gelegt, und nehme in derselben einen beliebigen Punkt C_1 an, von welchem man auf die beiden gegebenen Ebenen die Perpendikel B_1C_1, B'_1C_1 fällt. L sey der Punkt, in welchem der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei in Rede stehenden Ebenen von der Linie CC_1 geschnitten wird, so ist offenbar

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{LC}{LC_1},\ \frac{B'C}{B'_1C_1} = \frac{LC}{LC_1}.$$

Also

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{B'C}{B'_1C^1},\ \frac{BC}{B'C} = \frac{B_1C_1}{B'_1C_1}.$$

Demnach ist offenbar auch C_1 der Mittelpunkt, und B_1C_1, B'_1C_1 sind die Halbmesser zweier concentrischen Kugeln, welche den Bedingungen unserer Aufgabe genügen. Auf dieselbe Weise ist überhaupt jeder Punkt der durch C und den gemeinschaftlichen Durchschnitt der gegebenen Ebenen gelegten Ebene ein solcher Mittelpunkt, so daß also diese Ebene die gesuchte Fläche G ist, indem man sich aus dem Obigen zugleich leicht überzeugt, daß auch kein Punkt außerhalb derselben die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Seyen jetzt F, F' zwei willkührliche krumme Flächen, C sey ein beliebiger Punkt der gesuchten Fläche G, und B, B' seyen die entsprechenden Berührungspunkte der beiden Kugeln mit den gegebenen Flächen. Für eine unendlich kleine Aenderung der Lage des Punktes C, und somit auch der Größe der beiden Kugeln, kann man statt der Flächen F, F' die sie in den Punkten B, B' berührenden Ebenen E, E' setzen, und der Mittelpunkt der beiden Kugeln wird sich nach dem Vorhergehenden auf einer die gesuchte Fläche G in dem Punkte C berührenden Ebene E_1 bewegen, so daß die Ebenen E, E', E_1 sich in ein und derselben geraden Linie schneiden. Die Flächen F, F', G haben also die Eigenschaft, daß die dieselben in den Punkten B, B', C berührenden Ebenen E, E', E_1 sich stets in ein und derselben geraden Linie schneiden. Legen wir nun durch den Punkt C eine auf

dieser gemeinschaftlichen Durchschnittslinie senkrechte Ebene E_2, so ist klar, daß die Ebenen E, E', E_1 sämmtlich auf derselben senkrecht sind, und daß folglich sowohl die durch C gehenden und auf den Ebenen E, E' senkrechten Linien BC, $B'C$, als auch das durch den Punkt C auf die Ebene E_1 errichtete Perpendikel, sämmtlich in der Ebene E_2 liegen. In Fig. 5. sey die Ebene des Papiers die Ebene E_2, und Le, Le', Le_1 seyen die Durchschnitte der Ebenen E, E', E_1 mit dieser Ebene. Bezeichnen wir nun die von BC und $B'C$ mit dem durch C auf E_1 errichteten Perpendikel eingeschlossenen Winkel respective durch α und α', so erhellet leicht, daß $\alpha = BLC$, $\alpha' = B'LC$ ist. Also

$$\sin\alpha = \frac{BC}{LC},\ \sin\alpha' = \frac{B'C}{LC}.$$

Folglich durch Division:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{BC}{B'C},$$

so daß also $\sin\alpha : \sin\alpha'$, wie $BC : B'C$, ein constantes Verhältniß ist.

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Wenn zwei concentrische Kugeln von veränderlichem Radius im Raume sich so bewegen, daß ihre Radien stets ein constantes Verhältniß zu einander haben, und von ihnen immer beziehungsweise zwei gegebene feste Flächen berührt werden; so ist der Ort ihres gemeinschaftlichen Mittelpunkts eine Fläche von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man von einem beliebigen Punkte in derselben auf sie und auf die beiden gegebenen Flächen senkrechte Linien zieht, diese drei Normalen immer in einer Ebene liegen, und die Sinus der von den beiden letztern Normalen mit der erstern eingeschlossenen Winkel in dem constanten Verhältniß der Halbmesser der beiden Kugeln zu einander stehen.

3. Erinnert man sich bei diesem Satze nun an das Grundgesetz der Dioptrik oder der Brechung der Lichtstrahlen (1.), so ergiebt sich aus demselben unmittelbar das folgende Fundamental-Theorem:

Wenn zwei homogene diaphane Media von verschiedener Dichtigkeit durch eine beliebige Fläche von einander geschieden werden, und die einfallenden Lichtstrahlen haben eine solche Lage, daß sie sämmtlich von einer auf ihnen senkrechten Fläche geschnitten werden können, so giebt es immer auch für sämmtliche gebrochene Strahlen eine solche orthogonale Transversalfläche, und die von irgend

einem Punkte in der die beiden brechenden Media von einander scheidenden Fläche auf diese beiden orthogonalen Transversal-Flächen gezogenen Normalen stehen immer in dem constanten Verhältniß der Sinus des Einfalls- und Refractionswinkels zu einander. Auch sieht man, daß jeder orthogonalen Transversal-Fläche der einfallenden Strahlen eine orthogonale Transversal-Fläche der gebrochenen Strahlen entsprechen, und immer obiges Gesetz statt finden muß.

4. Man kann diesen Satz auch so ausdrücken:

I. Wenn zwei homogene diaphane Media durch eine beliebige Fläche von einander getrennt, und alle einfallenden Strahlen von einer auf ihnen senkrechten Fläche geschnitten werden; so beschreibe man aus allen Punkten der die beiden brechenden Mittel von einander scheidenden Fläche als Mittelpunkten Kugeln, deren Halbmesser zu den Entfernungen der entsprechenden Mittelpunkte von der orthogonalen Transversal-Fläche der einfallenden Strahlen in dem constanten Verhältniß der Sinus des Refractions- und Einfallswinkels stehen: dann wird immer die diese sämmtlichen Kugeln einhüllende Fläche eine orthogonale Transversal-Fläche der gebrochenen Strahlen seyn.

Nimmt man die einfallenden Strahlen sämmtlich unter einander parallel an, so ist jede auf ihnen senkrechte Ebene eine orthogonale Transversal-Fläche dieser Strahlen, woraus sich folgender Lehrsatz ergiebt:

II. Wenn zwei homogene diaphane Media durch eine beliebige Fläche von einander geschieden werden, und die einfallenden Strahlen in einem dieser brechenden Mittel sämmtlich unter einander parallel sind; so beschreibe man aus allen Punkten der die beiden Mittel von einander trennenden Fläche als Mittelpunkten Kugeln, deren Halbmesser zu den Entfernungen der entsprechenden Mittelpunkte von einer willkührlichen auf sämmtlichen einfallenden Strahlen senkrechten Ebene in dem constanten Verhältniß der Sinus des Refractions- und Einfallswinkels stehen: dann ist die alle diese Kugeln einhüllende Fläche eine orthogonale Transversal-Fläche der gebrochenen Strahlen.

Läßt man die einfallenden Strahlen alle von einem Punkte ausgehen, so ist jede aus diesem Punkte als Mittelpunkt beschriebene Kugelfläche eine orthogonale Transversal-Fläche der

einfallenden Strahlen. Setzt man nun den Halbmesser dieser Kugelflächen $= 0$, so erhält man sogleich folgenden neuen merkwürdigen Lehrsatz:

III. Wenn zwei homogene diaphane Media durch eine beliebige Fläche von einander getrennt werden, und die einfallenden Strahlen alle von ein und demselben Punkte ausgehen; so beschreibe man aus allen Punkten der die beiden Mittel von einander trennenden Fläche Kugeln, deren Radien zu den Entfernungen der entsprechenden Mittelpunkte von dem strahlenden Punkte in dem constanten Verhältniß der Sinus des Refractions- und Einfallswinkels stehen: dann ist die alle diese Kugeln einhüllende Fläche eine orthogonale Transversal-Fläche der gebrochenen Strahlen.

Denkt man sich bei der Reflexion den zurückgeworfenen Strahl über den Einfallspunkt hinaus rückwärts verlängert, so wird augenblicklich erhellen, daß die Reflexion eigentlich nur ein specieller Fall der Refraction ist, eine Refraction nämlich, bei welcher das Verhältniß der Sinus des Einfalls- und Refractionswinkels $= 1 : -1$, d. i. bei welcher die Sinus des Einfalls- und Refractionswinkels sich bloß in den Zeichen unterscheiden, oder bei welcher, wenn, wie oben, α den Einfalls-, α' den Refractionswinkel bezeichnet, $\alpha + \alpha' = 0$ ist, wobei man sich aber, wie schon erinnert, den reflectirten Strahl immer rückwärts über den Einfallspunkt hinaus verlängert denken muß. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgende Sätze:

IV. Wenn Strahlen, die alle auf einer beliebigen Fläche normal sind, von einer zweiten willkührlichen Fläche reflectirt werden; so denke man sich aus allen Punkten der reflectirenden Fläche als Mittelpunkten Kugeln beschrieben, welche die auf den einfallenden Strahlen orthogonale Transversal-Fläche sämmtlich berühren: dann ist die alle diese Kugeln einhüllende Fläche eine orthogonale Transversal-Fläche der reflectirten Strahlen.

V. Wenn unter einander parallele Strahlen von einer beliebigen Fläche reflectirt werden; so denke man sich aus allen Punkten dieser Fläche als Mittelpunkten Kugeln beschrieben, welche eine willkührliche auf den einfallenden Strahlen senkrechte Ebene berühren: dann ist die alle diese Kugeln einhüllende Fläche eine orthogonale Transversal-Fläche der reflectirten Strahlen.

VI. Wenn Strahlen, die sämmtlich aus einem Punkte ausgehen, von einer beliebigen Fläche re-

flectirt werden, so beschreibe man aus allen Punkten der reflectirenden Fläche als Mittelpunkten Kugeln, welche durch den strahlenden Punkt gehen: dann ist die alle diese Kugeln einhüllende Fläche eine orthogonale Transversal-Fläche der reflectirten Strahlen.

5. Daß die vorhergehenden Sätze mit der nöthigen Modification auch für krumme Linien in einer Ebene gelten, erhellet augenblicklich, wenn man nur annimmt, daß die orthognale Transversal-Fläche der einfallenden Strahlen und die trennende oder zurückwerfende Fläche durch Umdrehung zweier krummen Linien um dieselbe Axe entstanden sind, und die Schnitte dieser Flächen betrachtet, welche durch Ebenen gebildet werden, die durch die gemeinschaftliche Drehungsaxe gehen. Auch überzeugt man sich leicht, daß unter dieser Voraussetzung die einhüllende Fläche in jedem Falle ebenfalls durch Umdrehung einer Curve um dieselbe Axe entstanden gedacht werden kann. Es wird überflüssig seyn, die obigen sechs Theoreme hier in Bezug auf Curven in einer Ebene von Neuem aufzustellen. Nur das Fundamental-Theorem mag hier einen besondern Platz finden:

Jeder orthogonalen Transversal-Linie der einfallenden Strahlen entspricht immer eine orthogonale Transversal-Linie der gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahlen, so daß, wenn man von beliebigen Punkten der trennenden oder zurückwerfenden Curve auf diese beiden orthogonalen Transversalen Normalen zieht, diese Normalen bei der Brechung in dem constanten Verhältniß der Sinus des Einfalls- und Refractionswinkels zu einander stehen, bei der Zurückwerfung dagegen einander gleich sind, wobei man nur zu bemerken hat, daß im letztern Falle die reflectirten Strahlen über den Einfallspunkt hinaus rückwärts verlängert gedacht werden müssen.

6. Erleidet ein Lichtstrahl nicht bloß eine Brechung oder Zurückwerfung, sondern mehrere Brechungen oder Zurückwerfungen nach einander, so folgt mittelst einer leichten Schlußweise aus dem Vorhergehenden augenblicklich, daß es, wenn es für die einfallenden Strahlen eine orthogonale Transversal-Fläche oder Transversal-Linie giebt, auch immer für die letzten gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahlen eine orthogonale Transversal-Fläche oder Transversal-Linie geben muß.

7. Nach diesen geometrischen Betrachtungen wollen wir nun zu analytischen Untersuchungen übergehen. Seyen zu dem Ende

$$F = 0, \quad F' = 0$$

die Gleichungen der orthogonalen Transversal-Flächen der ein-

fallenden und der gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahlen. Eben so sey

$$G = 0$$

die Gleichung der die beiden Mittel trennenden oder der zurückwerfenden Fläche. Die Coordinaten dieser drei Flächen sollen respective durch x, y, z; x', y', z'; X, Y, Z bezeichnet werden. Denken wir uns von irgend einem Punkte in der die beiden Mittel scheidenden oder zurückwerfenden Fläche, dessen Coordinaten also nach dem Obigen X, Y, Z sind, auf die beiden Transversal-Flächen Normalen gezogen, so sind nach dem Art. Berührung (22.) in diesen Zusätzen die Gleichungen dieser Normalen:

$$X-x + (Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\; Y-y + (Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

$$X-x' + (Z-z')\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right) = 0,\; Y-y' + (Z-z')\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right) = 0.$$

Die Quadrate dieser Normalen sind nach dem Art. Coordinate (12.) in diesen Zusätzen:

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2,$$
$$\text{und } (X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2.$$

Also nach (4. I.), wenn wir das Brechungsverhältniß $= m:n$, und für den Fall der Zurückwerfung $m = -n$ oder $m + n = 0$ setzen:

$$n^2\{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2\} = m^2\{(X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2\},$$

so daß wir nun folgende acht Gleichungen haben:

$$F = 0,\; F' = 0,\; G = 0;$$

$$X-x + (Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,\; Y-y + (Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0;$$

$$X-x' + (Z-z')\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right) = 0,\; Y-y' + (Z-z')\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right) = 0;$$

$$n^2\{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2\} = m^2\{(X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2\},$$

welche überhaupt die neun veränderlichen Größen $x, y, z, x', y', z', X, Y, Z$ enthalten. Nehmen wir nun zwei der Gleichungen

$$F = 0,\; F' = 0,\; G = 0$$

als gegeben an, so bleiben uns noch sieben Gleichungen, aus denen man jederzeit sechs der obigen neun veränderlichen Größen eliminiren, und auf diese Weise eine Gleichung zwischen den drei übrigen veränderlichen Größen, d. i. die unter den drei vorhergehenden Gleichungen als unbekannt angenommene Gleichung finden kann. Man kann indeß noch andere wesentliche Vortheile darbietende Gleichungen finden, wobei wir, die Begriffe zu fixiren, annehmen wollen, daß $F = 0$, $G = 0$ bekannt seyen, und $F' = 0$ gefunden werden solle. Alle Differentialquotienten sind hier, auch wenn dies nicht besonders durch Einschließung in Pa-

renthesen angedeutet wird, partielle Differentiale. Differentiirt man nun die Gleichung

$$n^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2\}=m^2\{(X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2\}$$

in Bezug auf x, so wird:

$$n^2\left\{(X-x)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-1\right)+(Y-y)\frac{\partial Y}{\partial x}+(Z-z)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}$$
$$=m^2\left\{(X-x')\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\right)+(Y-y')\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\right)+(Z-z')\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial z'}{\partial x}\right)\right\},$$

wobei zu bemerken ist, daß x, y ganz unabhängig von einander sind. Aber, da Z als Function von X und Y, z' als Function von x' und y' betrachtet wird:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial z'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x},$$

welches, in obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$n^2\left\{\begin{array}{c}\left[X-x+(Z-z)\frac{\partial Z}{\partial X}\right]\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\left[Y-y+(Z-z)\frac{\partial Z}{\partial Y}\right]\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}\\ -\left[X-x+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]\end{array}\right\}$$
$$=m^2\left\{\begin{array}{c}\left[X-x'+(Z-z')\frac{\partial Z}{\partial X}\right]\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\left[Y-y'+(Z-z')\frac{\partial Z}{\partial Y}\right]\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}\\ -\left[X-x'+(Z-z')\frac{\partial z'}{\partial x'}\right]\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}-\left[Y-y'+(Z-z')\frac{\partial z'}{\partial y'}\right]\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}\end{array}\right\}.$$

Folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$P=n^2\left\{X-x+(Z-z)\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\right\}-m^2\left\{X-x'+(Z-z')\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\right\}$$
$$Q=n^2\left\{Y-y+(Z-z)\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\right\}-m^2\left\{Y-y'+(Z-z')\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\right\}$$

setzen, nach dem Obigen:

$$P\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0,$$

und ganz auf dieselbe Weise, indem man nach y differentiirt:

$$P\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=0,$$

woraus man leicht erhält:

$$P\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right\}=0$$
$$Q\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right\}=0.$$

Wäre nun allgemein

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0\,,$$

so wäre dadurch eine allgemeine Bedingung gegeben, welcher die Flächen, deren Gleichungen $F=0$, $G=0$ sind, unterworfen seyn müßten, da doch offenbar diese Flächen ganz willkührlich angenommen werden können, und an eine solche Bedingung durchaus nicht zu denken ist. Es ist folglich im Allgemeinen nicht

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0\,,$$

und daher wegen obiger Gleichungen

$$P=0,\ Q=0\,.$$

Wir haben also nun folgende acht Gleichungen:

$$F=0,\ F'=0,\ G=0\,;$$

$$X-x+(Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ Y-y+(Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\,;$$

$$n^2\left\{X-x+(Z-z)\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\right\}=m^2\left\{X-x'+(Z-z')\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\right\}$$

$$n^2\left\{Y-y+(Z-z)\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\right\}=m^2\left\{Y-y'+(Z-z')\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)\right\}$$

$$n^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2\}=m^2\{(X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2\}.$$

Diese Gleichungen gewähren den wichtigen Vortheil, daß aus ihnen die Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right),\ \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)$$

verschwunden sind.

Sind $F=0$, $G=0$ gegeben, so bedient man sich, um die Gleichung $F'=0$ zu finden, vorstehender Gleichungen. Sind $F'=0$, $G=0$ gegeben, so führt man, um $F=0$ zu finden, statt der Gleichungen

$$X-x+(Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ Y-y+(Z-z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

nur die Gleichungen

$$X-x'+(Z-z')\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)=0,\ \ Y-y'+(Z-z')\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)=0$$

ein. Sind aber $F=0$, $F'=0$ gegeben, so findet man die Gleichung $G=0$ mittelst der erstern obigen Gleichungen, aus denen die vorhergehenden abgeleitet worden sind. Auf diese Weise wird man nie der Integralrechnung bedürfen.

Um ein Beispiel der Anwendung dieser Gleichungen zu geben, so seyen die beiden brechenden Mittel durch eine Kugelfläche von einander getrennt, deren Mittelpunkt wir als Anfang der Coor-

dinaten annehmen wollen. Die einfallenden Strahlen mögen alle aus einem durch die Coordinaten a, b, c bestimmten Punkte ausgehen. Die gegebene Gleichung ist also

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2;$$

und, weil die Strahlen alle aus dem Punkte (a, b, c) ausgehen, so haben wir:

$$x = a, \ y = b, \ z = c.$$

Aus der gegebenen Gleichung der Kugelfläche folgt augenblicklich:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right) = -\frac{X}{Z}, \ \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = -\frac{Y}{Z}.$$

Also haben wir mittelst der obigen allgemeinen Gleichungen:

$$\frac{cX - aZ}{m^2} = \frac{z'X - x'Z}{n^2}, \ \frac{cY - bZ}{m^2} = \frac{z'Y - y'Z}{n^2};$$

$$\frac{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2}{m^2} = \frac{(X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2}{n^2}.$$

Aus diesen drei Gleichungen und der Gleichung der Kugelfläche muß man **X, Y, Z** eliminiren, um die Gleichung $F' = 0$ zwischen x', y', z' zu finden.

Aus den beiden ersten der drei vorstehenden Gleichungen, und der Gleichung der Kugel, findet man leicht:

$$X = \frac{(m^2x' - n^2a)r}{\sqrt{(m^2x'-n^2a)^2 + (m^2y'-n^2b)^2 + (m^2z'-n^2c)^2}}$$

$$Y = \frac{(m^2y' - n^2b)r}{\sqrt{(m^2x'-n^2a)^2 + (m^2y'-n^2b)^2 + (m^2z'-n^2c)^2}}$$

$$Z = \frac{(m^2z' - n^2c)r}{\sqrt{(m^2x'-n^2a)^2 + (m^2y'-n^2b)^2 + (m^2z'-n^2c)^2}}.$$

Folglich

$$(m^2x'-n^2a)X + (m^2y'-n^2b)Y + (m^2z'-n^2c)Z$$
$$= r\sqrt{(m^2x'-n^2a)^2 + (m^2y'-n^2b)^2 + (m^2z'-n^2c)^2}.$$

Die letzte der drei obigen Gleichungen bringt man leicht auf die Form:

$$\left.\begin{array}{c}(m^2-n^2)(X^2+Y^2+Z^2)\\ -2\{(m^2x'-n^2a)X + (m^2y'-n^2b)Y + (m^2z'-n^2c)Z\}\\ + m^2(x'^2+y'^2+z'^2) - n^2(a^2+b^2+c^2)\end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$2\{(m^2x'-n^2a)X + (m^2y'-n^2b)Y + (m^2z'-n^2c)Z\}$$
$$= m^2(x'^2+y'^2+z'^2+r^2) - n^2(a^2+b^2+c^2+r^2).$$

Folglich, mit dem Obigen verglichen, wenn man zugleich auf beiden Seiten quadrirt:

$$4r^2\{(m^2x'-n^2a)^2 + (m^2y'-n^2b)^2 + (m^2z'-n^2c)^2\}$$
$$= \{m^2(x'^2+y'^2+z'^2+r^2) - n^2(a^2+b^2+c^2+r^2)\}^2,$$

die Gleichung der gesuchten orthogonalen Transversalfläche der gebrochenen Strahlen.

Um ein Beispiel für den Fall zu haben, wenn die Gleichung $G=0$ gesucht wird, wollen wir die Gleichung der Fläche bestimmen, von welcher die beiden Mittel getrennt werden müssen, wenn die aus einem Punkte, den wir als Anfang der Coordinaten annehmen wollen, ausgehenden Strahlen sich nach der Brechung wieder in einem durch die Coordinaten a, b, c gegebenen Punkte vereinigen sollen. Wir haben also

$$x=0,\ y=0,\ z=0;\ x'=a,\ y'=b,\ z'=c\ .$$

Folglich

$$n^2(X^2+Y^2+Z^2) = m^2\{(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2\},$$

d. i. nach leichter Transformation:

$$\left.\begin{matrix}(m^2-n^2)(X^2+Y^2+Z^2)-2m^2(aX+bY+cZ)\\ +m^2(a^2+b^2+c^2)\end{matrix}\right\}=0$$

oder

$$\left\{X-\frac{m^2}{m^2-n^2}a\right\}^2+\left\{Y-\frac{m^2}{m^2-n^2}b\right\}^2+\left\{Z-\frac{m^2}{m^2-n^2}c\right\}^2$$
$$=\left\{\frac{mn\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{m^2-n^2}\right\}^2,$$

welches die Gleichung einer Kugel ist.

8. Sind

$$F=0,\ F'=0,\ G=0$$

Gleichungen krummer Linien in einer Ebene, so hat man ganz wie vorher:

$$F=0,\ F'=0,\ G=0;$$
$$X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ X-x'+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x'}=0\ ;$$
$$n^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2\}=m^2\{(X-x')^2+(Y-y')^2\}\ .$$

Differentiirt man die letzte Gleichung, so wird:

$$n^2\left\{(X-x)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-1\right)+(Y-y)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}$$
$$=m^2\left\{(X-x')\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\right)+(Y-y')\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\right)\right\}$$
$$n^2\left\{(X-x)\frac{\partial X}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial Y}{\partial x}-\left[X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}\right]\right\}$$
$$=m^2\left\{(X-x')\frac{\partial X}{\partial x}+(Y-y')\frac{\partial Y}{\partial x}-\left[(X-x')\frac{\partial x'}{\partial x}+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x}\right]\right\}.$$

Aber

$$X-x'+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x'}=0\ .$$

Folglich, wenn man mit $\frac{\partial x'}{\partial x}$ multiplicirt, auch

$$(X-x')\frac{\partial x'}{\partial x}+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x}=0\ .$$

Also, wenn man zugleich auf beiden Seiten mit $\frac{\partial x}{\partial X}$ multiplicirt:

$$n^2\left\{X-x+(Y-y)\frac{\partial Y}{\partial X}\right\}=m^2\left\{X-x'+(Y-y')\frac{\partial Y}{\partial X}\right\},$$

so daß man folgende Gleichungen hat:

$$F=0,\ F'=0,\ G=0;$$

$$X-x+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial x}=0;$$

$$n^2\left\{X-x+(Y-y)\frac{\partial Y}{\partial X}\right\}=m^2\left\{X-x'+(Y-y')\frac{\partial Y}{\partial X}\right\};$$

$$n^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2\}=m^2\{(X-x')^2+(Y-y')^2\},$$

oder

$$F=0,\ F'=0,\ G=0;$$

$$X-x'+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x'}=0;$$

$$n^2\left\{X-x+(Y-y)\frac{\partial Y}{\partial X}\right\}=m^2\left\{X-x'+(Y-y')\frac{\partial Y}{\partial X}\right\};$$

$$n^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2\}=m^2\{(X-x')^2+(Y-y')^2\}.$$

Alle diese Gleichungen werden auf eine ganz ähnliche Art angewandt, wie vorher in (7.) gewiesen worden ist.

9. In dem besondern Falle, wenn alle Strahlen aus einem Punkte in derselben Ebene ausgehen, in welcher die durch die Gleichungen $F=0$, $F'=0$, $G=0$ dargestellten Curven liegen, hat man nach (4. III. VI.), wenn man diesen Punkt als Anfang der Coordinaten annimmt, die Gleichungen

$$x=0,\ y=0.$$

Folglich hat man für diesen Fall:

$$F'=0,\ G=0;$$

$$X-x'+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x'}=0;$$

$$n^2\left\{X+Y\frac{\partial Y}{\partial X}\right\}=m^2\left\{X-x'+(Y-y')\frac{\partial Y}{\partial X}\right\};$$

$$n^2\{X^2+Y^2\}=m^2\{(X-x')^2+(Y-y')^2\}.$$

Alle nun folgenden Beispiele sollen sich der Einfachheit wegen bloß auf diesen speciellen Fall beziehen.

10. Sey zunächst die Gleichung $G=0$ der die beiden brechenden Mittel trennenden Curve gegeben, und die Gleichung $F'=0$ der orthogonalen Transversale der gebrochenen Strahlen werde gesucht. Die gegebene Gleichung sey

$$\alpha X+\beta Y=\gamma$$

die Gleichung einer geraden Linie. Denkt man sich von dem Anfange der Coordinaten auf diese Linie ein Perpendikel gefällt, so sind nach Principien der analytischen Geometrie (Linie, gerade) die Coordinaten des Fußpunktes dieses Perpendikels:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\beta}}{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2},$$

wobei man sich nur die gegebene Gleichung unter die Form

$$-\frac{\alpha}{\beta}X + \frac{\gamma}{\beta} = Y$$

gebracht denken muß. Die Länge des in Rede stehenden Perpendikels ist

$$\frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Multiplicirt man nun die gegebene Gleichung auf beiden Seiten mit

$$\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2},$$

so wird:

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2+\beta^2}X + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}Y = \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

und folglich, wenn wir die Coordinaten des Fußpunktes des von dem Anfange der Coordinaten auf die gegebene gerade Linie gefällten Perpendikels durch a, b, die Länge dieses Perpendikels durch c bezeichnen:

$$aX + bY = c^2$$

die Gleichung der gegebenen geraden Linie. Da

$$a = \frac{\alpha\gamma}{\alpha^2+\beta^2}, \quad b = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}, \quad c = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

ist, so überzeugt man sich leicht von der für das Folgende wichtigen Relation:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Da

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{a}{b}$$

ist, so erhalten wir für den vorliegenden Fall aus (9.) leicht folgende Gleichungen:

$$aX + bY = c^2$$
$$n^2\{bX - aY\} = m^2\{b(X-x') - a(Y-y')\}$$
$$n^2\{X^2 + Y^2\} = m^2\{(X-x')^2 + (Y-y')^2\}$$

aus denen nun X und Y eliminirt werden müssen, um die gesuchte Gleichung zwischen x', y' zu finden.

Den beiden ersten Gleichungen giebt man leicht die Form:

$$aX + bY = c^2$$
$$bX - aY = \frac{m^2(ay' - bx')}{n^2 - m^2}$$

und findet aus denselben mittelst der Relation $a^2 + b^2 = c^2$:

$$c^2 X = ac^2 + \frac{m^2 b(ay' - bx')}{n^2 - m^2},$$

$$c^2 Y = bc^2 - \frac{m^2 a(ay' - bx')}{n^2 - m^2},$$

und hieraus:

$$c^2 (X - x') = c^2 (a - x') + \frac{m^2 b(ay' - bx')}{n^2 - m^2}$$

$$c^2 (Y - y') = c^2 (b - y') - \frac{m^2 a(ay' - bx')}{n^2 - m^2}.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten die Quadrate und addirt, so wird:

$$c^2 (X^2 + Y^2) = c^4 + \frac{m^4 (ay' - bx')^2}{(n^2 - m^2)^2},$$

$$c^2\{(X-x')^2 + (Y-y')^2\} = c^2\{(x'-a)^2 + (y'-b)^2\} + \frac{m^2(2n^2-m^2)(ay'-bx')^2}{(n^2 - m^2)^2}.$$

Setzt man dies in die Gleichung

$$n^2 c^2 \{X^2 + Y^2\} = m^2 c^2 \{(X - x')^2 + (Y - y')^2\},$$

so ergiebt sich als Gleichung der orthogonalen Transversale der gebrochenen Strahlen:

$$m^4 (ay' - bx')^2 = c^2 (n^2 - m^2)\{n^2 c^2 - m^2 [(x' - a)^2 + (y' - b)^2]\}$$

so daß also diese Transversale eine Linie des zweiten Grades oder ein Kegelschnitt ist. Vorstehende Gleichung bringt man leicht auf folgende Form:

$$m^2 n^2 c^2 \{x'^2 + y'^2 - 2(ax' + by' - c^2)\} = n^4 c^4 + m^4 (ax' + by' - c^2)^2;$$

oder, wenn man

$$2m^2 n^2 c^2 (ax' + by' - c^2)$$

addirt oder subtrahirt:

$$m^2 n^2 c^2 (x'^2 + y'^2) = \{n^2 c^2 + m^2 (ax' + by' - c^2)\}^2$$

$$m^2 n^2 c^2 \{(x' - 2a)^2 + (y' - 2b)^2\} = \{n^2 c^2 - m^2 (ax' + by' - c^2)\}^2$$

d. i.

$$\pm mnc\sqrt{x'^2 + y'^2} = n^2 c^2 + m^2 (ax' + by' - c^2)$$

$$\pm mnc\sqrt{(x' - 2a)^2 + (y' - 2b)^2} = n^2 c^2 - m^2 (ax' + by' - c^2)$$

oder, indem man diese Gleichungen zu einander addirt, und auf beiden Seiten durch mnc dividirt:

$$\pm \sqrt{x'^2 + y'^2} \pm \sqrt{(x' - 2a)^2 + (y' - 2b)^2} = 2\frac{n}{m}c,$$

wobei man aber zu bemerken hat, daß die obern und untern Zeichen sich nicht auf einander beziehen. Da nun

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} \text{ und } \sqrt{(x' - 2a)^2 + (y' - 2b)^2}$$

die Entfernungen eines willkührlichen Punktes der gesuchten orthogonalen Transversale von dem Anfange der Coordinaten oder

dem strahlenden Punkte, und von einem durch die Coordinaten 2a, 2b bestimmten Punkte sind; so ist die gesuchte Curve offenbar entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel, deren Brennpunkte der Anfang der Coordinaten und der Punkt (2a, 2b) sind, da die Summe oder Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes der Curve von diesen beiden Punkten nach dem Obigen eine constante Größe ist. Die halbe Hauptaxe ist $= \frac{n}{m} c$, und die Coordinaten des Mittelpunktes der Ellipse oder Hyperbel sind a, b. Die Excentricität ist $= \sqrt{a^2 + b^2} = c$, wie leicht erhellen wird. Ist nun $\frac{n}{m}$ ein echter Bruch, d. i. $n < m$, so ist die halbe Hauptaxe kleiner als die Excentricität, und die Curve folglich eine Hyperbel; ist aber $\frac{n}{m}$ ein unechter Bruch, d. i. $n > m$, so ist die halbe Hauptaxe größer als die Excentricität, die Curve also eine Ellipse. Dies führt zu folgendem wichtigen Theorem:

Wenn zwei homogene diaphane Media durch eine Ebene von einander getrennt sind, und alle von einem beliebigen Punkte ausgehende Lichtstrahlen bei dem Uebergange aus dem einen Medium in das andere gebrochen werden; so sind die gebrochenen Strahlen sämmtlich auf einer durch Umdrehung eines Kegelschnitts entstandenen Fläche des zweiten Grades senkrecht. Der Mittelpunkt dieser Fläche ist der Fußpunkt des von dem strahlenden Punkte, auf die die beiden Mittel trennende Ebene gefällten Perpendikels, und der strahlende Punkt ist ein Brennpunkt derselben. Die Excentricität verhält sich zu der halben Hauptaxe wie der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels. Die Drehungsaxe ist die Hauptaxe des Kegelschnitts, in welcher die Brennpunkte liegen, und die Fläche ist ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid (in diesem Falle une Hyperboloide à deux nappes), je nachdem der Sinus des Einfallswinkels kleiner oder größer ist als der Sinus des Brechungswinkels, d. i. jenachdem die brechende Kraft des ersten Mediums größer oder kleiner ist als die brechende Kraft des zweiten.

11. Denken wir uns nun ein von zwei parallelen Ebenen begränztes brechendes Medium, welches in einem andern Medium von verschiedener brechender Kraft liegt. Von einem Punkte in dem letztern gehen Lichtstrahlen aus, welche bei ihrem Durchgange durch das erstere zweimal gebrochen werden. Die Dicke des erstern Mittels sey $= e$, und die Entfernung der dem strahlenden Punkte zunächst liegenden begränzenden Ebene desselben von diesem Punkte

$= c$. Der strahlende Punkt sey immer der Anfang der Coordinaten. Ist nun irgend ein einfallender Strahl gegeben, so lege man durch denselben eine auf den beiden parallelen Ebenen senkrechte Ebene, in welcher sämmtliche Brechungen, die der Strahl erleidet, vorgehen werden. Diese Ebene nehme man als Ebene der xy an, die Axe der y auf den beiden parallelen Ebenen senkrecht. Die Gleichungen der Durchschnitte der Ebene der xy mit den parallelen Ebenen sind hiernach offenbar

$$y = c, \quad y = c + e.$$

Die Gleichung des einfallenden Strahls sey

$$y = \alpha x,$$

so ist offenbar α die Cotangente des Einfallswinkels; also

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

der Sinus dieses Winkels. Da wir nun das Brechungsverhältniß durch $m:n$ bezeichnen; so ist

$$\frac{n}{m\sqrt{1+\alpha^2}}$$

der Sinus des Brechungswinkels bei der ersten Brechung des Strahls. Die Cotangente des Brechungswinkels ist also

$$\frac{\sqrt{m^2(1+\alpha^2)-n^2}}{n}.$$

Die Coordinaten des Einfallspunktes sind

$$x = \frac{c}{\alpha}, \quad y = c.$$

Folglich ist

$$y - c = \frac{\sqrt{m^2(1+\alpha^2)-n^2}}{n}\left(x - \frac{c}{\alpha}\right)$$

die Gleichung des gebrochenen Strahls. Verbindet man hiermit die Gleichung $y = c + e$; so findet man für die Coordinaten des Punktes, in welchem der gebrochene Strahl die zweite parallele Ebene schneidet:

$$x = \frac{c}{\alpha} + \frac{ne}{\sqrt{m^2(1+\alpha^2)-n^2}}, \quad y = c + e.$$

Bei der zweiten Brechung ist der ausfahrende Strahl, welcher durch den so eben bestimmten Punkt geht, offenbar dem einfallenden Strahle parallel, und die Gleichung des ausfahrenden Strahls ist also:

$$y - c - e = \alpha\left\{x - \frac{c}{\alpha} - \frac{ne}{\sqrt{m^2(1+\alpha^2)-n^2}}\right\}$$

$$y - e = \alpha\left\{x - \frac{ne}{\sqrt{m^2(1+\alpha^2)-n^2}}\right\}.$$

Aus dieser Gleichung ist c ganz verschwunden, woraus folgt, daß die Richtung des ausfahrenden Strahls ungeändert bleibt, wenn man das zwischen den beiden parallelen Ebenen eingeschlossene Mittel dem strahlenden Punkte, parallel mit sich selbst, nähert, oder von demselben entfernt. Die Richtung der ausfahrenden Strahlen bleibt also ungeändert, wenn man auch $c = o$ setzt. Dann hat man aber offenbar den in (10.) behandelten Fall, wenn zwei brechende Media durch eine Ebene von einander geschieden werden, und das a. a. O. bewiesene Theorem gilt also auch für den gegenwärtigen Fall. Der strahlende Punkt ist, wie in (10.), ein Brennpunkt; der Mittelpunkt des Kegelschnitts, durch dessen Umdrehung die orthogonale Transversal-Fläche der ausfahrenden Strahlen entstanden ist, liegt auf derselben Seite des strahlenden Punktes, auf welcher das zwischen den beiden parallelen Ebenen eingeschlossene Mittel liegt, und die Excentricität ist der Dicke dieses Mittels gleich. Die orthogonale Transversal-Fläche ist ein Ellipsoid oder Hyperboloid (à deux nappes), jenachdem die brechende Kraft in dem von den parallelen Ebenen eingeschlossenen Mittel die größerere oder die kleinere ist. Die Excentricität verhält sich zu der halben Hauptaxe wie der Sinus des Einfallswinkels in dem von den parallelen Ebenen begränzten Mittel zu dem Sinus des Brechungswinkels in dem zweiten gegebenen Mittel.

12. Sei nun ferner die die beiden brechenden Mittel trennende Curve ein Kreis. Der Mittelpunkt dieses Kreises werde als Anfang der Coordinaten angenommen, und a, b seyen die Coordinaten des strahlenden Punktes. Der Halbmesser des gegebenen Kreises sey $= r$, also

$$X^2 + Y^2 = r^2$$

die Gleichung desselben. Man hat also nach (8.) für diesen Fall folgende Gleichungen:

$$F' = 0, \; X^2 + Y^2 = r^2 \; ;$$

$$n^2 \left\{ X - a + (Y - b) \frac{\partial Y}{\partial X} \right\} = m^2 \left\{ X - x' + (Y - y') \frac{\partial Y}{\partial X} \right\}$$

$$n^2 \{ (X - a)^2 + (Y - b)^2 \} = m^2 \{ (X - x')^2 + (Y - y')^2 \}$$

die Gleichung $F' = 0$ wird gesucht.

Da

$$X + Y \frac{\partial Y}{\partial X} = 0$$

ist; so bringt man diese Gleichungen leicht auf folgende Form:

$$X^2 + Y^2 = r^2$$

$$n^2 (aY - bX) = m^2 (x'Y - y'X)$$

$$n^2 \{ (X - a)^2 + (Y - b)^2 \} = m^2 \{ (X - x')^2 + (Y - y')^2 \}$$

woraus sich ferner leicht folgende zwei Gleichungen, die in Bezug auf X, Y vom ersten Grade sind, ergeben:

$$(m^2y'-n^2b)X-(m^2x'-n^2a)Y=0$$
$$2(m^2x'-n^2a)X+2(m^2y'-n^2b)Y=m^2(x'^2+y'^2+r^2)-n^2(a^2+b^2+r^2)$$

Addirt man zu dem Quadrate der zweiten das vierfache Quadrat der ersten; so erhält man, indem man $X^2+Y^2=r^2$ setzt:

$$4r^2\{(m^2x'-n^2a)^2+(m^2y'-n^2b)^2\}=\{m^2(x'^2+y'^2+r^2)-n^2(a^2+b^2+r^2)\}^2$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten orthogonalen Transversale welche wir nun noch auf eine andere Gestalt bringen wollen. Man erhält nämlich leicht durch Entwickelung der einzelnen Glieder:

$$2m^2n^2\{(a^2+b^2+r^2)(x'^2+y'^2+r^2)-4r^2(ax'+by')\}$$
$$=m^4(x'^2+y'^2-r^2)^2+n^4(a^2+b^2-r^2)^2$$

und, wenn man

$$2m^2n^2(a^2+b^2-r^2)(x'^2+y'^2-r^2)$$

auf beiden Seiten sowohl addirt, als auch subtrahirt:

$$4m^2n^2\{(a^2+b^2)(x'^2+y'^2)-2r^2(ax'+by')+r^4\}$$
$$=\{m^2(x'^2+y'^2-r^2)+n^2(a^2+b^2-r^2)\}^2,$$
$$4m^2n^2r^2\{(x'-a)^2+(y'-b)^2\}=\{m^2(x'^2+y'^2-r^2)-n^2(a^2+b^2-r^2)\}^2$$

oder:

$$\pm 2mn\sqrt{(a^2+b^2)(x'^2+y'^2)-2r^2(ax'+by')+r^4}$$
$$=m^2(x'^2+y'^2-r^2)+n^2(a^2+b^2-r^2)$$
$$\pm 2mnr\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2}=m^2(x'^2+y'^2-r^2)-n^2(a^2+b^2-r^2)$$

wo sich aber die obern und untern Zeichen nicht auf einander beziehen. Zieht man diese Gleichungen von einander ab; so erhält man:

$$\pm m\sqrt{(a^2+b^2)(x'^2+y'^2)-2r^2(ax'+by')+r^4}\pm mr\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2}$$
$$=n(a^2+b^2-r^2)$$

oder auch:

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{\left\{x'-\frac{ar^2}{a^2+b^2}\right\}^2+\left\{y'-\frac{br^2}{a^2+b^2}\right\}^2}\pm r\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2}$$
$$=\frac{n}{m}(a^2+b^2-r^2).$$

Die orthogonale Transversale der gebrochenen Strahlen ist also eine Linie des vierten Grades, welche, wie aus obiger Gleichung augenblicklich folgt, die Eigenschaften hat, daß die Summe oder Differenz der Producte, welche man erhält, wenn man die Entfernungen eines jeden Punktes dieser Curve von dem durch die Coordinaten a, b bestimmten strahlenden Punkte, und einem durch die Coordinaten $\frac{ar^2}{a^2+b^2}$, $\frac{br^2}{a^2+b^2}$ bestimmten Punkte, respective in die beständigen Factoren r und $\sqrt{a^2+b^2}$ multipli-

cirt, eine constante Größe ist. Werden die beiden brechenden Mittel durch eine Kugelfläche von einander getrennt, so ist die orthogonale Transversal-Fläche eine durch Umdrehung einer Curve von obiger Beschaffenheit entstandne Fläche. Die Drehungsaxe ist dann die durch den strahlenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugel gehende gerade Linie.

13. Wir betrachten nun noch ein Beispiel für den Fall, wenn die die beiden Mittel trennende Curve gesucht wird. Die Strahlen mögen wieder aus einem Punkte ausgehen, welcher als Anfang der Coordinaten angenommen wird, indem wir uns unter dieser Voraussetzung die Frage vorlegen, von was für einer Curve die beiden Mittel geschieden werden müssen, wenn die gebrochenen Strahlen wieder in einem durch die Coordinaten a, b gegebenen Punkte zusammenlaufen sollen.

In diesem Falle hat man also

$$x=0,\ y=0;\ x'=a,\ y'=b\ .$$

Die Gleichung

$$X-x'+(Y-y')\frac{\partial y'}{\partial x}=0$$

in (9.) ist die Gleichung der auf der orthogonalen Transversale der gebrochenen Strahlen normalen Linien, und ist in diesem Falle von selbst erfüllt, weil man sich die orthogonale Transversale der gebrochenen Strahlen hier als einen mit dem Halbmesser $=0$ um den durch die Coordinaten a, b gegebenen Punkt beschriebenen Kreis vorstellen kann. Man hat also nach (9.) bloß noch die Gleichungen

$$n^2\left\{X+Y\frac{\partial Y}{\partial X}\right\}=m^2\left\{X-a+(Y-b)\frac{\partial Y}{\partial X}\right\}$$

$$n^2\{X^2+Y^2\}=m^2\{(X-a)^2+(Y-b)^2\}\ .$$

Differentiirt man die zweite nach X, so erhält man die erste, und hat also bloß noch die zweite zu berücksichtigen, welche daher die Gleichung der gesuchten Curve ist. Man bringt diese Gleichung leicht auf die Form:

$$(n^2-m^2)(X^2+Y^2)+2m^2(aX+bY)=m^2(a^2+b^2)$$

oder, wenn man auf beiden Seiten

$$\frac{m^4a^2}{(n^2-m^2)^2}+\frac{m^4b^2}{(n^2-m^2)^2}=\frac{m^4(a^2+b^2)}{(n^2-m^2)^2}$$

addirt, nachdem vorher die Gleichung durch n^2-m^2 dividirt worden ist:

$$\left\{X+\frac{m^2}{n^2-m^2}a\right\}^2+\left\{Y+\frac{m^2}{n^2-m^2}b\right\}^2=\left\{\frac{mn\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}\right\}^2.$$

Die gesuchte Curve ist also ein Kreis. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$-\frac{m^2}{n^2-m^2}a\,;\ -\frac{m^2}{n^2-m^2}b\,;$$

der Halbmesser ist

$$=\frac{mn\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}.$$

Die Entfernung des Mittelpunktes vom strahlenden Punkte ist

$$=\sqrt{\left(\frac{m^2a}{n^2-m^2}\right)^2+\left(\frac{m^2b}{n^2-m^2}\right)^2}=\frac{m^2\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2},$$

und die Entfernung des Mittelpunktes von dem durch die Coordinaten a, b gegebenen Punkte

$$=\sqrt{\left\{a+\frac{m^2a}{n^2-m^2}\right\}^2+\left\{b+\frac{m^2b}{n^2-m^2}\right\}^2}=\frac{n^2\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}.$$

Das Product dieser beiden Entfernungen ist

$$=\frac{m^2n^2(a^2+b^2)}{(n^2-m^2)^2}=r^2,$$

d. i. = dem Quadrate des Radius. Da

$$-\frac{m^2}{n^2-m^2}a:-\frac{m^2}{n^2-m^2}b=a:b$$

ist, so liegen der strahlende Punkt, der Mittelpunkt des Kreises und der durch die Coordinaten a, b gegebene Punkt, d. i. der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen in einer geraden Linie.

Ist $m<n$, so ist $mn>m^2$, $mn<n^2$, also auch

$$\frac{mn\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}>\frac{m^2\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2},<\frac{n^2\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}.$$

Ist aber $m>n$, so ist $mn<m^2$, $mn>n^2$, und folglich

$$\frac{mn\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}<\frac{m^2\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2},>\frac{n^2\sqrt{a^2+b^2}}{n^2-m^2}.$$

Im ersten Falle liegt also der strahlende Punkt innerhalb, der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen außerhalb des Kreises. Im zweiten Falle findet das Umgekehrte statt. Noch ist zu bemerken, daß der strahlende Punkt und der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen stets auf einer Seite des Mittelpunkts liegen. Die Coordinaten des Mittelpunkts sind nämlich nach dem Obigen:

$$-\frac{m^2}{n^2-m^2}a\,,\ -\frac{m^2}{n^2-m^2}b\,.$$

Ist nun $n>m$, so sind diese Coordinaten den Coordinaten a, b des Vereinigungspunktes der gebrochenen Strahlen entgegengesetzt, und dieser Punkt liegt also offenbar mit dem strahlenden Punkte, dessen Coordinaten beide = 0 sind, auf einer Seite des Mittelpunkts. Ist $n<m$, so haben die obigen Coordinaten mit a, b

zwar gleiche Vorzeichen, aber $-\frac{m^2}{n^2-m^2}$ ist ein unechter Bruch, und folglich

$$-\frac{m^2}{n^2-m^2}a > a, \quad -\frac{m^2}{n^2-m^2}b > b,$$

woraus sich unmittelbar Dasselbe ergiebt, wie vorher.

Hieraus leitet man folgenden Satz ab:

Wenn eine durchsichtige Kugel sich in einem homogenen Mittel von verschiedener Brechungskraft befindet, so giebt es auf jedem Durchmesser derselben immer zwei Punkte von solcher Lage, daß die von dem einen ausgehenden, und an der Oberfläche der Kugel gebrochenen Strahlen sich in dem andern wieder vereinigen. Diese beiden Punkte liegen immer beide auf einer Seite des Mittelpunkts, und das Product ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte ist dem Quadrate des Radius gleich; auch liegt der eine stets außerhalb, der andere innerhalb der Kugel, und zwar liegt der strahlende Punkt außerhalb oder innerhalb, jenachdem die brechende Kraft der Kugel kleiner oder größer als die brechende Kraft des Mittels ist, in welchem sich die Kugel befindet. Endlich verhalten sich die Entfernungen des strahlenden Punkts und des Vereinigungspunktes der gebrochenen Strahlen vom Mittelpunkte der Kugel zu einander, wie die Quadrate der Sinus des Einfallswinkels in dem Mittel, in welchem sich die Kugel befindet, und des Brechungswinkels in der Kugel.

Die vorhergehenden lehrreichen Beispiele sind sämmtlich einer Abhandlung von Gergonne in den Annales de Mathém. T. XVI. p. 65. entnommen. Die ausführliche Literatur s. m. man am Ende dieses Artikels.

14. Wenn von einer ebenen Curve Lichtstrahlen, die von einem Punkte in derselben Ebene ausgehen, zurückgeworfen, oder durch sie gebrochen werden, und man denkt sich die einfallenden und zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen in stetiger Folge; so wird man sich auch leicht die stetige Folge der Durchschnittspunkte je zweier auf einander folgenden zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen vorstellen können. Die stetige Folge dieser Durchschnittspunkte bildet eine Curve, welche die caustische Linie (durch Zurückwerfung oder durch Brechung) der gegebenen Curve, oder die Brennlinie derselben genannt wird. Hieraus ist nun ferner augenblicklich ersichtlich, daß die Brennlinie von sämmtlichen zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen berührt wird, und daher auch als die einhüllende Curve (s. diesen

Art.) der zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen defini
werden kann. Da es in dem vorliegenden Falle, wo wir anneh
men, daß die Strahlen sämmtlich aus einem Punkte ausge
hen, stets eine orthogonale Transversale der zurückgeworfene
oder gebrochenen Strahlen giebt (4. **III. VI.** 5.), so ist klar, da
die caustische Linie die Evolute dieser orthogonalen Transversal
ist, und daher, weil letztere nach dem Obigen immer bestimm
werden kann, ebenfalls mittelst der im Art. Evolution angegeb
nen Methoden jederzeit gefunden werden kann.

Die orthogonale Transversale der durch eine gerade Lin
gebrochenen Strahlen ist nach (10.) eine Ellipse oder eine Hy
perbel, woraus sich mittelst des Vorhergehenden unmittelbar d
merkwürdige Satz ergiebt, daß die Brennlinie durch Brechun
der geraden Linie jederzeit die Evolute einer Ellipse oder ein
Hyperbel ist. Aehnliche Sätze würden sich mittelst des Obige
mehrere finden lassen.

15. Die erste in (14.) angegebene allgemeine Eigenscha
der Brennlinien führt zu folgender Methode, dieselben zu finden.

Sey überhaupt

$$\varphi(t, u) = 0$$

die Gleichung der Curve, deren Caustica gefunden werden sol
wo also u als Function von t betrachtet werden kann. D
Gleichung eines beliebigen dem durch die Coordinaten t, u b
stimmten Punkte entsprechenden reflectirten oder gebrochenen Strah
sey

$$Y = F(t) \,.\, X + F_1(t) \,.$$

Dieser Strahl berühre die gesuchte Caustica in einem Punkt
dessen Coordinaten x, y sind. Die Gleichung

$$Y = \frac{\partial y}{\partial x} X + y - x \frac{\partial y}{\partial x}$$

der die Caustica in dem Punkte (x, y) berührenden Linie mu
also mit der vorhergehenden Gleichung identisch, folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F(t), \quad y - x\frac{\partial y}{\partial x} = F_1(t)$$

seyn. Diese Gleichungen müssen für jede zwei zusammen geh
rende Punkte (t, u) und (x, y) statt finden. Man kann si
also x, y als Functionen von t denken, so wie auch den Diff
rentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, und erhält folglich, wenn man nach t diff
rentiirt:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \,,$$

d. i.

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial F_1(t)}{\partial t} = -x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial t} = -x \frac{\partial F(t)}{\partial t}, \quad -x \frac{\partial F(t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(t)}{\partial t} = 0.$$

Da der reflectirte oder gebrochene Strahl durch den Punkt (x, y) geht, so ist

$$y - xF(t) - F_1(t) = 0.$$

Setzen wir nun den ersten Theil dieser Gleichung $= V$, so ist das partielle Differential

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -x \frac{\partial F(t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(t)}{\partial t},$$

und wir haben also folgende zwei Gleichungen:

$$V = 0, \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen t, so erhält man die gesuchte Gleichung der Caustica zwischen x und y.

Die Gleichung des reflectirten oder gebrochenen Strahls findet man auf folgende Art. Die Gleichung der Normale der gegebenen Curve in dem Punkte (t, u) ist:

$$Y - u = -\frac{\partial t}{\partial u}(X - t).$$

Die trigonometrischen Tangenten der von dem einfallenden Strahle, der Normale, und dem zurückgeworfenen Strahle mit der Axe der x oder t eingeschlossenen Winkel sind, wenn wir die Coordinaten des strahlenden Punctes durch a, b bezeichnen:

$$\frac{b-u}{a-t}, \quad -\frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{y-u}{x-t}.$$

Folglich sind, wie leicht erhellet, die trigonometrischen Tangenten des Einfalls- und Reflexionswinkels:

$$\frac{\frac{b-u}{a-t} + \frac{\partial t}{\partial u}}{1 - \frac{b-u}{a-t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}}, \quad \frac{-\frac{\partial t}{\partial u} - \frac{y-u}{x-t}}{1 - \frac{y-u}{x-t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}}.$$

Also ist nach dem Gesetze der Zurückwerfung die Gleichung des reflectirten Strahls:

$$\frac{(b-u)\partial u + (a-t)\partial t}{(a-t)\partial u - (b-u)\partial t} = -\frac{(y-u)\partial u + (x-t)\partial t}{(x-t)\partial u - (y-u)\partial t}.$$

Eben so sind die trigonometrischen Tangenten des Einfalls- und Brechungswinkels:

$$\frac{\frac{b-u}{a-t} + \frac{\partial t}{\partial u}}{1 - \frac{b-u}{a-t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}}, \quad \frac{\frac{y-u}{x-t} + \frac{\partial t}{\partial u}}{1 - \frac{y-u}{x-t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}}.$$

Also, wenn wir diese Winkel durch Θ und Θ' bezeichnen, nach der Formel

$$\sin\alpha^2 = \frac{\tang\alpha^2}{1+\tang\alpha^2}:$$

$$\sin\Theta = \frac{\frac{b-u}{a-t}+\frac{\partial t}{\partial u}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{b-u}{a-t}\right)^2\right\}}}$$

$$\sin\Theta' = \frac{\frac{y-u}{x-t}+\frac{\partial t}{\partial u}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{y-u}{x-t}\right)^2\right\}}},$$

oder

$$\sin\Theta = \frac{(b-u)\partial u + (a-t)\partial t}{\sqrt{(\partial t^2+\partial u^2)\{(a-t)^2+(b-u)^2\}}},$$

$$\sin\Theta' = \frac{(y-u)\partial u + (x-t)\partial t}{\sqrt{(\partial t^2+\partial u^2)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}}}.$$

Folglich, weil nach dem Gesetze der Brechung

$$\sin\Theta : \sin\Theta' = m:n,\ \frac{\sin\Theta}{m} = \frac{\sin\Theta'}{n}$$

ist:

$$\frac{(b-u)\partial u + (a-t)\partial t}{m\sqrt{(a-t)^2+(b-u)^2}} = \frac{(y-u)\partial u + (x-t)\partial t}{n\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}$$

die Gleichung des gebrochenen Strahls.

16. Von diesen allgemeinen Formeln wollen wir nun eine Anwendung auf die Bestimmung der Caustica des Kreises durch Zurückwerfung machen. Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sey der Anfang der Coordinaten, der Halbmesser des Kreises sey $= r$; so ist

$$t^2 + u^2 = r^2$$

die Gleichung desselben. Also

$$t\partial t + u\partial u = 0,\ u\partial u = -t\partial t,$$

und folglich

$$\frac{t(b-u)-u(a-t)}{t(a-t)+u(b-u)} = \frac{u(x-t)-t(y-u)}{t(x-t)+u(y-u)},$$

oder

$$\frac{bt-au}{at+bu-r^2} = \frac{ux-ty}{tx+uy-r^2},$$

$$(bt-au)(tx+uy-r^2) + (ty-ux)(at+bu-r^2) = 0$$

die Gleichung des reflectirten Strahls. Differentiirt man nun, wie nach dem Obigen (15.) geschehen muß, bloß in Bezug auf t; so hat man folgende zwei Gleichungen:

$$t\partial t + u\partial u = 0$$

$$\{x(au-bt)-b(tx+uy-r^2)+a(ux-ty)-y(at+bu-r^2)\}\partial t$$
$$=\{y(bt-au)-a(tx+uy-r^2)+b(ty-ux)-x(at+bu-r^2)\}\partial u\,.$$

Folglich, wenn man $\frac{\partial u}{\partial t}$ aus diesen beiden Gleichungen eliminirt:

$$\{x(au-bt)-b(tx+uy-r^2)+a(ux-ty)-y(at+bu-r^2)\}u$$
$$=\{y(au-bt)+a(tx+uy-r^2)+b(ux-ty)+x(at+bu-r^2)\}t,$$
$$(at+bu)(tx+uy-r^2)+(tx+uy)(at+bu-r^2)=2(au-bt)(ux-ty).$$

Aus dieser Gleichung, und aus den Gleichungen

$$t^2+u^2=r^2$$
$$(bt-au)(tx+uy-r^2)+(ty-ux)(at+bu-r^2)=0\,,$$

muß man nun t, u eliminiren, um die Gleichung der Caustica zwischen x, y zu finden. Man bringt diese drei Gleichungen leicht auf folgende Formen:

$$t^2+u^2=r^2$$
$$(t^2-u^2)(ay+bx)-2tu(ax-by)=r^2\{(y+b)t-(x+a)u\}$$
$$4tu(ay+bx)+2(t^2-u^2)(ax-by)=r^2\{(x+a)t+(y+b)u\}\,.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen zuerst $ax-by$, und dann $ay+bx$; so erhält man:

$$r^2(ay+bx)=(x+a)u^3+(y+b)t^3$$
$$2r^2(ax-by)=(x+a)(t^3+3tu^2)-(y+b)(u^3+3t^2u)\,.$$

Addirt man zu dem Quadrate der zweiten das vierfache Quadrat der ersten Gleichung, und bemerkt, daß

$$(ay+bx)^2+(ax-by)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

ist; so erhält man:

$$4r^2(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$$
$$(t^2+u^2)^2\{(x+a)^2(t^2+4u^2)-6(x+a)(y+b)tu+(y+b)^2(u^2+4t^2)\}$$

oder, wegen $t^2+u^2=r^2$:

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$$
$$(x+a)^2(r^2+3u^2)-6(x+a)(y+b)tu+(y+b)^2(r^2+3t^2)$$
$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2\{(x+a)^2+(y+b)^2\}=3\{(x+a)u-(y+b)t\}^2\,.$$

Setzt man nun

$$x+a=rA,\ y+b=rB\,;$$
$$t=rp,\ u=rq,\ ay+bx=r^2C\,;$$
$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2\{(x+a)^2+(y+b)^2\}=3r^4R^2\,;$$

so hat man folgende drei Gleichungen nach dem Obigen:

$$p^2+q^2=1\,,\ Aq^3+Bp^3=C\,,\ Aq-Bp=R\,,$$

und es kommt nun bloß darauf an, p und q zu eliminiren.

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$p = \frac{-BR \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - R^2}}{A^2 + B^2}$$

$$q = \frac{AR \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - R^2}}{A^2 + B^2},$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Setzt man diese Werthe von p und q nun in die zweite Gleichung; so wird:

$$A\{AR \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - R^2}\}^3 - B\{BR \mp A\sqrt{A^2 + B^2 - R^2}\}^3$$
$$= C(A^2 + B^2)^3 .$$

Entwickelt man die Potenzen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, und dividirt durch $A^2 + B^2$; so erhält man:

$$\pm AB(A^2 + B^2 + 2R^2)\sqrt{A^2 + B^2 - R^2} = C(A^2 + B^2)^2 - R^3(A^2 - B^2).$$

Erhebt man auf beiden Seiten in das Quadrat, und dividirt durch $(A^2 + B^2)^2$; so wird:

$$A^2B^2(3R^2 + A^2 + B^2) = R^6 - 2CR^3(A^2 - B^2) + C^2(A^2 + B^2)^2$$
$$A^2B^2(3R^2 + A^2 + B^2 - 4C^2) = \{R^3 - C(A^2 - B^2)\}^2 .$$

Es ist aber

$$3R^2 + A^2 + B^2 - 4C^2 = \frac{4(ax - by)^2}{r^4};$$

also

$$R^3 = C(A^2 - B^2) \pm 2AB . \frac{ax - by}{r^2},$$

oder, wenn man von Neuem auf beiden Seiten quadrirt, und mit $27r^{12}$ multiplicirt:

$$(3r^4R^2)^3 = 27r^4\{r^4C(A^2 - B^2) \pm 2r^2AB(ax - by)\}^2$$

d. i. nach dem Obigen:

$$\{4(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - r^2[(x + a)^2 + (y + b)^2]\}^3$$
$$= 27r^4 . \{(ay + bx)[(x + a)^2 - (y + b)^2] \pm 2(x + a)(y + b)(ax - b)\}^2$$

wo nun bloß noch eine Bestimmung wegen des Zeichens nöthig ist.

17. Wir wollen zu dem Ende für's Erste noch den auch an sich wichtigen besondern Fall betrachten, wenn der strahlende Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises liegt. Der Anfang der Coordinaten sey der Mittelpunkt dieses Kreises, und die Axe der t oder x sey durch den strahlenden Punkt gelegt, indem wir zugleich denselben auf der Seite der negativen t oder x annehmen wollen. Wie vorher ist

$$t^2 + u^2 = r^2 .$$

Die trigonometrische Tangente des von dem in dem Punkte (t, u) einfallenden Strahle mit der Normale in diesem Punkte eingeschlossenen Winkels ist, wie auch ohne Figur leicht erhellen wird,

$$= \frac{u}{r + t} .$$

Die Tangente des von dem reflectirten Strahle mit der Axe der t oder x eingeschlossenen Winkels sey $= p$; so ist die Tangente des von dem reflectirten Strahle mit der Normale eingeschlossenen Winkels, wie ebenfalls leicht ohne Figur erhellen wird,

$$= \frac{p - \frac{u}{t}}{1 + p\frac{u}{t}} = \frac{pt - u}{t + pu}.$$

Also nach dem Gesetze der Zurückwerfung:

$$\frac{pt - u}{t + pu} = \frac{u}{r + t},$$

woraus leicht:

$$p = \frac{u(r+2t)}{t(r+t) - u^2} = \frac{u(r+2t)}{t(r+2t) - r^2}.$$

Folglich die Gleichung des zurückgeworfenen Strahls in diesem Falle:

$$y - u = \frac{u(r+2t)}{t(r+2t) - r^2}(x - t)$$

$$[r^2 - t(r+2t)]y + u(r+2t)x = r^2 u.$$

Nach (15.) muß man diese Gleichung nach t differentiiren, wodurch man erhält:

$$-(r+4t)y + \left[2u + (r+2t)\frac{\partial u}{\partial t}\right]x = r^2\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Aber, wegen der Gleichung $t^2 + u^2 = r^2$:

$$t + u\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{t}{u}.$$

Also

$$-(r+4t)uy + [2u^2 - (r+2t)t]x = -r^2 t$$

$$(r+4t)uy + [(r+4t)t - 2r^2]x = r^2 t$$

und man muß also t, u aus den Gleichungen:

$$t^2 + u^2 = r^2$$

$$[r^2 - t(r+2t)]y + u(r+2t)x = r^2 u$$

$$(r+4t)uy + [(r+4t)t - 2r^2]x = r^2 t$$

eliminiren. Man erhält aber weit einfachere Gleichungen, wenn man aus den beiden letztern Gleichungen zuerst x, und dann auch y eliminirt, wobei man nur, um die Resultate zu vereinfachen, stets auch die erste der drei obigen Gleichungen zu berücksichtigen hat. Die Gleichungen, welche man auf diese Weise erhält, sind:

$$t^2 + u^2 = r^2$$

$$3r(r+t)x = 2tu^2 + r^2(r+t),$$

$$3r(t+r)y = 2u^3$$

und, wenn man

$$u^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$$

setzt:

$$t^2 + u^2 = r^2$$
$$r(3x - r) = 2t(r - t)$$
$$3ry = 2u(r - t)\,.$$

Um aus diesen Gleichungen t, u zu eliminiren, dividire man di beiden letzten durch einander, erhebe auf beiden Seiten in Quadrat, und addire auf beiden Seiten die Einheit; so wird

$$\frac{3y}{3x - r} = \frac{u}{t},\quad \frac{9y^2 + (3x - r)^2}{(3x - r)^2} = \frac{t^2 + u^2}{t^2} = \frac{r^2}{t^2}$$

$$t = \pm \frac{r(3x - r)}{\sqrt{9y^2 + (3x - r)^2}}\,.$$

Setzt man diesen Werth in die zweite der drei obigen Gleichungen, so wird

$$\frac{\{9(x^2 + y^2) - r^2\}(3x - r)}{9y^2 + (3x - r)^2} = \pm \frac{2r(3x - r)}{\sqrt{9y^2 + (3x - r)^2}}\,,$$

$$\frac{9(x^2 + y^2) - r^2}{9y^2 + (3x - r)^2} = \pm \frac{2r}{\sqrt{9y^2 + (3x - 3)^2}}\,,$$

woraus sich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, die rationale keine Ambiguität der Zeichen darbietende Gleichung:

$$\{9(x^2 + y^2) - r^2\}^2 = 4r^2\{9y^2 + (3x - r)^2\}$$

des vierten Grades für die Caustica in dem vorliegenden Fall ergiebt.

18. Kehren wir nun wieder zu der Bestimmung des Zeichen in der allgemeinen Gleichung (16.) zurück. Man könnte vielleich meinen, daß das eine der beiden Zeichen dem Falle, wo der strah lende Punkt innerhalb, das andere dem Falle, wo dieser Punk außerhalb des gegebenen Kreises liegt, entspräche. Dem ist jedoc nicht also, sondern beiden Fällen entspricht ein und dasselbe Zei chen, wovon man sich durch folgendes Raisonnement überzeug Um zu dem in (17.) behandelten Falle überzugehen, setze ma in der allgemeinen Gleichung $a = -r$, $b = o$; so wird die Gleichung:

$$\{4(x^2 + y^2) - [(x - r)^2 + y^2]\}^3 = 27\,\{y[y^2 - (x - r)^2] \mp 2xy(x - r)\}^2.$$

Aus dieser Gleichung die in (17.) gefundene Gleichung herzu leiten, führt in weitläufige Rechnungen, und ist zu unserm ge genwärtigen Zwecke auch nicht nöthig. So viel ist aber kla daß sowohl die für den Fall, wenn der strahlende Punkt inne halb, als auch die für den Fall, wenn der strahlende Punk außerhalb des gegebenen Kreises liegt, geltende allgemeine Gle chung für $a = -r$, $b = o$ in die in (17.) gefundene Gleichun übergehen muß. Entsprächen nun den beiden in Rede stehende Fällen verschiedene Zeichen, so müßte sich sowohl die Gleichung

$$\{4(x^2 + y^2) - [(x - r)^2 + y^2]\}^3 = 27\,\{y[y^2 - (x - r)^2] - 2xy(x - r)\}^2$$

als auch die Gleichung

$$\{4(x^2 + y^2) - [(x - r)^2 + y^2]\}^3 = 27\{y[y^2 - (x - r)^2] + 2xy(x - r)\}^2$$

auf die in (17.) gefundene Gleichung bringen lassen, welches offenbar ungereimt ist, und nur in dem Falle statthaft seyn würde, wenn das Glied mit dem doppelten Zeichen für $a = -r$, $b = o$ verschwände, welches aber, wie man sieht, hier nicht der Fall ist. Daher entspricht den beiden in Rede stehenden Fällen nur ein Zeichen, und es ist also willkührlich, in welchem Falle man das Zeichen allgemein zu bestimmen sucht.

Wir betrachten den Fall, wenn der strahlende Punkt außerhalb des gegebenen Kreises liegt. Man denke sich von dem strahlenden Punkte an den gegebenen Kreis zwei Berührende gezogen, und bezeichne die Coordinaten der Berührungspunkte durch t, u; so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichungen

$$t^2 + u^2 = r^2,\ at + bu = r^2 .$$

Im Allgemeinen ist nicht $bt - au = o$, weil aus den Gleichungen

$$at + bu = r^2,\ bt - au = 0$$

folgen würde:

$$(a^2 + b^2)t = ar^2,\ (a^2 + b^2)u = br^2$$

und hieraus, mittelst der Gleichung $t^2 + u^2 = r^2$:

$$a^2 + b^2 = r^2 ,$$

so daß also der strahlende Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises liegen müßte, da doch hier keine besondere Bedingung rücksichtlich der Lage des gegebenen Punktes vorausgesetzt worden ist. Setzt man nun

$$at + bu - r^2 = 0$$

in die Gleichungen:

$$(bt - au)(tx + uy - r^2) + (ty - ux)(at + bu - r^2) = 0$$

$$(at + bu)(tx + uy - r^2) + (tx + uy)(at + bu - r^2) = 2(au - bt)(ux - ty)$$

(s. 16.); so erhält man sogleich

$$tx + uy - r^2 = 0,\ ux - ty = 0$$

oder

$$tx + uy = t^2 + u^2,\ ux - ty = 0$$

woraus sich ohne Schwierigkeit $x = t$, $y = u$ ergiebt. Also sind die Berührungspunkte der beiden von dem strahlenden Punkte an den Kreis gezogenen Berührenden zugleich Punkte der Caustica. Also muß die Gleichung der Caustica erfüllt werden, wenn man für x, y die aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 ,\ ax + by = r^2$$

sich ergebenden Werthe setzt. Nehmen wir nun der Kürze wegen den strahlenden Punkt in der Axe der x an, und setzen also $b = 0$; so erhält man aus vorstehenden Gleichungen:

$$x = \frac{r^2}{a},\ y^2 = \frac{r^2(a^2 - r^2)}{a^2} .$$

Die allgemeine Gleichung (16.) wird für $b = o$:

$\{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-r^2(2ax+a^2)\}^3=27r^4a^2y^2\{(x+a)^2-y^2\pm2x(x$

$\{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-r^2(2ax+a^2)\}=27r^4a^2y^2\{(x+a\pm x)^2-(x^2+$

Setzt man nun für x und y die obigen Werthe; so wird

$$(a^2-r^2)^2=\left\{\frac{a^4+a^2r^2+2r^4\pm2r^2(a^2+r^2)}{a^2}\right\}^2$$

wo man offenbar das untere Zeichen nehmen muß, da nu

$$\left\{\frac{a^4+a^2r^2+2r^4-2a^2r^2-2r^4}{a^2}\right\}^2=\left\{\frac{a^4-a^2r^2}{a^2}\right\}^2=(a^2-$$

ist. Also muß man auch in der allgemeinen Gleichung der stica das untere Zeichen nehmen, so daß also diese Gleichu

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3$$
$$=27r^4\{(ay+bx)[(x+a)^2-(y+b)^2]-2(x+a)(y+b)(ax-$$

oder

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3$$
$$=27r^4(bx-ay)^2(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$$

wird.

19. Betrachten wir nun noch den besondern Fall, die Strahlen alle einander parallel sind, wobei wir der Ei heit wegen die Axe der x der gemeinschaftlichen Richtun Strahlen parallel, und den Mittelpunkt des Kreises wied Anfang der Coordinaten annehmen wollen. Die Coord irgend eines Einfallspunktes seyen, wie früher, t, u; so is

$$t^2+u^2=r^2.$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen der lende Strahl mit der Normale einschließt, ist $=\frac{u}{t}$. Ist trigonometrische Tangente des von dem reflectirten Strahl der Axe der t oder x eingeschlossenen Winkels; so ist, wie ohne Figur leicht erhellen wird,

$$\frac{p-\frac{u}{t}}{1+p\frac{u}{t}}=\frac{pt-u}{t+pu}$$

die trigonometrische Tangente des von dem reflectirten S mit der Normale eingeschlossenen Winkels. Also

$$\frac{pt-u}{t+pu}=\frac{u}{t},\ p=\frac{2tu}{t^2-u^2}.$$

Folglich die Gleichung des reflectirten Strahls:

$$y-u=\frac{2tu}{t^2-u^2}(x-t)$$

$$2tux-(t^2-u^2)y=r^2u.$$

Differentiirt man nach t, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{t}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2(ux-ty)}{2(tx+uy)-r^2}$$

$$t\{2(tx+uy)-r^2\} = 2u(ux-ty)$$

$$2(t^2-u^2)x + 4tuy = r^2t\,.$$

Man muß also jetzt t, u aus den Gleichungen

$$t^2 + u^2 = r^2$$

$$2tux - (t^2-u^2)y = r^2u$$

$$2(t^2-u^2)x + 4tuy = r^2t$$

eliminiren. Aus den beiden letzten eliminire man zuerst x und y; so erhält man:

$$t^2+u^2=r^2,\ r^2(2x-t)=2tu^2,\ r^2y=u^3\,.$$

Addirt man zum Quadrate der Gleichung

$$2r^2x = t(r^2+2u^2)$$

das vierfache Quadrat der dritten obigen Gleichung, so wird

$$4r^4(x^2+y^2) = t^2(r^4+4r^2u^2+4u^4)+4u^6$$
$$= t^2r^2(r^2+4u^2)+4u^4(t^2+u^2)$$
$$= r^2(r^2-u^2)(r^2+4u^2)+4r^2u^4$$
$$= r^6+3r^4u^2$$
$$4(x^2+y^2)-r^2 = 3u^2$$
$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3 = 27(u^3)^2$$

und folglich, weil $u^3 = r^2y$ ist:

$$\{4(x^2+y^2)-r^2\}^3 = 27r^4y^2$$

eine Gleichung des sechsten Grades.

20. Die in (17.) und (19.) betrachteten Brennlinien haben verschiedene merkwürdige Eigenschaften, von denen wir jetzt einige beweisen wollen, indem wir mit dem in (17.) betrachteten Falle, wo der strahlende Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises liegt, beginnen. Nach (17.) ist

$$\frac{u}{t} = \frac{3y}{3x-r} = \frac{y}{x-\frac{1}{3}r}\,.$$

$\frac{u}{t}$ ist die trigonometrische Tangente des von der Normale in dem Einfallspunkte (t, u) mit der Axe der x eingeschlossenen Winkels. Eben so leicht erhellet, daß $\frac{y}{x-\frac{1}{3}r}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen eine von dem entsprechenden Punkte (x, y) der Caustica nach einem um die Abscisse $+\frac{1}{3}r$ von dem Anfange der Coordinate entfernten Punkte in der Axe der x gezogene gerade Linie mit der Axe der x einschließt. Demnach giebt obige Gleichung folgenden Satz:

Für irgend einen strahlenden Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises und für einen beliebi-

gen Einfallspunkt construire man den einfallenden und zurückgeworfenen Strahl. Durch den strahlenden Punkt ziehe man einen Diameter, und nehme auf demselben einen festen Punkt an, welcher von dem strahlenden Punkte um zwei Drittheile dieses Diameters entfernt ist. Zieht man nun durch diesen festen Punkt mit der Normale in dem Einfallspunkte eine Parallele, so wird deren Durchschnittspunkt mit dem reflectirten Strahle ein Punkt der Caustica seyn.

Man hat hierin ein leichtes Mittel zur Construction der Caustica durch Punkte. Da der reflectirte Strahl die Caustica jederzeit berührt, so ergiebt sich aus obigem Satze auch eine leichte Methode durch einen gegebenen Punkt der Caustica an dieselbe eine Berührende zu ziehen. Man zieht nämlich von dem Berührungspunkte nach dem festen Punkte eine gerade Linie, und mit dieser durch den Mittelpunkt des Kreises einen parallelen Radius; so wird dessen Endpunkt ein zweiter Punkt der gesuchten Berührenden seyn.

21. Die Länge des einfallenden Strahls sey $= Q$, die Länge des von der Caustica begränzten Strahls $= Q'$; so ist

$$Q = \sqrt{(t+r)^2 + u^2},\ Q' = \sqrt{(x-t)^2 + (y-u)^2}.$$

Aber nach (17.)

$$t^2 + u^2 = r^2,\ r(3x - r) = 2t(r-t),\ 3ry = 2u(r-t);$$

$$x = \frac{2t(r-t) + r^2}{3r},\ y = \frac{2u(r-t)}{3r};$$

$$x - t = \frac{r^2 - t(r+2t)}{3r},\ y - u = -\frac{u(r+2t)}{3r};$$

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = \frac{r^4 - 2r^2t(r+2t) + r^2(r+2t)^2}{(3r)^2}$$

$$= \frac{r^4 + r^3(r+2t)}{9r^2} = \frac{2r(r+t)}{9};$$

$$(t+r)^2 + u^2 = t^2 + u^2 + r^2 + 2rt = 2r(r+t).$$

Also

$$Q = \sqrt{2r(r+t)},\ Q' = \tfrac{1}{3}\sqrt{2r(r+t)},$$

d. i. $Q' = \frac{1}{3} Q$, woraus sich ein neues sehr einfaches Mittel die Caustica durch Punkte zu beschreiben, ergiebt. Verbände man dieses Mittel mit dem in (20.) angegebenen, so würde man die Caustica selbst beschreiben können, ohne die reflectirten Strahlen zu ziehen.

22. Um die Caustica zu rectificiren, differentiire man die Gleichungen

$$t^2 + u^2 = r^2,\ r(3x - r) = 2t(r-t),\ 3ry = 2u(r-t),$$

aus denen die Gleichung der Caustica durch Elimination von t, u erhalten wird, in Bezug auf t, indem man u, x, y als von t abhängig betrachtet. Dies giebt

$$t + u\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ 3r\frac{\partial x}{\partial t} = 2(r-2t)$$

$$3r\frac{\partial y}{\partial t} = 2(r-t)\frac{\partial u}{\partial t} - 2u\,.$$

Folglich, wenn man die dritte durch die zweite dividirt, da bekanntlich $\frac{\partial y}{\partial t} : \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}$ ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(r-t)\frac{\partial u}{\partial t} - u}{r-2t},$$

und, wenn man für $\frac{\partial u}{\partial t}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung setzt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{(r-t)t + u^2}{u(r-2t)},$$

oder, wenn man u^2 mittelst der Gleichung $u^2 = r^2 - t^2$ eliminirt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{(r-t)(r+2t)}{u(r-2t)},$$

wobei zu bemerken, daß $r^2 - t^2 = (r-t)(r+t)$ ist. Also

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{(r-t)(r+2t)^2}{(r+t)(r-2t)^2}$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{2r^3}{(r+t)(r-2t)^2}\,.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\partial x = \frac{2(r-2t)}{3r}\partial t\,.$$

Also, wenn wir den Bogen der Caustica $= s$ setzen:

$$s = \int \partial x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int \frac{2(r-2t)\partial t}{3r}\sqrt{\frac{2r^3}{(r+t)(r-2t)^2}},$$

d. i. nach leichter Reduction:

$$s = \tfrac{2}{3}\int \partial t \sqrt{\frac{2r}{r+t}} = \frac{2\sqrt{2r}}{3}\int (r+t)^{-\frac{1}{2}}\partial t\,.$$

Setzt man nun $r + t = z$, $\partial t = \partial z$; so ist

$$\int (r+t)^{-\frac{1}{2}}\partial t = \int z^{-\frac{1}{2}}\partial z = 2z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{r+t}\,.$$

Also

$$s = \tfrac{4}{3}\sqrt{2r(r+t)} + \text{Const}\,.$$

Für $t = -r$, $u = o$ wird $x = -r$, $y = o$, so daß also, wie auch von selbst augenblicklich erhellet, der strahlende Punkt ein

Punkt der Caustica ist. Will man daher von demselben den Bogen rechnen, so muß $s=0$ werden, für $t=-r$. Dies giebt Const $=0$. Also

$$s = \tfrac{4}{3}\sqrt{2r(r+t)}$$

d. i. nach (21.)

$$s = 4Q' = \tfrac{4}{3}Q = Q + \tfrac{1}{3}Q = Q + Q',$$

woraus sich ein leicht in Worten auszusprechender Satz ergiebt, und zugleich erhellet, daß sich die Caustica geometrisch rectificiren läßt. Man übersieht leicht, daß die obige Rectificationsformel sich nur auf die eine Hälfte der Caustica erstreckt.

Ist der einfallende Strahl dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich, d. i. $Q=2r$, so ist $s=\frac{8}{3}r$. Dies ist offenbar die Länge der halben Caustica, da dieselbe augenscheinlich auf beiden Seiten des durch den strahlenden Punkt gehenden Diameters ganz auf gleiche Art liegt. Die Chorde dieser halben Caustica ist offenbar $= Q - Q' = 2r - \frac{2}{3}r = \frac{4}{3}r$. Also ist die halbe Caustica ihrer doppelten Chorde gleich. In dem von dem strahlenden Punkte um $\frac{4}{3}r$ entfernten Punkte auf dem durch den strahlenden Punkt gehenden Durchmesser hat die Caustica offenbar eine Spitze (point de rebroussement).

23. Die auf den reflectirten Strahlen orthogonale Transversale ist eine von der Caustica abgewickelte Linie. Für die Caustica durch Brechung ist die Gleichung dieser orthogonalen Transversale nach (12.):

$$4r^2\{(m^2x-n^2a)^2+(m^2y-n^2b)^2\}=\{m^2(x^2+y^2+r^2)-n^2(a^2+b^2+r^2)\}^2.$$

Also, indem man $m+n=0$, $m=-n$ setzt, die Gleichung einer der durch Abwickelung der Caustica durch Zurückwerfung erzeugten Linien:

$$4r^2\{(x-a)^2+(y-b)^2\} = \{(x^2+y^2)-(a^2+b^2)\}^2$$

$$4r^2\{x^2+y^2-2(ax+by)+a^2+b^2\} = \{(x^2+y^2)-(a^2+b^2)\}^2.$$

Folglich, wenn man den strahlenden Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises annimmt:

$$4r^2\{x^2+y^2+r^2-2(ax+by)\} = \{x^2+y^2-r^2\}^2$$

und für $a=-r$, $b=0$:

$$4r^2\{y^2+(x+r)^2\} = \{x^2+y^2-r^2\}^2.$$

Denken wir uns nun einen mit dem gegebenen Kreise concentrischen und mit dem Radius $3r$ beschriebenen Kreis, und nehmen den Punkt dieses Kreises, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $=+3r$ ist, als strahlenden Punkt an, so ist nach (17.) die Gleichung der Caustica durch Zurückwerfung für diesen Fall in Bezug auf das vorige Coordinatensystem:

$$4.9r^2\{9y^2+(-3x-3r)^2\}=\{9(x^2+y^2)-9r^2\}^2$$

d. i., wenn man mit 9.9 dividirt:

$$4r^2\{y^2+(x+r)^2\} = \{x^2+y^2-r^2\}^2.$$

Also ist immer die Caustica durch Zurückwerfung für einen strahlenden Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises die Evolute einer ganz ähnlichen, nur in umgekehrter Lage liegenden Caustica für einen dem gegebenen Kreise concentrischen, aber mit dem dreifachen Radius beschriebenen, Kreis.

Umgekehrt ist die Evolute der Caustica für einen strahlenden Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises eine ganz ähnliche, nur in umgekehrter Lage liegende Caustica für einen dem gegebenen Kreise concentrischen, aber mit einem dreimal kleinern Radius beschriebenen, Kreis. Der strahlende Punkt für die Evolute ist die Spitze der gegebenen Caustica (22.).

24. Wir wollen jetzt die Spitze der Caustica als Anfang der Coordinaten annehmen, und die Polargleichung derselben suchen. Die Abscisse der Spitze der Caustica ist $= \frac{1}{3}r$; also braucht man in der Gleichung

$$\{9(x^2+y^2)-r^2\}^2 = 4r^2\{9y^2+(3x-r)^2\}$$

der Caustica bloß $x+\frac{1}{3}r$ für x, oder $3x+r$ für $3x$ zu setzen, wenn die Spitze als Anfang der Coordinaten angenommen werden soll. Dadurch erhält man leicht die Gleichung:

$$x^2+y^2+\tfrac{2}{3}rx = \pm\tfrac{2}{3}r\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $r=3\alpha$ setzen:

$$x^2+y^2+2\alpha x = \pm 2\alpha\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Für die polaren Coordinaten φ, ϱ in Bezug auf die Spitze der Caustica als Pol ist

$$x=\varrho\cos\varphi,\ y=\varrho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\varrho^2\,.$$

Also

$$\varrho+2\alpha\cos\varphi = \pm 2\alpha\,,$$

welches die Polargleichung der Caustica ist.

Beschreibt man mit dem Halbmesser $\alpha=\frac{1}{3}r$ einen dem gegebenen concentrischen Kreis, so ist dessen Gleichung in Bezug auf die Spitze der Caustica als Anfang der Coordinaten:

$$x^2+y^2+2\alpha x = 0\,,$$

und folglich die Polargleichung dieses Kreises:

$$\varrho'+2\alpha\cos\varphi = 0\,.$$

Also

$$\varrho-\varrho' = \pm 2\alpha,\ \varrho=\varrho'\pm 2\alpha\,.$$

Demnach ist der Radius vector der Caustica immer dem Radius vector des mit dem Radius $\frac{1}{3}r$ um den Mitttelpunkt des gegebenen Kreises beschriebenen Kreises gleich, wenn man denselben um den Durchmesser dieses Kreises vermehrt und vermin-

dert. Die Spitze der Caustica ist als Pol angenommen.

Man übersieht leicht, daß sich hieraus ebenfalls eine leichte Construction der Caustica ergiebt; auch ist klar, daß alle durch die Spitze gehenden Chorden der Caustica eine constante Größe haben, nämlich alle zwei Drittheilen des Durchmessers des gegebenen Kreises gleich sind, weil offenbar jede solche Chorde $= 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha = \frac{4}{3}r = \frac{2}{3}.2r$ ist.

25. Die Caustica hat noch die merkwürdige Eigenschaft, daß sie eine Epicycloide ist, welches sich auf folgende Art beweisen läßt. Ein mit dem zurückwerfenden Kreise concentrischer Kreis, welcher mit dem Radius $\alpha = \frac{1}{3}r$ beschrieben ist, werde als Basis angenommen. Der erzeugende Kreis sey mit demselben Radius beschrieben. Bei'm Anfange der Bewegung berühre der erzeugende Kreis die Basis in dem Punkte, dessen Coordinaten $x = + a$, $y = 0$ sind. Für irgend eine Lage des erzeugenden Kreises seyen x, y die Coordinaten des beschreibenden Punktes, x', y' die Coordinaten des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises; so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$x'^2 + y'^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$$
$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \alpha^2 ,$$

wobei man zu bemerken hat, daß der Mittelpunkt der Basis der Anfang der Coordinaten ist. Denkt man sich die Punkte (x', y') und (x, y) durch eine gerade Linie verbunden, so schließt dieselbe mit der Axe der x nach der Seite der positiven x einen Winkel ein, dessen trigonometrische Tangente

$$= \frac{y-y'}{x-x'}$$

ist. Dieser Winkel ist der Außenwinkel des Dreiecks CAC' (Fig. 6.), welches nach der Natur der Bewegung, wie leicht erhellet, ein gleichschenkliges Dreieck seyn muß. Die trigonometrische Tangente eines der Winkel an der Grundlinie dieses Dreiecks ist

$$= \frac{y'}{x'} .$$

Folglich ist

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{2\frac{y'}{x'}}{1-\left(\frac{y'}{x'}\right)^2} = \frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}$$

$$2x'y'(x-x') = (y-y')(x'^2-y'^2) .$$

Aus dieser Gleichung, und aus den Gleichungen

$$x'^2 + y'^2 = 4\alpha^2$$
$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \alpha^2 .$$

muß man x', y' eliminiren. Aus der ersten und dritten Gleichung findet man leicht:

$$y - y' = \pm \frac{2\alpha x' y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Man überzeugt sich aber sogleich, daß $y - y'$ und $x' y'$ stets entgegengesetzte Zeichen haben (s. Fig. 6.), und muß daher in obiger Gleichung das untere Zeichen nehmen, so daß also, wenn man zugleich $x - x'$ aus der Gleichung

$$2x' y' (x - x') = (y - y')(x'^2 - y'^2)$$

bestimmt,

$$x - x' = -\frac{\alpha (x'^2 - y'^2)}{x'^2 + y'^2},\ y - y' = -\frac{2\alpha x' y'}{x'^2 + y'^2},$$

oder

$$x' - x = \frac{x'^2 - y'^2}{4\alpha},\ y' - y = \frac{2x' y'}{4\alpha}$$

ist. Also auch

$$2\alpha(x - \alpha) = x'(2\alpha - x'),\ 2\alpha y = y'(2\alpha - x'),$$

woraus durch Division:

$$\frac{y}{x - \alpha} = \frac{y'}{x'},\ y' = \frac{x' y}{x - \alpha}.$$

Setzt man diesen Werth von y' in die Gleichung $x'^2 + y'^2 = 4\alpha^2$; so erhält man:

$$x' = \frac{2\alpha(x - \alpha)}{\sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2}},\ y' = \frac{2\alpha y}{\sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2}}.$$

Folglich

$$2\alpha(x - \alpha) = \frac{2\alpha(x - \alpha)}{\sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2}} \cdot \left\{2\alpha - \frac{2\alpha(x - \alpha)}{\sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2}}\right\},$$

$$1 = \frac{2\alpha}{\sqrt{y^2 + (x - \alpha^2)}} - \frac{2\alpha(x - \alpha)}{y^2 + (x - \alpha)^2},$$

$$\frac{y^2 + x^2 - \alpha^2}{y^2 + (x - \alpha)^2} = \frac{2\alpha}{\sqrt{y^2 + (x - \alpha)^2}},\ (x^2 + y^2 - \alpha^2)^2 = 4\alpha^2 \{y^2 + (x - \alpha)^2\}$$

oder, wenn wir für α seinen Werth $\frac{1}{3}r$ setzen:

$$\{9(x^2 + y^2) - r^2\}^2 = 4r^2 \{9y^2 + (3x - r)^2\}$$

die Gleichung der Caustica (17.).

Also ist die Caustica eine Epicycloide. Die Basis ist ein dem zurückwerfenden Kreise concentrischer, mit dem Radius $\frac{1}{3}r$ beschriebener Kreis. Der erzeugende Kreis ist ein eben solcher Kreis. Die Spitze der Caustica ist der Anfangspunkt der Bewegung des erzeugenden Kreises.

26. Auf ähnliche Art wollen wir nun auch die Haupteigenschaften der Caustica für parallele Strahlen betrachten. Die Gleichung dieser Linie ist nach (19.)

$$\{4(x^2 + y^2) - r^2\}^3 = 27r^4 y^2.$$

Die Axe der x ist den einfallenden Strahlen parallel, und der Mittelpunkt des zurückwerfenden Kreises ist wieder der Anfang der Coordinaten. Daß die Curve auf beiden Seiten der Axe der x auf gleiche Art liegt, fällt sogleich in die Augen. Eben so leicht erhellet auch aus der obigen Gleichung, daß die Curve auch auf beiden Seiten der Axe der y ganz auf gleiche Art liegt.

Die Länge der reflectirten Strahlen sey $= Q'$; so ist

$$Q' = \sqrt{(x-t)^2 + (y-u)^2}$$

d. i., weil $t^2 + u^2 = r^2$ ist:

$$Q' = \sqrt{x^2 + y^2 - 2(tx + uy) + r^2}.$$

Aber (19.)

$$x = \frac{t(r^2 + 2u^2)}{2r^2},\ y = \frac{u^3}{r^2}.$$

Also

$$tx + uy = \frac{t^2(r^2 + 2u^2) + 2u^4}{2r^2} = \frac{t^2 + 2u^2}{2},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2(r^4 + 4r^2u^2 + 4u^4) + 4u^6}{4r^4} = \frac{r^2t^2 + 4t^2u^2 + 4u^4}{4r^2}$$

$$= \frac{r^2t^2 + 4u^2(t^2 + u^2)}{4r^2} = \frac{t^2 + 4u^2}{4},$$

$$Q' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 3t^2 - 4u^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4t^2 - 3t^2} = \tfrac{1}{2}t = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - u^2}.$$

Der reflectirte Strahl ist also immer der halben Abscisse des Einfallspunktes gleich, welches ein leichtes Mittel zur Construction der Caustica an die Hand giebt. Für $y = 0$ wird $x = \pm\tfrac{1}{2}r$, und man überzeugt sich leicht aus der Construction der Caustica, daß sie in jedem dieser Punkte eine Spitze hat.

Da nach (19.)

$$r^2(2x - t) = 2tu^2,\ r^2y = u^3$$

ist; so folgt durch Division:

$$\frac{y}{2x - t} = \frac{u}{2t},\ \frac{y}{x - \tfrac{1}{2}t} = \frac{u}{t}.$$

Also

$$\frac{u}{t} = \frac{y}{x - Q'}.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich, daß die durch irgend einen Punkt der Caustica mit der Normale des entsprechenden Einfallspunktes gezogene Parallele die Axe der x in einem Punkte schneidet, dessen Entfernung vom Mittelpunkte des zurückwerfenden Kreises der Länge des entsprechenden zurückgeworfenen Strahls gleich ist.

27. Wir gehen nun wieder zur Rectification der Caustica für parallele Strahlen über. Nach (19.) ist

$$2r^2x = t(r^2+2u^2),\ r^2y = u^3\ .$$

Also, wenn man nach t differentiirt:

$$2r^2\frac{\partial x}{\partial t} = r^2+2u^2+4tu\frac{\partial u}{\partial t},\ r^2\frac{\partial y}{\partial t} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial t}\ .$$

Aber, wegen der Gleichung $t^2+u^2=r^2$:

$$t+u\frac{\partial u}{\partial t}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{t}{u}\ ,$$

und demnach:

$$2r^2\frac{\partial x}{\partial t} = r^2+2u^2-4t^2,\ r^2\frac{\partial y}{\partial t} = -3tu\ ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{6tu}{r^2+2u^2-4t^2} = -\frac{6tu}{3(u^2-t^2)} = -\frac{2tu}{u^2-t^2},$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{(u^2-t^2)^2+4t^2u^2}{(u^2-t^2)^2} = \frac{(u^2+t^2)^2}{(u^2-t^2)^2} = \frac{r^4}{(u^2-t^2)^2},$$

$$s = \int\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int\frac{(r^2+2u^2-4t^2)\partial t}{2(u^2-t^2)} = \int\frac{3(u^2-t^2)\partial t}{2(u^2-t^2)}$$

$$= \int\tfrac{3}{2}\partial t = \tfrac{3}{2}t + \text{Const}\ .$$

Nimmt man die Bogen von der Axe der y oder u an, so ist offenbar $s=0$ für $t=0$, d. i. $\text{Const}=0$. Folglich unter dieser Voraussetzung

$$s = \tfrac{3}{2}t = t+\tfrac{1}{2}t = 2Q'+Q' = 3Q',$$

woraus leicht in Worten auszusprechende Sätze folgen. Man übersieht leicht, daß die Formel $s=\frac{3}{2}t$ sich nur auf den ersten Quadranten der Caustica erstreckt. Die ganze Länge eines solchen Quadranten ist $=\frac{3}{2}r$, die Länge der ganzen Caustica also $=4.\frac{3}{2}r = 6r = 3.2r$, d. i. dreimal so groß als der Durchmesser des zurückwerfenden Kreises.

28. Suchen wir nun auch die Evolute der Caustica zu bestimmen. Sind x′, y′ die Coordinaten der Evolute, so erhält man, wenn $\varphi(x,y)=0$ die Gleichung der gegebenen Curve bezeichnet, die Gleichung der Evolute, wenn man x, y aus den drei Gleichungen

$$\varphi(x,y)=0$$

$$x'-x+\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial^2 y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

$$y'-y-\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial^2 y}=0$$

eliminirt. Nach (27.) ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2tu}{u^2-t^2},$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial x^2}=\frac{r^4}{(u^2-t^2)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}.$$

Aber, da

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{t}{u}$$

ist:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}=-\frac{2(u^2-t^2)^2+8t^2u^2}{(u^2-t^2)^2.u}=-\frac{2(u^2+t^2)^2}{(u^2-t^2)^2.u}=-\frac{2r^4}{(u^2-t^2)^2.u}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{2r^2}{r^2+2u^2-4t^2}\ (27.)=\frac{2r^2}{3(u^2-t^2)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{4r^6}{3(u^2-t^2)^3.u}$$

$$\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial^2 y}=\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial^2 y}=-\frac{3u(u^2-t^2)}{4r^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial^2 y}=\frac{6tu^2}{4r^2}=\frac{3tu^2}{2r^2}$$

$$x'-\frac{t(r^2+2u^2)}{2r^2}+\frac{3tu^2}{2r^2}=x'-\frac{t(r^2-u^2)}{2r^2}=x'-\frac{t^3}{2r^2}=0$$

$$y'-\frac{u^3}{r^2}+\frac{3u(u^2-t^2)}{4r^2}=y'-\frac{u(r^2+2t^2)}{4r^2}=0.$$

Man muß also jetzt aus den Gleichungen

$$x'=\frac{t^3}{2r^2},\ y'=\frac{u(r^2+2t^2)}{4r^2},\ t^2+u^2=r^2$$

t und u eliminiren. Zunächst ist

$$x'^2+y'^2=\frac{4t^4(t^2+u^2)+u^2r^4+4u^2t^2r^2}{16r^4}$$

$$=\frac{4t^2(t^2+u^2)+u^2r^2}{16r^2}=\frac{4t^2+u^2}{16}=\frac{3t^2+r^2}{16}$$

$$4(x'^2+y'^2)-(\tfrac{1}{2}r)^2=\tfrac{3}{4}t^2$$

$$\{4(x'^2+y'^2)-(\tfrac{1}{2}r)^2\}^3=\frac{27}{2^4}\left(\frac{t^3}{2}\right)^2=27\left(\frac{r}{2}\right)^4x'^2.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung der Caustica (26.); so wird man sogleich auf folgenden Satz geführt:

Die Evolute der Caustica für parallele Strahlen ist eine dieser Caustica ganz ähnliche Curve; sie ist eine Caustica für parallele Strahlen in Bezug auf einen zurückwerfenden Kreis, welcher dem gegebenen zurückwerfenden Kreise concentrisch, aber nur mit einem halb so großen Radius beschrieben ist. Auch sind bei der Evolute der gegebenen Cau-

stica die Strahlen nicht, wie bei letzterer, der Axe der x, sondern der Axe der y parallel, immer in Bezug auf ein und dasselbe Coordinatensystem.

Umgekehrt ist demnach auch jede Caustica durch Zurückwerfung für parallele Strahlen bei'm Kreise die Evolute einer ganz ähnlichen Curve für einen mit dem gegebenen concentrischen, aber mit einem doppelt so großen Radius beschriebenen Kreis. Die Strahlen bei beiden Brennlinien sind auf einander senkrecht.

29. Suchen wir jetzt die Gleichung einer Epicycloide, welche von einem Punkte in der Peripherie eines mit dem Radius α beschriebenen Kreises beschrieben wird, wenn die Basis ein mit dem Radius 2α beschriebener Kreis ist. Der Mittelpunkt der Basis sey der Anfang der Coordinaten. Für irgend eine Lage des erzeugenden Kreises seyen x, y die Coordinaten des beschreibenden Punktes, x', y' die Coordinaten des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises; so ist

$$x'^2 + y'^2 = 9\alpha^2$$
$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \alpha^2 .$$

Denkt man sich die Punkte (x, y) und (x', y') durch eine gerade Linie verbunden; so schließt dieselbe mit der Axe der x nach der Seite der positiven x hin einen Winkel ein, dessen trigonometrische Tangente

$$= \frac{y-y'}{x-x'}$$

ist. Nach der Natur der Aufgabe ist in dem Dreieck CAC' (Fig. 6.) der Winkel bei C' offenbar doppelt so groß als der Winkel bei C. Die trigonometrische Tengente des letztern ist

$$= \frac{y'}{x'} ;$$

also die trigonometrische Tangente des erstern

$$= \frac{2\frac{y'}{x'}}{1-\left(\frac{y'}{x'}\right)^2} = \frac{2x'y'}{x'^2-y'^2} .$$

Der Außenwinkel des genannten Dreiecks bei A ist der Summe der Winkel bei C und C' gleich. Folglich

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{\frac{y'}{x'} + \frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}}{1-\frac{y'}{x'}\cdot\frac{2x'y'}{x'^2-y'^2}} = \frac{y'(3x'^2-y'^2)}{x'(x'^2-3y'^2)} .$$

Aus dieser Gleichung und den beiden ersten obigen Gleichungen muß man nun x', y' eliminiren. Aus den beiden Gleichungen

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \alpha^2$$

$$x'(y-y')(x'^2-3y'^2) = y'(x-x')(3x'^2-y'^2)$$

findet man leicht:

$$x'-x = \frac{\alpha x'(x'^2-3y'^2)}{\sqrt{x'^2(x'^2-3y'^2)^2 + y'^2(3x'^2-y'^2)^2}}$$

$$y'-y = \frac{\alpha y'(3x'^2-y'^2)}{\sqrt{x'^2(x'^2-3y'^2)^2 + y'^2(3x'^2-y'^2)^2}}$$

unter der Voraussetzung, daß die Quadratwurzel positiv genommen wird, weshalb man diese Brüche $= x'-x$, $y'-y$, nicht $= x-x'$, $y-y'$ gesetzt hat. Das Quadrat des gemeinschaftlichen Nenners ist

$$= x'^6 + 3x'^4y'^2 + 3x'^2y'^4 + y'^6 = (x'^2+y'^2)^3$$

$$= 9^3 . \alpha^6 = 27^2 . \alpha^6 .$$

Folglich

$$27\alpha^2(x'-x) = x'(x'^2-3y'^2)$$

$$27\alpha^2(y'-y) = y'(3x'^2-y'^2) ,$$

oder

$$27\alpha^2(x'-x) = x'(x'^2+y'^2-4y'^2) = 9\alpha^2x'-4x'y'^2$$

$$27\alpha^2(y'-y) = y'(27\alpha^2-4y'^2) = 27\alpha^2y'-4y'^3$$

d. i.

$$9\alpha^2(3x-2x') = 4x'y'^2$$

$$27\alpha^2y = 4y'^3 ,$$

woraus durch Division:

$$\frac{3y}{3x-2x'} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{y}{x-\frac{2}{3}x'} = \frac{y'}{x'} .$$

Ferner ist

$$27\alpha^2x = 2x'(9\alpha^2+2y'^2) .$$

Also

$$27^2 . \alpha^4(x^2+y^2) = 4x'^2(9\alpha^2+2y'^2)^2 + 16y'^6$$

$$= 4(9\alpha^2-y'^2)(9\alpha^2+2y'^2)^2 + 16y'^6 ,$$

woraus nach gehöriger Entwickelung:

$$3(x^2+y^2-4\alpha^2) = 4y'^2$$

$$27(x^2+y^2-4\alpha^2)^3 = 4.(4y'^3)^2$$

d. i., wegen der Gleichung

$$27\alpha^2y = 4y'^3 :$$

$$(x^2+y^2-4\alpha^2)^3 = 108\alpha^4y^2 ,$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit 4^3 multiplicirt:

$$\{4(x^2+y^2) - (4\alpha)^2\}^3 = 27(4\alpha)^4y^2 .$$

Die in Rede stehende Epicycloide ist also eine Caustica durch Reflexion für parallele Strahlen bei einem zurückwerfenden Kreise, dessen Radius $= 4\alpha$ ist.

Wie dieser Satz sich umkehren läßt, fällt sogleich in die Augen.

30. Für die Caustica durch Brechung in Bezug auf den Kreis wollen wir hier nur ein Paar besondere Fälle betrachten, für welche sich die Gleichungen aus dem Vorhergehenden leicht ableiten lassen, da allgemeine Untersuchungen in zu große Weitläufigkeit führen würden. Der Mittelpunkt des brechenden Kreises sey auch hier der Anfang der Coordinaten; die Coordinaten des strahlenden Punktes seyen x', y', und das Brechungsverhältniß sey, wie gewöhnlich, $= m : n$. Die Gleichung einer orthogonalen Transversale der gebrochenen Strahlen ist nach (12.):

$$4m^2n^2r^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\}=\{m^2(x^2+y^2-r^2)-n^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2.$$

Die Caustica durch Brechung ist die Evolute dieser Curve.

Mit dem gegebenen Kreise concentrisch sey mit dem Radius R ein neuer Kreis beschrieben, und X, Y seyen jetzt die Coordinaten des strahlenden Punktes. Wollte man nun aus obiger Gleichung für diesen Kreis und diesen strahlenden Punkt die Gleichung einer orthogonalen Transversale der von dem Kreise zurückgeworfenen Strahlen ableiten; so müßte man $x' = X$, $y' = Y$, $r = R$, $m = -n$ setzen, woraus sich ergiebt:

$$4R^2\{(x-X)^2+(y-Y)^2\}=(x^2+y^2-X^2-Y^2)^2.$$

Liegt der strahlende Punkt, dessen Coordinaten x', y' sind, in der Peripherie des mit dem Halbmesser r beschriebenen brechenden Kreises; so ist

$$x'^2+y'^2=r^2,$$

und folglich die Gleichung der orthogonalen Transversale der gebrochenen Strahlen:

$$4\left(\frac{n}{m}r\right)^2\{(x-x')^2+(y-y')^2\}=(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2.$$

Um diese Gleichung mit der obigen Gleichung der orthogonalen Transversale der zurückgeworfenen Strahlen zu vergleichen, setze man:

$$x'=X,\ y'=Y,\ \frac{n}{m}r=R.$$

Dies giebt folgenden merkwürdigen Lehrsatz:

Die Caustica durch Brechung für den Kreis und für einen strahlenden Punkt in dessen Peripherie ist die Caustica durch Zurückwerfung in Bezug auf denselben strahlenden Punkt und für einen zurückwerfenden Kreis, welcher dem erstern concentrisch und mit einem Radius beschrieben ist, den man erhält, wenn man den Radius des erstern Kreises mit dem Verhältniß des Sinus des Brechungswinkels zu dem Sinus des Einfallswinkels multiplicirt.

Man schließt hier nämlich von der Identität der durch Abwickelung erzeugten Linien auf die Identität der Evoluten. Nach

(18.) ist also die gesuchte Gleichung der Caustica durch Brechung für einen in der Peripherie des brechenden Kreises liegenden Punkt:

$$\{4m^2(x'^2+y'^2)(x^2+y^2) - n^2r^2[(x+x')^2 + (y+y')^2]\}^3$$
$$= 27m^2n^4r^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-x'^2-y'^2)^2 ,$$

oder

$$r^2\{4m^2(x^2+y^2) - n^2[x^2+y^2+r^2+2(xx'+yy')]\}^3$$
$$= 27m^2n^4(xy'-x'y)^2(x^2+y^2-r^2)^2 .$$

31. Ferner verhalte sich die Entfernung des strahlenden Punktes von dem Mittelpunkte des brechenden Kreises zu dem Radius dieses Kreises wie der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels, d. i.

$$\frac{r^2}{x'^2+y'^2} = \frac{n^2}{m^2},\ m^2 = n^2\frac{x'^2+y'^2}{r^2} .$$

Setzt man diesen Werth von m^2 in die Gleichung der orthogonalen Transversale der gebrochenen Strahlen in (30.); so wird diese Gleichung:

$$4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}$$
$$= \{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2-r^2)-r^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2 .$$

$$4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}$$
$$= \{[(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4]-2r^2(x'^2+y'^2-r^2)\}^2$$

oder, wenn man das zweite Glied wie ein Quadrat einer zweitheiligen Größe entwickelt:

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4\}^2$$
$$= 4r^2(x'^2+y'^2-r^2)[(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4]-4r^4(x'^2+y'^2-r^2)^2$$
$$+ 4r^4(x'^2+y'^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2\}$$

oder, wenn man das zweite Glied entwickelt und nach r ordnet:

$$\{(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)-r^4\}^2$$
$$=4r^2\{(x'^2+y'^2)^2(x^2+y^2)-2r^2(x'^2+y'^2)(xx'+yy')+r^4(x'^2+y'^2)\}$$
$$= 4r^2\{[(x'^2+y'^2)x-r^2x]^2+[(x'^2+y'^2)y-r^2y]^2\}$$

$$\left\{(x^2+y^2)-\frac{r^4}{x'^2+y'^2}\right\}^2=4r^2\left\{\left[x-\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right]^2+\left[y-\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2\right\}$$

$$\left\{x^2+y^2-\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2-\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2\right\}^2$$
$$= 4r^2\left\{\left[x-\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right]^2+\left[y-\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2\right\} .$$

Setzt man

$$\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2} = X,\ \frac{r^2y'}{x'^2+y'^2} = Y,\ r = R ;$$

so wird diese Gleichung:

$$(x^2+y^2-X^2-Y^2)^2 = 4R^2\{(x-X)^2+(y-Y)^2\}$$

und fällt also mit der Gleichung der orthogonalen Transversale für zurückgeworfene Strahlen in (30.) zusammen. Dies führt auf folgenden Lehrsatz:

Für den Kreis und für einen strahlenden Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises sich zu dessen Radius verhält, wie der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels, ist die Caustica durch Brechung einerlei mit der Caustica durch Zurückwerfung für denselben Kreis und für einen strahlenden Punkt, dessen Coordinaten

$$\frac{r^2 x'}{x^2 + y^2} = \frac{n^2}{m^2} x', \quad \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{n^2}{m^2} y'$$

sind, wenn x', y' die Coordinaten des gegebenen strahlenden Punktes bezeichnen, und r der Halbmesser des gegebenen Keises ist.

Nach (18.) ist also die Caustica durch Brechung in dem vorliegenden Falle:

$$\{4n^4 (x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2) - r^2 [(m^2 x + n^2 x')^2 + (m^2 y + n^2 y')^2]\}^3$$
$$= 27 n^4 r^4 (xy' - x'y)^2 \{m^4 (x^2 + y^2) - n^4 (x'^2 + y'^2)\}^2 .$$

Allgemeinere Untersuchungen über die Brennlinien durch Brechung bei'm Kreise hier mitzutheilen, verbietet der beschränkte Raum um so mehr, da die allgemeinern Gleichungen sehr complicirt ausfallen müssen. Es sind nun noch einige Sätze über Brennlinien im Allgemeinen zurück, zu denen wir jetzt übergehen wollen.

32. Wir gehen dabei von einem geometrischen Problem aus, welches auch in anderer Rücksicht wichtig und merkwürdig ist.

Sey die Gleichung

$$V' = \varphi(x, y) = 0$$

einer Curve gegeben. Man soll die Gleichung einer Curve finden, welche alle die geraden Linien berührt, die mit den Normalen der gegebenen Curve nach einem gegebenen Gesetze fortschreitende Winkel einschließen, wobei wir annehmen können, daß dieses Gesetz durch die Gleichung

$$V'' = \varphi'(x, \Theta) = 0$$

ausgedrückt sey, wenn die in Rede stehenden Winkel überhaupt durch Θ bezeichnet werden.

Die Coordinaten der gesuchten Curve seyen X, Y. Die Gleichung der Normale der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y) ist:

$$z - y = - \frac{\partial x}{\partial y}(u - x)$$

Der Winkel dieser Normale mit der Axe der x sey $= \omega$; so ist

$$\tang \omega = -\frac{\partial x}{\partial y}.$$

Die Berührende der gesuchten Curve in dem Punkte (X, Y) schließe mit der Axe der x den Winkel ω' ein; so ist, wie leicht erhellet:

$$\omega' = \omega - \Theta$$

$$\tang \omega' = \frac{\tang \omega - \tang \Theta}{1 + \tang \omega \tang \Theta} = \frac{\cos \Theta + y' \sin \Theta}{\sin \Theta - y' \cos \Theta},$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y'$$

setzen. Die Gleichung der in Rede stehenden Berührenden, welche nach den Bedingungen der Aufgabe auch durch den Punkt (x, y) geht, ist:

$$z - y = (u - x) \tang \omega',$$

woraus man mittelst des Obigen leicht findet:

$$z = \frac{\cos \Theta + y' \sin \Theta}{\sin \Theta - y' \cos \Theta} u + \frac{(\sin \Theta - y' \cos \Theta) y - (\cos \Theta + y' \sin \Theta) x}{\sin \Theta - y' \cos \Theta}$$

oder der Kürze wegen:

$$z = vu + v', \quad z - vu - v' = 0,$$

wo v eine Function von Θ, y', dagegen v' eine Function von x, y, Θ, y' ist, wenn wir diese Größen als unabhängige veränderliche Größen betrachten. Die Gleichung unserer Berührenden ist aber auch, weil dieselbe durch den Punkt (X, Y) geht:

$$z = \frac{\partial Y}{\partial X} u + Y - X \frac{\partial Y}{\partial X}.$$

Aus der Vergleichung beider Gleichungen der Berührenden ergiebt sich also:

$$v = \frac{\partial Y}{\partial X}, \quad v' = Y - X \frac{\partial Y}{\partial X}.$$

Nimmt man nun x als unabhängige veränderliche Größe an, und differentiirt in Bezug auf dieselbe; so wird

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = -X \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Also

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = -X \frac{\partial v}{\partial x}, \quad -X \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0.$$

Da die Berührende durch den Punkt (X, Y) geht; so ist nach dem Obigen

$$V = Y - vX - v' = 0.$$

Differentiirt man, indem man X und Y als constant betrachtet, die Function V in Bezug auf x; so erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial x}.$$

Also ist nach dem Obigen unter derselben Bedingung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 .$$

Weil aber V von x, y, Θ, y' abhängt; so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)\cdot\frac{\partial y'}{\partial x},$$

wo die eingeschlossenen Differentialquotienten partielle Differentialquotienten bezeichnen. Wir haben also folgende Gleichungen:

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad V'' = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial V''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V''}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 .$$

Differentiirt man die fünfte von Neuem, so erhält man die sieben Gleichungen:

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad V'' = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 V'}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial V''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V''}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$$

aus denen man die sechs Größen

$$x, y, \Theta, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}$$

eliminiren kann, welches die gesuchte Gleichung zwischen X, Y giebt.

Man könnte indeß auch $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ aus der Gleichung $V' = 0$ entwickeln, und den gefundenen Ausdruck für y' in die Function V setzen, welche nun bloß von x, y, Θ abhängen wird. Dann ist die gesuchte Gleichung das Resultat der Elimination der Größen

$$x, y, \Theta, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

aus den sechs Gleichungen:

$$V = 0,\ V' = 0,\ V'' = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial V''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V''}{\partial \Theta}\right)\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0\,.$$

Ist Θ eine constante Größe, so werden diese Gleichungen:

$$V = 0,\ V' = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,,$$

aus denen man nun bloß

$$x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x}$$

eliminiren muß.

Die Function V ist nach dem Obigen

$$Y - \frac{\cos\Theta + y'\sin\Theta}{\sin\Theta - y'\cos\Theta}X - \frac{(\sin\Theta - y'\cos\Theta)y - (\cos\Theta + y'\sin\Theta)x}{\sin\Theta - y'\cos\Theta}.$$

Durch partielle Differentiation erhält man:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\cos\Theta + y'\sin\Theta}{\sin\Theta - y'\cos\Theta},\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -1\,;$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \Theta}\right) = \frac{1 + y'^2}{(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^2}(X - x)\,,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = -\frac{X - x}{(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^2}.$$

Hieraus erhält man mittelst des Obigen leicht folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(1 + y'^2)\cos\Theta(\sin\Theta - y'\cos\Theta)\\ +\ (1 + y'^2)(X - x)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} - (X - x)\dfrac{\partial y'}{\partial x}\end{array}\right\} = 0\,.$$

Da nun auch

$$Y - y = \frac{\cos\Theta + y'\sin\Theta}{\sin\Theta - y'\cos\Theta}(X - x)$$

ist; so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y''$$

gesetzt wird:

$$X - x = \frac{\cos\Theta(\sin\Theta - y'\cos\Theta)(1 + y'^2)}{y'' - (1 + y'^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}}\,,$$

$$Y - y = \frac{\cos\Theta(\cos\Theta + y'\sin\Theta)(1 + y'^2)}{y'' - (1 + y'^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}}.$$

Folglich

$$(X-x)^2+(Y-y)^2=\frac{\cos\Theta^2(1+y'^2)^3}{\left\{y''-(1+y'^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right\}^2}.$$

Setzen wir nun die Entfernung der Punkte (x, y) und (X, Y) von einander $=\varrho$; so ist

$$\varrho=\frac{\cos\Theta(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''-(1+y'^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}},$$

wo die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann. Man nennt zuweilen ϱ den schiefen Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y), weil, wie augenblicklich erhellet, ϱ der Krümmungshalbmesser r der gegebenen Curve in dem Punkte (x, y) wird, wenn man $\Theta=0$ setzt. Da nun bekanntlich

$$r=-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=-\frac{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''}$$

ist, wo man die Quadratwurzel immer positiv nimmt, so wollen wir, unter derselben Voraussetzung, damit der Ausdruck von ϱ in den Ausdruck von r übergehe, wenn man $\Theta=0$ nimmt, auch

$$\varrho=-\frac{\cos\Theta(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''-(1+y'^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}}$$

setzen. Der Grund, warum man dem Ausdrucke des Krümmungshalbmessers das negative Zeichen giebt, wird hier als bekannt vorausgesetzt.

Es erhellet leicht, daß

$$\varrho=\frac{\cos\Theta\left\{-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right\}}{1+\left\{-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right\}\cdot\frac{\frac{\partial\Theta}{\partial x}}{\sqrt{1+y'^2}}}$$

ist. Dies giebt, weil

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{\partial s}{\partial x}$$

ist, die merkwürdige Relation:

$$\varrho=\frac{r\cos\Theta}{1+r\frac{\partial\Theta}{\partial s}},\quad \frac{1}{r}+\frac{\partial\Theta}{\partial s}=\frac{\cos\Theta}{\varrho}.$$

33. Man kann noch andere merkwürdige Relationen finden. Es ist nämlich

$$r = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{1+y'^2}{y''}\sqrt{1+y'^2} = -\frac{1+y'^2}{y''}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = -r\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Aber nach (32.)

$$X = x + \frac{\cos\Theta(\sin\Theta - y'\cos\Theta)\cdot\frac{1+y'^2}{y''}}{1-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}},$$

$$Y = y + \frac{\cos\Theta(\cos\Theta + y'\sin\Theta)\cdot\frac{1+y'^2}{y''}}{1-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}}.$$

Also

$$X = x - \frac{r\cos\Theta(\sin\Theta - y'\cos\Theta)}{\frac{\partial s}{\partial x} + r\frac{\partial\Theta}{\partial x}},$$

$$Y = y - \frac{r\cos\Theta(\cos\Theta + y'\sin\Theta)}{\frac{\partial s}{\partial x} + r\frac{\partial\Theta}{\partial x}}.$$

Aus der letzten Gleichung in (32.) findet man:

$$r = \frac{\varrho}{\cos\Theta - \varrho\frac{\partial\Theta}{\partial s}}.$$

Folglich nach gehöriger Substitution:

$$X = x - \frac{\varrho(\sin\Theta - y'\cos\Theta)}{\frac{\partial s}{\partial x}},$$

$$Y = y - \frac{\varrho(\cos\Theta + y'\sin\Theta)}{\frac{\partial s}{\partial x}}.$$

34. Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = Y',$$

so ist nach (32.)

$$Y' = \frac{\cos\Theta + y'\sin\Theta}{\sin\Theta - y'\cos\Theta},$$

woraus leicht erhalten wird:

$$y' = -\frac{\cos\Theta - Y'\sin\Theta}{\sin\Theta + Y'\cos\Theta}$$

und hieraus ferner:

$$1 + Y'^2 = \frac{1+y'^2}{(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^2},$$

$$1 + y'^2 = \frac{1+Y'^2}{(\sin\Theta + Y'\cos\Theta)^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial S}{\partial X} = \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\sin\Theta - y'\cos\Theta}, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\frac{\partial S}{\partial X}}{\sin\Theta + Y'\cos\Theta},$$

woraus sich ferner, wenn man nur diese Brüche umkehrt, leicht ergiebt:

$$\frac{\partial X}{\partial S} = \sin\Theta\frac{\partial x}{\partial s} - \cos\Theta\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sin\Theta\frac{\partial X}{\partial S} + \cos\Theta\frac{\partial Y}{\partial S}.$$

Ferner findet man aus diesen Gleichungen durch Elimination:

$$\frac{\partial X}{\partial S} = \sin\Theta\frac{\partial x}{\partial s} - \cos\Theta\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = \cos\Theta\frac{\partial x}{\partial s} + \sin\Theta\frac{\partial y}{\partial s},$$

so wie umgekehrt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sin\Theta\frac{\partial X}{\partial S} + \cos\Theta\frac{\partial Y}{\partial S},$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\cos\Theta\frac{\partial X}{\partial S} + \sin\Theta\frac{\partial Y}{\partial S}.$$

Endlich ist

$$Y' = \frac{\cot\Theta + y'}{1 - y'\cot\Theta}.$$

Folglich

$$\cot\Theta = \frac{Y' - y'}{1 + y'Y'}$$

$$1 + Y'\cot\Theta = \frac{1 + Y'^2}{1 + y'Y'} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2}{1 + y'Y'}$$

$$1 - y'\cot\Theta = \frac{1 + y'^2}{1 + y'Y'} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}{1 + y'Y'}$$

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial X}}{1 + Y'\cot\Theta} = \frac{1 + y'Y'}{\frac{\partial S}{\partial X}}$$

$$\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{1 - y'\cot\Theta} = \frac{1 + y'Y'}{\frac{\partial s}{\partial x}}.$$

35. Bestimmt man $\frac{\partial s}{\partial x}$ aus den beiden letzten Gleichungen in (33.); so erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\varrho}{(Y-y)\cos\Theta + (X-x)\sin\Theta}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\varrho y'}{(Y-y)\sin\Theta - (X-x)\cos\Theta}$$

oder, wenn man die letzte Gleichung mit $\frac{\partial x}{\partial y}$ multiplicirt:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\varrho}{(Y-y)\cos\Theta + (X-x)\sin\Theta},$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\varrho}{(Y-y)\sin\Theta - (X-x)\cos\Theta}.$$

Bestimmt man hieraus $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, und setzt die entsprechenden Ausdrücke in die Gleichungen für $\frac{\partial X}{\partial S}$, $\frac{\partial Y}{\partial S}$ in (34.); so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{\partial X}{\partial S} = -\frac{X-x}{\varrho},\quad \frac{\partial Y}{\partial S} = -\frac{Y-y}{\varrho}.$$

Also

$$Y-y = (X-x)\frac{\partial Y}{\partial X}.$$

Differentiirt man nach x, so wird

$$\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} = (X-x)\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} - 1\right)\cdot\frac{\partial Y}{\partial X}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial X} - (X-x)\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Also

$$1+y'Y' = 1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 - (X-x)\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 - (X-x)\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2$$

erhält man aber sogleich:

$$\frac{\partial S}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}.$$

Also

$$1+y'Y' = \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 - (X-x)\frac{\partial S}{\partial X}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x},$$

$$\frac{1+y'Y'}{\frac{\partial S}{\partial X}} = \frac{\partial S}{\partial X} - (X-x)\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x},$$

und folglich nach (34.)

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial X}}{1+Y'\cot\Theta} = \frac{\partial S}{\partial X} - (X-x)\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Aber nach (34.)

$$\sin\Theta\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\sin\Theta\frac{\partial S}{\partial X}}{\sin\Theta+Y'\cos\Theta}=\frac{\frac{\partial S}{\partial X}}{1+Y'\cot\Theta}.$$

Folglich

$$\sin\Theta\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial X}-(X-x)\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Ferner ist

$$\varrho=-(X-x)\frac{\partial S}{\partial X}.$$

Folglich, wenn man differentiirt:

$$-\frac{\partial\varrho}{\partial x}=(X-x)\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\left(\frac{\partial X}{\partial x}-1\right)\cdot\frac{\partial S}{\partial X}$$

$$=\frac{\partial S}{\partial x}-\left\{\frac{\partial S}{\partial X}-(X-x)\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}\right\},$$

d. i. nach dem Obigen:

$$-\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial x}-\sin\Theta\frac{\partial s}{\partial x},$$

woraus sich die merkwürdige Relation:

$$\partial S=\sin\Theta\partial s-\partial\varrho$$

ergiebt.

36. Der Krümmungshalbmesser der dem System der Coordinaten X, Y entsprechenden Curve sey $=R$; so ist

$$R=-\frac{(1+Y'^2)^{\frac{3}{2}}}{Y''}.$$

Nach (35.) ist

$$\frac{\partial Y}{\partial X}-\frac{\partial y}{\partial x}=Y'-y'=(X-x)\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{Y'-y'}{X-x}.$$

Ferner ist auch

$$Y'-y'=\frac{\cos\Theta+y'\sin\Theta}{\sin\Theta-y'\cos\Theta}-y'=\frac{\cos\Theta(1+y'^2)}{\sin\Theta-y'\cos\Theta}$$

$$X-x=-\frac{\varrho(\sin\Theta-y'\cos\Theta)}{\frac{\partial s}{\partial x}}.$$

Also

$$\frac{Y'-y'}{X-x}=-\frac{\cos\Theta(1+y'^2)\frac{\partial s}{\partial x}}{\varrho(\sin\Theta-y'\cos\Theta)^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Nach (34.) ist

$$\frac{\partial S}{\partial X}=\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\sin\Theta-y'\cos\Theta},\quad \frac{\partial X}{\partial x}=(\sin\Theta-y'\cos\Theta)\frac{\partial S}{\partial s}.$$

Also

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = Y'' = -\frac{\cos\Theta(1+y'^2)\frac{\partial s}{\partial x}}{\varrho(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^3 \cdot \frac{\partial S}{\partial s}}.$$

Da nun nach (34.)

$$1 + Y'^2 = \frac{1+y^2}{(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^2}$$

ist; so ist

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^3} \cdot \frac{\varrho(\sin\Theta - y'\cos\Theta)^3 \cdot \frac{\partial S}{\partial s}}{\cos\Theta(1+y'^2)\frac{\partial s}{\partial x}},$$

$$R = \frac{\varrho\frac{\partial S}{\partial s}}{\cos\Theta}, \quad R\cos\Theta = \varrho\frac{\partial S}{\partial s}.$$

Wir haben also jetzt die folgenden drei Relationen gefunden:

$$\frac{1}{r} + \frac{\partial\Theta}{\partial s} = \frac{\cos\Theta}{\varrho},$$

$$\partial S = \sin\Theta\,\partial s - \partial\varrho,$$

$$R\cos\Theta = \varrho\frac{\partial S}{\partial s}.$$

Aus diesen Relationen lassen sich manche andere ableiten, von denen wir nur noch folgende bemerken:

$$\frac{1}{r} + \frac{\partial\Theta}{\partial s} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial S}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial S} = \frac{\varrho}{R}\tang\Theta - 1,$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial S} = \frac{r\sin\Theta}{R\left(1 + r\frac{\partial\Theta}{\partial s}\right)} - 1,$$

$$\varrho = \frac{r\cos\Theta}{1 + r\frac{\partial\Theta}{\partial S}} = \frac{R\cos\Theta}{\sin\Theta - \frac{\partial\varrho}{\partial s}}.$$

37. Von den bewiesenen Sätzen läßt sich nun folgende Anwendung auf die Theorie der Brennlinien machen, wobei wir den Einfallswinkel stets durch Θ, den entsprechenden Refractions- oder Reflexionswinkel durch Θ', das Brechungsverhältniß durch $\lambda : \lambda'$ bezeichnen wollen, so daß also immer

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'},$$

und für die Zurückwerfung $\lambda = -\lambda'$, $\lambda + \lambda' = 0$ ist. Der Krümmungshalbmesser der gegebenen zurückwerfenden oder brechenden Curve sey $= r$. Wir wollen annehmen, daß die einfallenden Strahlen alle eine gewisse Curve berühren. Die Curve,

welche sämmtliche gebrochene oder zurückgeworfene Strahlen berührt, ist die Caustica der gegebenen brechenden oder zurückwerfenden Curve. Die den Winkeln Θ und Θ' entsprechenden schiefen Krümmungshalbmesser dieser Curve sind die Längen des einfallenden und gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahls, und sollen durch ϱ und ϱ' bezeichnet werden. Dann haben wir nach (36.)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial s} = \frac{\cos\Theta}{\varrho} - \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial\Theta'}{\partial s} = \frac{\cos\Theta'}{\varrho'} - \frac{1}{r}.$$

Differentiirt man die Gleichung

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'} = \mathrm{Const}$$

in Bezug auf s als veränderliche Größe; so erhält man:

$$\sin\Theta'\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial s} - \sin\Theta\cos\Theta'\frac{\partial\Theta'}{\partial s} = 0,$$

und, wenn man die vorher gefundenen Werthe von $\frac{\partial\Theta}{\partial s}$, $\frac{\partial\Theta'}{\partial s}$ substituirt:

$$\frac{\sin\Theta\cos\Theta'^2}{\varrho'} - \frac{\sin\Theta'\cos\Theta^2}{\varrho} = \frac{\sin(\Theta - \Theta')}{r}.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn die einfallenden Strahlen alle auf einer gegebenen Curve senkrecht sind, weil sie dann alle von der Evolute dieser Curve berührt werden. Die letztere Curve hat man dann an die Stelle der ersten zu setzen. Strahlen, welche alle aus einem Punkte ausgehen, sind sämmtlich auf einem aus diesem Punkte als Mittelpunkt beschriebenen Kreise normal, und die Evolute dieses Kreises reducirt sich auf seinen Mittelpunkt. Daher gilt obige Gleichung auch für Strahlen, die aus einem Punkte ausgehen, und ϱ ist in diesem Falle die Entfernung des Einfallspunktes von dem strahlenden Punkte. Petit hat diese Gleichung für den Fall eines brechenden oder zurückwerfenden Kreises und eines strahlenden Punktes zuerst bewiesen in der Correspondance sur l'Ecole polytechnique. T. II. p. 353. Obige Erweiterung ist von C. Lambert (Ingenieur des mines) in den Annales de Mathém. T. XX. p. 101. mitgetheilt. Auch Sturm hat sich mit dem Beweise dieser Gleichungen beschäftigt, a. a. O. XVI. p. 238. Die Gleichung dient vortrefflich zur Zeichnung der Caustica durch Punkte, besonders in dem Falle eines strahlenden Punktes. Für irgend einen einfallenden Strahl ist nämlich Θ gegeben, und Θ' wird daraus leicht mittelst der Gleichung

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

berechnet. Bestimmt man nun nach bekannten Methoden den Krümmungshalbmesser r der gegebenen Curve, so läßt sich, weil auch ϱ, als die Entfernung des Einfallspunktes von dem strah-

lenden Punkte gegeben ist, ϱ' mittelst der in Rede stehenden Gleichung berechnen. Durch Θ' und ϱ' ist Lage und Länge des gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahls bestimmt, folglich ein Punkt der Caustica gefunden. Daß sich auf diese Weise beliebig viele Punkte der Caustica finden lassen, fällt in die Augen. Bringt man die Gleichung auf die Form

$$\frac{\sin\Theta\cos\Theta'^2}{\varrho'} - \frac{\sin\Theta'\cos\Theta^2}{\varrho} = \frac{\sin\Theta\cos\Theta' - \cos\Theta\sin\Theta'}{r}$$

und setzt

$$\sin\Theta' = \frac{\lambda'}{\lambda}\sin\Theta\,;$$

so wird:

$$\frac{\lambda\cos\Theta'^2}{\varrho'} - \frac{\lambda'\cos\Theta^2}{\varrho} = \frac{\lambda\cos\Theta' - \lambda'\cos\Theta}{r}\,,$$

unter welcher Form die Gleichung auch zur Rechnung bequem ist. Ist der Einfallswinkel $\Theta = 0$, so ist auch $\sin\Theta' = 0$, $\Theta' = 0$. Also ist

$$\frac{\lambda}{\varrho'} - \frac{\lambda'}{\varrho} = \frac{\lambda - \lambda'}{r}\,,$$

wenn der einfallende Strahl ϱ auf der gegebenen Curve normal ist. Ist im Fall eines strahlenden Punktes dieser Punkt unendlich weit von der gegebenen Curve entfernt, so ist

$$\frac{\lambda'}{\varrho} = 0\,,\ \frac{\lambda}{\varrho'} = \frac{\lambda - \lambda'}{r}\,.$$

Ist die brechende oder zurückwerfende Curve eine gerade Linie, so ist

$$r = \infty\,,\ \frac{\lambda - \lambda'}{r} = 0\,,\ \frac{\lambda}{\varrho'} = \frac{\lambda'}{\varrho},\ \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\lambda'}{\lambda}\,.$$

38. Wir wollen uns jetzt den allgemeinsten Fall denken wenn Strahlen auf eine gegebene Curve A unter gewissen nach einem gegebenen Gesetze fortschreitenden Winkeln auffallen, und von mehrern andern gegebenen Curven B, C, D, E, ... gebrochen oder zurückgeworfen werden, indem wir uns die Aufgabe stellen, die Caustica für die letzten gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahlen zu bestimmen. Nach (32.) — (36.) bestimmt man die Curve, von welcher die einfallenden Strahlen sämmtlich berührt werden, wobei natürlich die Gleichung der Curve A als gegeben vorausgesetzt wird. Hieraus bestimme man nun nach den obigen Methoden die Caustica A' der Curve A, von welcher die gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahlen, d. i. die an der Curve B einfallenden Strahlen, sämmtlich berührt werden, so daß man nun auch die Caustica B' der Curve B, hieraus wieder eben so die Caustica C' der Curve C, und, auf diese Weise fortschreitend, offenbar die Caustica der letzten gebrochenen Strahlen bestimmen kann. Sind z. B. nur zwei Curven A, gegeben; so mögen r_1, ϱ_1, ϱ'_1 dasselbe in Bezug auf

Curve B bezeichnen, was r, ϱ, ϱ' in Bezug auf die Curve A bezeichnen. Die Brechungsverhältnisse für beide Curven seyen

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'}=\frac{\lambda}{\lambda'},\ \frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_1'}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1'}.$$

Nach (37.) ist:

$$\frac{\lambda\cos\Theta'^2}{\varrho'}-\frac{\lambda'\cos\Theta^2}{\varrho}=\frac{\lambda\cos\Theta'-\lambda'\cos\Theta}{r},$$

$$\frac{\lambda_1\cos\Theta'_1{}^2}{\varrho'_1}-\frac{\lambda'_1\cos\Theta_1{}^2}{\varrho_1}=\frac{\lambda_1\cos\Theta'_1-\lambda'_1\cos\Theta_1}{r_1},$$

woraus:

$$\varrho'=\frac{\lambda\cos\Theta'^2}{\dfrac{\lambda'\cos\Theta^2}{\varrho}+\dfrac{\lambda\cos\Theta'-\lambda'\cos\Theta}{r}},$$

$$\varrho_1=\frac{\lambda'_1\cos\Theta_1{}^2}{\dfrac{\lambda_1\cos\Theta'_1{}^2}{\varrho'_1}-\dfrac{\lambda_1\cos\Theta'_1-\lambda'_1\cos\Theta_1}{r_1}}.$$

Die Strahlen ϱ' und ϱ_1 bilden aber, wie augenblicklich erhellet, eine gerade Linie, in welcher die beiden Einfallspunkte liegen. Bezeichnen wir also die Entfernung dieser beiden Einfallspunkte von einander durch e, so ist offenbar $e=\varrho_1\pm\varrho'$, d. i.

$$e=\frac{\lambda'_1\cos\Theta_1{}^2}{\dfrac{\lambda_1\cos\Theta'_1{}^2}{\varrho'_1}-\dfrac{\lambda_1\cos\Theta'_1-\lambda'_1\cos\Theta_1}{r_1}}\pm\frac{\lambda\cos\Theta'^2}{\dfrac{\lambda'\cos\Theta^2}{\varrho}+\dfrac{\lambda\cos\Theta'-\lambda'\cos\Theta}{r}}.$$

Nimmt man in dieser Formel ϱ'_1 als die unbekannte Größe an, so ist klar, daß man mittelst derselben für eine doppelte Brechung oder Zurückwerfung sogleich die Caustica der zweiten Curve B construiren kann, ohne zuerst die Caustica der ersten Curve A zu zeichnen. Schließen die beiden gegebenen Curven ein brechendes Medium ein, welches auf beiden Seiten von einem andern homogenen brechenden Medio umgeben wird; so ist mit vorstehender Gleichung die Gleichung

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'}=\frac{\sin\Theta'_1}{\sin\Theta_1}=\frac{\lambda}{\lambda'}$$

zu verbinden, und die Caustica nach doppelter Brechung wird sich immer leicht construiren lassen, mit völliger geometrischer Genauigkeit, da im Gegentheil in der Optik gewöhnlich die Dicke des von den beiden gegebenen Curven eingeschlossenen brechenden Mediums vernachlässigt wird.

39. Nach (36.) ist ferner

$$\partial S+\partial\varrho=\sin\Theta\,\partial s,\ \partial S'+\partial\varrho'=\sin\Theta'\,\partial s;$$

$$\frac{\partial S+\partial\varrho}{\partial S'+\partial\varrho'}=\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'}=\frac{\lambda}{\lambda'},$$

$$\frac{\partial S+\partial\varrho}{\lambda}=\frac{\partial S'+\partial\varrho'}{\lambda'},$$

woraus durch Integration:

$$\frac{S+\varrho}{\lambda}-\frac{S'+\varrho'}{\lambda'}=C,$$

wenn C eine Constante bezeichnet.

Läßt man die Bogen S und S' in zwei zusammengehörenden Punkten der entsprechenden Curven anfangen, so daß also, wenn $S=0$ ist, auch $S'=0$ ist, und bezeichnet die den Anfangspunkten entsprechenden Werthe von ϱ und ϱ' durch ϱ_0 und ϱ'_0; so ist

$$\frac{\varrho_0}{\lambda}-\frac{\varrho'_0}{\lambda'}=C,$$

$$\frac{S+\varrho}{\lambda}-\frac{S'+\varrho'}{\lambda'}=\frac{\varrho_0}{\lambda}-\frac{\varrho'_0}{\lambda'},$$

$$\frac{S+\varrho-\varrho_0}{\lambda}=\frac{S'+\varrho'-\varrho'_0}{\lambda'}.$$

Sollen die Strahlen von einem Punkte ausgehen, und die brechende oder zurückwerfende Curve so beschaffen seyn, daß nach der Brechung oder Zurückwerfung die Strahlen sich auch wieder in einem Punkte vereinigen; so muß man in vorstehender Gleichung allgemein $S=S'=0$ setzen, wodurch dieselbe in

$$\frac{\varrho-\varrho_0}{\lambda}=\frac{\varrho'-\varrho'_0}{\lambda'},$$

oder

$$\frac{\varrho}{\lambda}-\frac{\varrho'}{\lambda'}=\frac{\varrho_0}{\lambda}-\frac{\varrho'_0}{\lambda'}=\text{Const}$$

übergeht. ϱ und ϱ' sind hier die Entfernungen des Einfallspunktes von dem strahlenden Punkte und dem Vereinigungspunkte der Strahlen. Die allgemeine Bedingung also, welcher Curven, die durch Brechung oder Zurückwerfung Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, wieder in einem Punkte vereinigen, genügen müssen, wird durch die Gleichung

$$\frac{\varrho}{\lambda}-\frac{\varrho'}{\lambda'}=\text{Const}$$

dargestellt. Solche Curven hat Quetelet, der ihre Natur in verschiedenen Abhandlungen näher untersucht hat, aplanetische Linien (lignes aplanètiques) genannt. Die allgemeine Gleichung derselben ist mittelst obiger Bedingungsgleichung leicht gefunden. Sind nämlich respective a, b und α, β die Coordinaten des strahlenden Punktes und des Vereinigungspunktes der Strahlen, so wie x, y die Coordinaten irgend eines Punktes der aplanetischen Linie; so folgt aus obiger Bedingung augenblicklich:

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\lambda}-\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}{\lambda'}=\text{Const},$$

und man übersieht leicht, daß diese Gleichung, wenn man sie rational machen wollte, den vierten Grad erreichen würde. Zu weitern Untersuchungen über diesen Gegenstand fehlt hier der

Raum. M. s. Quetelet Correspondance mathématique et physique an verschiedenen Orten.

Für den Fall der Zurückwerfung hat man in allen bisherigen Formeln nur $\Theta' = -\Theta$, $\sin\Theta' = -\sin\Theta$, $\cos\Theta' = \cos\Theta$, $\lambda' = -\lambda$ zu setzen, wodurch man leicht erhält:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r\cos\Theta},$$

eine Gleichung, welche, auf ähnliche Weise wie vorher, eine leichte Construction jeder Caustica durch Zurückwerfung an die Hand giebt. Für einen senkrecht einfallenden Strahl ist $\Theta = 0$, also

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{r}.$$

Für parallele Strahlen ist $\varrho = \infty$, $\frac{1}{\varrho} = 0$. Also

$$\varrho' = \frac{r}{2}.$$

Ist die zurückwerfende Linie eine gerade Linie; so ist $r = \infty$, $\frac{2}{r} = 0$. Also

$$\varrho' = -\varrho.$$

Für die aplanetische Linie durch Zurückwerfung ist

$$\varrho + \varrho' = \text{Const},$$

so daß also diese Linie immer eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, je nachdem ϱ und ϱ' gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

40. Den in den Artikeln Brennlinie und Diacaustica mitgetheilten historischen und literarischen Bemerkungen fügen wir noch folgende bei.

Die allgemeinen Sätze, von denen wir in diesem Artikel ausgegangen sind, hat in Bezug auf ebene Curven zuerst Quetelet in den Mémoires de l'Académie royale des sciences de Bruxelles. T. III. p. 89. bewiesen. Gergonne und Sarrus haben dieselben nachher auch auf krumme Flächen erweitert (Annales de Math. T. XVI. p. 1.). Einen elementaren Beweis des Fundamentalsatzes (2.) in Bezug auf ebene Curven gab zuerst Timmermanns in der von Quetelet herausgegebenen Correspondance mathém. et physique. T. I. p. 336., nachdem schon vorher Dupin in seinen Applications de Géométrie p. 195. einen elementaren Beweis desselben Satzes in Bezug auf krumme Flächen für den Fall der Reflexion gegeben hatte. Auf krumme Flächen ausgedehnt ward der Beweis von Timmermanns durch Gergonne in den Annales de Mathém. T. XVI. p. 307. Anwendungen der allgemeinen Sätze auf besondere Fälle bei ebenen Curven gab Gergonne in den Annales de Mathém. T. XVI. p. 65. Mit der Bestimmung der Caustica des Kreises durch Reflexion und Refraction hat sich

vorzüglich Thomas de St. Laurent beschäftigt in drei Abhandlungen in den Annales de Mathém. T. XVII. p. 1. p. 128. T. XVIII. p. 1. Im Falle einer Brechung hat Gergonne diese Untersuchungen zu vereinfachen gesucht ebend. T. XVIII. p. 49. Die allgemeine Gleichung der Caustica durch Refraction bei'm Kreise ist noch nicht gefunden. Noch gehören einige Abhandlungen von Gergonne und Sturm hierher, in den Annales de Mathém. T. V. p. 283. T. XI. p. 229. T. XIV. p. 1. T. XIV. p. 129. T. XV. p. 205. T. XV. p. 345. T. XVI. p. 247. Ferner s. m. noch eine Dissertation von Aug. de la Rive über die Brennlinien (Genf. 1823. 4.), die ich mir nicht habe verschaffen können. Früher als alle diese Geometer hat vorzüglich Malus sich mit diesen Untersuchungen beschäftigt (Journal de l'école polytechnique. T. VII. Mémoires présentés à l'Institut. Vol. II. Paris. 1811.). Seine Rechnungen sind aber, wie Gergonne (Annales de Mathém. T. XVI. p. 313.) urtheilt, nicht frei von Fehlern. Einiges findet man auch in Littrow's Analytischer Geometrie. Wien. 1823. S. 347. und in Brandes Lehrbuch der höhern Geometrie. Leipzig. 1822. §. 467. §. 468. §. 487. Der Arbeiten von Petit und C. Lambert ist schon oben Erwähnung geschehen. Zu den von Klügel mitgetheilten ältern Nachrichten bemerke ich nur noch, daß auch Carré sich mit den Brennlinien beschäftigt hat (Mém. de Paris. 1703.). Von der Brennlinie der Parabel hat Fuß gehandelt (Nov. Act. Petrop. T. VIII.). Tschirnhausens Auflösung ward als falsch erkannt von Cassini, Mariotte und de la Hire, als Commissarien der französischen Akademie. Ueber die Caustica der logarithmischen Spirale s. m. den Art. Spirale (61.) und (68.).

Cissoide. Raupach Disquisitio analytica circa cissoidem. P. I. St. Petersb. (Halle.) 1806.

Combinatorische Analysis. Jungius, die Lehre von den Permutationen und Combinationen, dem binomischen Lehrsatze, der Theorie der unmöglichen Größen und der Gleichungen. Berlin. 1806.

Schweins, Analysis, combinatorisch bearbeitet. Heidelberg. 1820.

Köcher, Combinationslehre mit Anwendung auf Analysis. Leipzig. 1822.

Sommer, System der topisch-arithmetischen Combinationslehre. Braunschweig. 1822.

Spehr, vollständiger Lehrbegriff der reinen Combinationslehre mit Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig. 1824.

v. Ettinghausen, combinatorische Analysis. Wien. 1826.

Einen trefflichen Abriß der combinatorischen Analysis enthält auch

Thibauts Grundriß der allgemeinen Arithmetik, vorzüglich in seiner neuesten Ausgabe. Auch s. m.

Brandes, Vorbereitungen zur höheren Analysis. Leipzig. 1820., worin ein recht guter für erste Anfänger berechneter Abriß der Combinationslehre und combinatorischen Analysis gegeben ist, und

Prasse, Institutiones analyticae. Lips. 1813., worin der combinatorische Theil sehr gut behandelt ist, wie sich von dem Verfasser, der zu den ersten und eifrigsten Bearbeitern der combinatorischen Analysis gehörte, schon von selbst erwarten läßt.

Viele treffliche einzelne Untersuchungen enthalten:

Oettinger, Differenzial- und Differenzen-Calcul. Mainz. 1831., und

Oettinger, Forschungen in dem Gebiete der höheren Analysis. Heidelberg. 1831.

Auch s. m.

Scherk, mathematische Abhandlungen. Berlin. 1825., vorzüglich die zweite Abhandlung über die allgemeine Auflösung der Gleichungen des ersten Grades, und die dritte Abhandlung über die Anzahl der Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen zu einer gegebenen Classe, so wie an verschiedenen einzelnen Stellen manche hierher gehörende scharfsinnige Bemerkungen.

Noch verdienen als einzelne Abhandlungen erwähnt zu werden:

Ohm, de elevatione serierum infinitarum secundi ordinis ad potestatem exponentis indeterm. dissert. Erl. 1811.

Sauer, Potenziirung, Multiplication und Division der Reihen aller Ordnungen. Halle. 1823.

Ueber das Wesen und den Nutzen dieses wichtigen Theils der Analysis glaube ich nichts Besseres sagen zu können, als was von dem verewigten Begründer dieses Wörterbuchs, der selbst zu den ersten und glücklichsten Bearbeitern der combinatorischen Analysis gehörte, darüber schon im ersten Theile beigebracht worden ist. Merkwürdig ist die Erscheinung, daß die für die Theorie der Analysis unstreitig sehr wichtige Erfindung Hindenburgs die Gränzen Deutschlands nur wenig überschritten, und namentlich bei unsern westlichen Nachbaren im Ganzen nur geringe Beachtung gefunden hat. Liegt der Grund dieser Erscheinung zum Theil wohl in dem mehr auf das wirklich praktisch Anwendbare gerichteten Sinne unserer Nachbaren im Westen,

so trägt doch gewiß auch die bei aller ihrer Schönheit complicirte Charakteristik keinen geringen Theil der Schuld, und es scheint uns daher Noth zu thun, in den Lehrbüchern auf möglichste Vereinfachung der Bezeichnung zu sehen, wozu z. B. Thibaut in dem oben angeführten Werke schon einen trefflichen Anfang gemacht hat. Nur ist freilich auf der andern Seite sehr zu wünschen, daß, wie dies früher bei der Hindenburgischen Charakteristik der Fall war, eine Bezeichnung möglichst allgemein eingeführt und befolgt werde. Wer soll aber hier der Gesetzgeber seyn!

Combinatorisches Integral. Man denke sich einmal einen beliebigen analytischen Ausdruck, und unterscheide in demselben zwei Arten von Größen. Die eine Art bezeichne man durch lateinische, die andere Art durch griechische Buchstaben. Kommen nun z. B. in demselben die drei griechischen Buchstaben γ, ε, η, auf beliebige Art mit lateinischen Buchstaben verbunden, vor, und man setzt statt der gedachten griechischen Buchstaben das erste, zweite, dritte Element irgend einer Complexion von drei Elementen oder einer Ternion, so heißt, wenn diese Arbeit mit allen Complexionen einer dritten combinatorischen Klasse vorgenommen wird, das Aggregat aller so entstehenden Größen ein combinatorisches Integral.

Sey z. B. der gedachte analytische Ausdruck

$$(a^{\gamma} + \varepsilon z)^{\eta},$$

und die combinatorische Klasse die dritte Variations-Klasse zur Summe 2 mit Zulassung des Elements 0. Nimmt man die Substitution auf die angezeigte Art vor, so entstehen aus

den Complexionen der Klasse	folgende Glieder
0, 0, 2	$(a^0 + 0z)^2$
0, 1, 1	$(a^0 + 1z)^1$
0, 2, 0	$(a^0 + 2z)^0$
1, 0, 1	$(a^1 + 0z)^1$
1, 1, 0	$(a^1 + 1z)^0$
2, 0, 0	$(a^2 + 0z)^0$

und die Summe aller Glieder zur Rechten ist das combinatorische Integral oder Aggregat.

Der analytische Ausdruck, in dem die griechischen Buchstaben vorkommen, heißt das allgemeine Glied, die griechischen Buchstaben heißen die veränderlichen, die übrigen Buchstaben die beständigen Größen.

Es giebt so viele Gattungen combinatorischer Integrale, als sich combinatorische Klassen denken lassen, worauf die Entwickelung des combinatorischen Integrals gegründet wird. Die Gattung combinatorischer Integrale, bei welcher die combinatorische

Klasse alle Auflösungen darstellt, welche einer oder mehrerer Gleichungen dergestalt Genüge leisten, daß für die unbekannten oder veränderlichen Größen bloß Null oder positive ganze Zahlen gesetzt werden dürfen, ist vorzüglich wichtig und bisher am meisten untersucht worden. Das oben betrachtete combinatorische Integral gehört zu dieser Gattung, indem die dritte Variations-Klasse zur Summe 2, mit Zulassung des Elements 0, auf welche sich dessen Entwickelung gründete, alle Auflösungen darstellt, welche der Buchstabengleichung

$$\gamma + \varepsilon + \eta = 2$$

so Genüge leisten, daß statt der unbekannten oder veränderlichen Größen γ, ε, η bloß Null und positive ganze Zahlen gesetzt werden dürfen.

Zur vollständigen Bestimmung eines combinatorischen Integrals der letztern Gattung gehören 1) das allgemeine Glied; 2) das Verzeichniß der Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets, welche die veränderlichen Größen bezeichnen; 3) die Bedingungsgleichungen. Daher werden combinatorische Integrale dieser Gattung gewöhnlich so bezeichnet, daß man 1) dem allgemeinen Gliede das Zeichen $\int$ als Zeichen der Summe zur Linken vorsetzt, und an den obersten Punkt zur Rechten einen Horizontalstrich anhängt, der so weit reicht, als das allgemeine Glied; 2) unter das allgemeine Glied das Verzeichniß der veränderlichen Größen in Klammern eingeschlossen, und 3) noch tiefer die Bedingungsgleichungen setzt. Das obige combinatorische Integral würde sich hiernach z. B. auf folgende Art schreiben lassen:

$$\int\overline{(a^{\gamma} + \varepsilon z)^{\eta}}$$
$$(\gamma, \varepsilon, \eta)$$
$$\gamma + \varepsilon + \eta = 2.$$

Wenn alle vorkommenden kleinen griechischen Buchstaben veränderliche Größen bezeichnen, so kann man auch der Kürze wegen die zweite Zeile ganz weglassen, und obiges Integral z. B. bloß so schreiben:

$$\int\overline{(a^{\gamma} + \varepsilon z)^{\eta}}$$
$$\gamma + \varepsilon + \eta = 2;$$

bedeuten aber bloß einige der vorkommenden griechischen Buchstaben veränderliche Größen, so darf die zweite Zeile nie weggelassen werden.

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen fällt ganz der unbestimmten Analytik und den beiden sogenannten Discerptionsproblemen in der combinatorischen Analytik anheim. Mit den combinatorischen Integralen selbst lassen sich aber verschiedene Veränderungen und Verwandlungen, gewisse Operationen vor-

nehmen, wodurch ein gewisser eigenthümlicher Calcul entspringt, den man den combinatorischen Integral-Calcul genannt hat. Die erste Idee und der Name combinatorischer Integrale rührt von Kramp her (Hindenburgs Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlungen. Erste Sammlung. S. 91—122, zweite Samml. S. 341—368). Eine eigentliche Theorie dieser combinatorischen Ausdrücke hat aber zuerst H. A. Rothe aufgestellt, in der mit vieler Deutlichkeit abgefaßten Schrift: Theorie der combinatorischen Integrale von H. A. Rothe. Nürnberg. 1820. Zugleich hat Rothe in dieser Schrift die Anwendung dieser Theorie auf verschiedene Untersuchungen der Analysis gezeigt. Den Liebhabern der combinatorischen Analysis ist daher das Studium dieser Schrift sehr zu empfehlen. Wo es auf eine einfache Bezeichnung sehr complicirter Ausdrücke ankommt, werden die combinatorischen Integrale häufig mit großem Vortheil angewandt.

Complanation, Ebnung. Man vergleiche hierbei vorzüglich den Artikel Stereometrie im vierten Bande.

Bolzano, die drei Probleme der Rectification, Complanation und Cubatur streng erwiesen. Leipzig. 1817.

Complementum decadicum, gleichbedeutend mit: Arithmetisches Complement eines Logarithmen im Artikel Complement.

Conchoide. C. Witte, Conchoidis Nicomedeae aequatio et indoles. Gött. 1813.

Confokale Kegelschnitte sind Kegelschnitte, welche einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben. Die Erweiterung des Begriffs auf Flächen der zweiten Ordnung ist leicht.

Conische Flächen heißen alle diejenigen Flächen, welche von einer geraden Linie beschrieben werden, die, über eine gegebene beliebige krumme Linie im Raume hingleitend, bei dieser Bewegung immer durch ein und denselben Punkt, welcher die Spitze der Kegelfläche genannt wird, geht. Die gegebene krumme Linie heißt die Directrix; die sich bewegende gerade Linie, von welcher die conische Fläche beschrieben wird, mag die erzeugende Linie genannt werden.

1. Die Coordinaten des gegebenen Punktes, durch welchen die erzeugende Linie immer hindurch geht, seyen a, b, c; die Gleichungen der Directrix seyen

$$f(x, y, z) = 0, \; F(x, y, z) = 0.$$

Die Gleichungen der erzeugenden Linie in einer beliebigen Lage derselben seyen

$$x = \alpha z + \alpha', \; y = \beta z + \beta'.$$

Da die erzeugende Linie immer durch den Punkt (a, b, c) geht, so ist

$$a = \alpha c + \alpha', \; b = \beta c + \beta',$$

und folglich sind

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c)$$

die Gleichungen der erzeugenden Linie. Eigentlich sind dies aber die Gleichungen einer jeden durch den Punkt (a, b, c) gehenden geraden Linie im Raume, da doch die erzeugende Linie immer der Bedingung genügen muß, daß sie einen Punkt mit der Directrix gemein hat. Sind daher x', y', z' die Coordinaten dieses Punktes, so hat man die folgenden vier Gleichungen:

$$f(x', y', z') = 0, \quad F(x', y', z') = 0;$$
$$x' - a = \alpha(z' - c), \quad y' - b = \beta(z' - c).$$

Aus diesen Gleichungen kann man x', y', z' eliminiren, wodurch man eine Gleichung zwischen α, β und gegebenen Größen erhält, so daß also β eine bestimmte Function von α ist, wenn die durch die Gleichungen

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c)$$

charakterisirte gerade Linie in der conischen Fläche liegen soll. Man kann folglich

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

oder, weil

$$\alpha = \frac{x - a}{z - c}, \quad \beta = \frac{y - b}{z - c}$$

ist,

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right)$$

setzen, und dies ist also die gesuchte allgemeine Gleichung der conischen Flächen, welche man folglich erhält, wenn man aus den Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0;$$
$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c)$$

die Größen x, y, z eliminirt, und in der sich hieraus ergebenden Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$

$$\alpha = \frac{x - a}{z - c}, \quad \beta = \frac{y - b}{z - c}$$

setzt.

2. Ist nun zunächst die Directrix ein Kreis, so sind, wenn wir seinen Mittelpunkt als Anfang der Coordinaten, seine Ebene als Ebene der xy annimmt, seine Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0,$$

wenn r den Halbmesser bezeichnet. Um also die Gleichung der entsprechenden conischen Fläche zu finden, muß man nach dem Vorhergehenden zunächst aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0;$$
$$x - a = \alpha(z-c),\ y - b = \beta(z-c)$$

die Größen x, y, z eliminiren. Da z = 0 ist, so hat man bloß die drei Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2,\ x - a = -\alpha c,\ y - b = -\beta c$$

zu betrachten, aus denen man augenblicklich zwischen α und β die Gleichung

$$(a-\alpha c)^2 + (b-\beta c)^2 = r^2$$

erhält. Setzt man nun

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c},\ \beta = \frac{y-b}{z-c},$$

so wird die gesuchte Gleichung der conischen Fläche:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\dfrac{a(z-c) - \alpha(x-a)}{z-c}\right\}^2 \\ + \left\{\dfrac{b(z-c) - \beta(y-b)}{z-c}\right\}^2\end{array}\right\} = r^2.$$

Auch erhält man leicht durch Entwickelung der Quadrate:

$$c^2\alpha^2 - 2ac\alpha + c^2\beta^2 - 2bc\beta = r^2 - (a^2+b^2),$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l}c^2\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right)^2 - 2ac\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right) \\ + c^2\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)^2 - 2bc\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)\end{array}\right\} = r^2 - (a^2+b^2)$$

die Gleichung der conischen Fläche. Nimmt man die Spitze des Kegels, d. i. den Punkt (a, b, c), als Anfang der Coordinaten an, und eine durch diesen Punkt gelegte mit der Ebene der Directrix parallele Ebene als Ebene der xy, so muß man nach dem Artikel Coordinate i. d. Z. in obiger Gleichung respective x + a, y + b, z + c für x, y, z setzen. Dies giebt die Gleichung

$$c^2\left(\frac{x}{z}\right)^2 - 2ac\left(\frac{x}{z}\right) + c^2\left(\frac{y}{z}\right)^2 - 2bc\left(\frac{y}{z}\right) = r^2 - (a^2+b^2),$$

oder

$$(a^2+b^2-r^2)z^2 + c^2(x^2+y^2) - 2acxz - 2bcyz = 0$$

der conischen Fläche, wo nun −a, −b, −c die Coordinaten des Mittelpunkts der Directrix in Bezug auf das angenommene System sind, obgleich man auch, wie aus vorstehender Gleichung leicht erhellet, diese Coordinaten sich durch a, b, c selbst bezeichnet denken kann.

3. Für den geraden Kegel kann man die Gleichungen der Fläche auch auf folgende Art finden. Die Coordinaten der

Spitze seyen x', y', z' in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem. Die Gleichungen der Axe und der erzeugenden Linie in einer beliebigen Lage der letztern seyen

$$x = az + c,\quad y = bz + c';$$

und

$$x = a'z + c_1,\quad y = b'z + c'_1 .$$

Beide Linien gehen durch die Spitze. Folglich hat man

$$x' = az' + c,\quad y' = bz' + c';$$
$$x' = a'z' + c_1,\quad y' = b'z' + c'_1,$$

und demnach sind die Gleichungen der Axe und der erzeugenden Linie:

$$x - x' = a(z-z'),\quad y - y' = b(z-z'),$$

und

$$x - x' = a'(z-z'),\quad y - y' = b'(z-z') .$$

Der Winkel der erzeugenden Linie mit der Axe, welcher hier eine constante Größe ist, sey $= \Theta$; so ist nach allgemeinen Principien der analytischen Geometrie

$$\cos\Theta = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}.\sqrt{1+a'^2+b'^2}} .$$

Aber

$$a' = \frac{x-x'}{z-z'},\quad b' = \frac{y-y'}{z-z'};$$

folglich

$$\cos\Theta = \frac{1 + a\dfrac{x-x'}{z-z'} + b\dfrac{y-y'}{z-z'}}{\sqrt{1+a^2+b^2}.\sqrt{1 + \left(\dfrac{x-x'}{z-z'}\right)^2 + \left(\dfrac{y-y'}{z-z'}\right)^2}}$$

die gesuchte Gleichung der Fläche des geraden Kegels. Setzt man $\cos\Theta = M$, so läßt sich diese Gleichung leicht auf folgende Form bringen:

$$\{a(x-x') + b(y-y') + z-z'\}^2$$
$$= M^2(1+a^2+b^2)\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\} .$$

Für den Durchschnitt der Ebene der xy mit der Kegelfläche muß man $z = 0$ setzen. Dies giebt die Gleichung dieses Durchschnitts:

$$\{a(x-x') + b(y-y') - z'\}^2$$
$$= M^2(1+a^2+b^2)\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2\} .$$

4. Ist die Directrix eine Ellipse, deren Gleichungen

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2,\quad z = 0$$

sind, so muß man aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen

$$x - a = \alpha(z-c),\quad y - b = \beta(z-c)$$

wieder x, y, z eliminiren, und dann

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c},\quad \beta = \frac{y-b}{z-c}$$

setzen. Die Elimination von x, y, z giebt

$$a'^2(b-\beta c)^2 + b'^2(a-\alpha c)^2 = a'^2 b'^2 .$$

Folglich ist

$$\left.\begin{array}{l} a'^2\{b(z-c) - c(y-b)\}^2 \\ + b'^2\{a(z-c) - c(x-a)\}^2 \end{array}\right\} = a'^2 b'^2 (z-c)^2$$

die Gleichung der Kegelfläche mit elliptischer Directrix. Nimmt man die Spitze der Kegelfläche als Anfang der Coordinaten an, so wird ihre Gleichung

$$a'^2(bz-cy)^2 + b'^2(az-cx)^2 = a'^2 b'^2 z^2 .$$

Liegt die Spitze der Kegelfläche in der Axe der z, d. h. ist der entsprechende Kegel ein gerader, so ist $a = b = 0$, folglich

$$a'^2 c^2 y^2 + b'^2 c^2 x^2 = a'^2 b'^2 z^2 ,$$

oder, für $\frac{a'}{c} = m$, $\frac{b'}{c} = n$,

$$m^2 y^2 + n^2 x^2 = m^2 n^2 z^2$$

die Gleichung der Kegelfläche.

Conjointe, s. Regel und Kettenregel.

Constante Größe, s. Beständige Größe.

Continuirliche Functionen, s. Stetige Functionen i. d. Z.

Convergenz der Reihen. 1. Seyen

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots..$$

die auf einander folgenden Glieder einer reellen oder imaginären Reihe, deren allgemeines Glied, als Function des Index betrachtet, wir durch t_n bezeichnen. Die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe sey

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.. + t_{n-1} .$$

Wenn nun s_n sich einer bestimmten Gränze s desto mehr nähert, je größer n wird, und dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden kann; so heißt die Reihe convergent oder convergirend, und s heißt ihre Summe, welches man bekanntlich durch

$$s = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots..$$

bezeichnet. Nähert sich s_n keiner bestimmten Gränze, wenn n wächst; so heißt die Reihe divergent oder divergirend. Divergente Reihen haben, im eigentlichen Sinne des Worts, keine Summe, sondern sind bloß als analytische Größenformen zu betrachten, welche gewissen allgemeinen analytischen Bedingungen genügen, so wie z. B. die Binomial-Reihe

$$^nS = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

der Bedingung genügt, daß für jedes n und m

$$^nS.^mS = {}^{n+m}S$$

ist. Man hat daher auch zuweilen zwischen arithmetischen und analytischen Summen unterschieden (Reihe. 34.).

Soll also die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots..$$

convergent seyn; so muß die Differenz

$$s_{n+m} - s_n = t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots. + t_{n+m-1}$$

für jedes ganze positive m der Null sich fortwährend nähern, wenn n wächst, und muß der Null beliebig nahe gebracht werden können. Da dies auch für $m = 1$ gilt; so ist klar, daß, wenn eine Reihe convergiren soll, ihr allgemeines Glied t_n sich der Null fortwährend nähern muß, wenn n wächst, obgleich, wie wir sogleich sehen werden, diese Bedingung nicht allein hinreicht, um daraus die Convergenz einer Reihe schließen zu können.

Wir betrachten zunächst, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, bloß reelle Reihen, und wollen jetzt obige Begriffe an einigen Beispielen erläutern.

2. Eine der einfachsten und am häufigsten vorkommenden Reihen ist die geometrische Reihe

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots..$$

Wenn der absolute Werth x größer als die Einheit, oder $x = \pm 1$ ist; so divergirt die Reihe (1.), weil unter dieser Voraussetzung das allgemeine Glied x^n sich nicht der Null nähert, wenn n wächst. Da aber, wie man leicht findet:

$$s_{n+m} - s_n = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots + x^{n+m-1}$$

$$= x^n\{1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1}\} = x^n.\frac{1-x^m}{1-x}$$

ist; so nähert die Differenz $s_{n+m} - s_n$, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, für jedes m sich offenbar der Gränze Null, wenn n wächst, und die Reihe convergirt also in diesem Falle. Dies erhellet auch daraus, weil

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

ist, indem $\frac{x^n}{1-x}$ sich der Null nähert, wenn n wächst, vorausgesetzt, daß der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist. Die Gränze von s_n, für wachsende n, ist also in diesem Falle der Bruch

$$\frac{1}{1-x},$$

und demnach:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots$$

Unsere Reihe hat folglich auch nur in diesem Falle eine wirkliche Summe; sonst genügt sie bloß der durch die Gleichung

$$1 = (1-x)\{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\}$$

ausgedrückten allgemeinen analytischen Bedingung, für jedes x.

Man überzeugt sich leicht, daß die Reihe

$$at_0, at_1, at_2, at_3, at_4, \ldots.$$

mit der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.$$

gleichzeitig convergirt und divergirt. Ist nämlich

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1}$$
$$S_n = at_0 + at_1 + at_2 + at_3 + \ldots + at_{n-1};$$

so ist klar, daß

$$S_n = as_n, \quad S_{n+m} - S_n = a\{s_{n+m} - s_n\}$$

ist. Convergirt nun die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.;$$

so kann man n so groß nehmen, daß, rücksichtlich des absoluten Werths,

$$s_{n+m} - s_n < \lambda$$

ist, wo λ eine beliebige positive, nach so kleine Größe bezeichnet. Man kann also auch n immer so groß nehmen, daß, rücksichtlich der absoluten Werthe,

$$s_{n+m} - s_n < \frac{\lambda}{a}, \quad a\{s_{n+m} - s_n\} < \lambda;$$

$$S_{n+m} - S_n < \lambda$$

ist, so daß also die Reihe

$$at_0, at_1, at_2, at_3, at_4, \ldots.$$

ebenfalls convergirt.

Ganz auf ähnliche Art überzeugt man sich von dem umgekehrten Satze, woraus dann weiter sogleich folgt, daß die Reihe

$$at_0, at_1, at_2, at_3, at_4, \ldots.$$

divergirt, wenn die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.$$

divergirt.

Die Reihe

$$a, ax, ax^2, ax^3, ax^4, \ldots.$$

convergirt und divergirt folglich unter denselben Bedingungen wie die Reihe

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots,$$

welches also offenbar auch von der Reihe

$$x^\alpha,\ x^{\alpha+1},\ x^{\alpha+2},\ x^{\alpha+3},\ x^{\alpha+4},\ \ldots.$$

oder

$$ax^\alpha, ax^{\alpha+1},\ ax^{\alpha+2},\ ax^{\alpha+3},\ ax^{\alpha+4},\ \ldots.$$

gilt.

3. Man habe ferner die Reihe

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \ldots.\ \frac{1}{n},\ \ldots.$$

deren einzelne Glieder sich fortwährend der Null nähern. Dessen ungeachtet ist diese Reihe doch divergent, wie mittelst folgender einfachen Betrachtung erhellet. Es ist nämlich

$$s_{2n+1} - s_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Die Anzahl der Glieder dieser Reihe ist $= n$, und jedes Glied derselben, das letzte ausgenommen, $> \frac{1}{2n}$. Daher ist für jedes n

$$s_{2n+1} - s_{n+1} > n.\frac{1}{2n},\ > \tfrac{1}{2}.$$

Folglich nähert sich offenbar diese Differenz nicht fortwährend der Null, wenn n wächst, und unsere Reihe ist demnach divergent. Dieses Beispiel zeigt, daß eine Reihe divergent seyn kann, wenn auch ihr allgemeines Glied, indem der Index wächst, sich fortwährend der Null nähert. Obige Reihe hat also auch keine Summe.

4. Die gegebene Reihe sey:

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \frac{1}{1.2.3.4},\ \ldots\ \frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \ldots.$$

Die Glieder dieser Reihe, vom $(n+1)$ten an, sind:

$$\frac{1}{1.2\ldots n},\ \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)},\ \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)(n+2)},\ \ldots.$$

Diese Glieder sind respective eben so groß oder kleiner als:

$$\frac{1}{1.2\ldots n},\ \frac{1}{1.2\ldots n}.\frac{1}{n},\ \frac{1}{1.2\ldots n}.\frac{1}{n^2},\ \ldots.$$

und ihre Summe ist folglich kleiner als

$$\frac{1}{1.2\ldots n}.\left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots.\right\},$$

d. i. nach (2.) kleiner als

$$\frac{1}{1.2\ldots n}.\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.\frac{1}{n-1}.$$

Diese letztere Größe nähert sich aber der Null fortwährend, wenn n wächst. Also ist die gegebene Reihe eine convergirende Reihe,

und hat folglich eine Summe, die wir durch e bezeichnen wollen, so daß also

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots4} + \ldots + \frac{1}{1\ldots n} + \ldots\ldots$$

ist. Setzt man

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots4} + \ldots + \frac{1}{1\ldots(n-1)};$$

so ist der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{1.2.3..(n-1)}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Für $n = 11$ findet man

$$e = 2{,}7182818\ \ldots\ldots,$$

und der Fehler ist kleiner als

$$\frac{1}{36288000}.$$

Aus der Lehre von den Logarithmen weiß man, daß e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen ist, welches jetzt nicht weiter zu unserm Zwecke gehört.

Wir wollen nun die Bedingungen der Convergenz bei den verschiedenen Arten der Reihen etwas näher untersuchen, wobei wir, wie in diesem Artikel überhaupt, vorzüglich Cauchy (Cours d'Analyse algébrique. Paris. 1821. Exercices de Mathématiques. 20me Livr. Paris. 1827. p. 221.) folgen werden. Auch s. m. zwei Abhandlungen von Abel und L. Olivier in Crelles Journal. I. S. 313. II. S. 31., und eine Recension des obigen Werks von Cauchy in den Jahrb. für wissenschaftliche Kritik. 1829. S. 217. von Dirksen.

I. Reihen, deren Glieder sämmtlich positiv sind.

5. Wenn sämmtliche Glieder der Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots\ldots$$

positiv, und die Glieder

$$t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2},\ t_{n+3},\ t_{n+4},\ \ldots\ldots$$

respective kleiner als die Glieder der convergirenden Reihe

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ \ldots\ldots$$

sind; so convergirt die Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots\ldots.$$

Setzen wir

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_{n-1},$$
$$S_n = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots + T_{n-1};$$

so ist

$$S_{n+m} - S_n = T_n + T_{n+1} + T_{n+2} + \ldots + T_{n+m-1}.$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$t_{2n} < T_n$$
$$t_{2n+1} < T_{n+1}$$
$$t_{2n+2} < T_{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{2n+m-1} < T_{n+m-1} .$$

Also

$$t_{2n} + t_{2n+1} + t_{2n+2} + \ldots + t_{2n+m-1} < S_{n+m} - S_n ,$$

d. i.

$$s_{2n+m} - s_{2n} < S_{n+m} - S_n ,$$

oder, für $2n = \varkappa$:

$$s_{\varkappa+m} - s_\varkappa < S_{n+m} - S_n .$$

Da nun nach der Voraussetzung die Reihe

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots.$$

convergirt; so kann, für jedes m, wenn n wächst, die Differenz $S_{n+m} - S_n$ der Null beliebig nahe gebracht werden (1.). Also kann auch, für jedes m, wenn $\varkappa$ wächst, die Differenz $s_{\varkappa+m} - s_\varkappa$ der Null beliebig nahe gebracht werden, so daß folglich

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.$$

eine convergirende Reihe ist (1.).

Wenn sämmtliche Glieder der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.$$

positiv, und die Glieder

$$t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, t_{n+4}, \ldots.$$

respective größer als die Glieder der divergirenden Reihe

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots.$$

sind; so divergirt die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.$$

Sey wieder

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_{n-1} ,$$
$$S_n = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \ldots. + T_{n-1} ;$$

so ist

$$S_{n+m} - S_n = T_n + T_{n+1} + T_{n+2} + \ldots + T_{n+m-1}$$
$$t_{2n} > T_n$$
$$t_{2n+1} > T_{n+1}$$
$$t_{2n+2} > T_{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{2n+m-1} > T_{n+m-1}$$
$$t_{2n} + t_{2n+1} + t_{2n+2} + \ldots + t_{2n+m-1} > S_{n+m} - S_n$$
$$s_{2n+m} - s_{2n} > S_{n+m} - S_n ,$$

oder, wenn wir $2n = \varkappa$ setzen:

$$s_{\varkappa+m} - s_\varkappa > S_{n+m} - S_n .$$

Da nun nach der Voraussetzung die Reihe

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots,$$

divergent ist; so kann, für wachsende n, die Differenz

$$S_{n+m} - S_n,$$

also um so mehr, für wachsende $\varkappa$, die Differenz

$$s_{\varkappa+m} - s_\varkappa,$$

der Null nicht beliebig nahe gebracht werden, woraus unmittelbar folgt, daß die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots,$$

gleichfalls divergent ist.

6. Wenn sämmtliche Glieder der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$$

positiv sind; so suche man die Gränze L, welcher sich, wenn n wächst, die größten Werthe von $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ nähern. Dann ist die gegebene Reihe convergent oder divergent, jenachdem $L < 1$, oder $L > 1$ ist.

Sey zuerst $L < 1$. Man nehme eine beliebige, zwischen L und 1 liegende, Größe T; so daß also

$$L < T < 1$$

ist. Da sich, wenn n wächst, die größten Werthe von $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ nach der Voraussetzung immer mehr und mehr der Gränze L nähern; so muß es einen Werth von n geben, von welchem an immer

$$(t_n)^{\frac{1}{n}} < T, \; t_n < T^n$$

ist, wie groß man n auch annehmen mag. Man sieht also, daß es immer einen Werth von n giebt, für welchen die Glieder

$$t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, t_{n+4}, \ldots,$$

respective kleiner als die Glieder der Reihe

$$T^n, T^{n+1}, T^{n+2}, T^{n+3}, T^{n+4}, \ldots,$$

sind. Letztere Reihe ist aber, weil $T < 1$ ist, eine convergirende Reihe (2.). Also convergirt auch die gegebene Reihe (5.).

Ist ferner $L > 1$, so nehme man wieder eine zwischen L und 1 liegende Größe T, für welche also

$$L > T > 1$$

ist. Da nach der Voraussetzung, für wachsende n, die größten Werthe von $(t_n)^{\frac{1}{n}}$ der Gränze L sich fortwährend und bis zu einem beliebigen Grade nähern; so wird es einen Werth von n geben, von welchem an immer

$$(t_n)^{\frac{1}{n}} > T, \; t_n > T^n$$

ist, wie groß man auch n nehmen mag. Man sieht also, daß es immer einen Werth von n giebt, für welchen die Glieder der Reihe

$$t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2},\ t_{n+3},\ t_{n+4},\ \ldots.$$

respective größer als die Glieder der Reihe

$$T^n,\ T^{n+1},\ T^{n+2},\ T^{n+3},\ T^{n+4},\ \ldots.$$

sind. Da nun letztere Reihe, weil $T > 1$ ist, divergent ist (2.); so ist auch die gegebene Reihe divergirend (5.).

7. Wenn die Function $f(x)$ für sehr große Werthe von x stets positiv bleibt, und das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

sich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Größe L nähert, wenn x wächst; so nähert die Größe

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

für wachsende x sich derselben Gränze.

Wir wollen zuerst annehmen, daß L, welches offenbar positiv ist, einen endlichen bestimmten Werth habe. Da nun nach der Voraussetzung

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

für wachsende x der Gränze L beliebig nahe gebracht werden kann; so muß es eine Zahl h von solcher Beschaffenheit geben, daß für $x = h$ und $x > h$ das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

stets zwischen den Gränzen $L - \Theta$ und $L + \Theta$ enthalten ist, wie klein man auch Θ nehmen mag. Demnach sind die Brüche

$$\frac{f(h+1)}{f(h)},\ \frac{f(h+2)}{f(h+1)},\ldots \frac{f(h+n-1)}{f(h+n-2)},\ \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)},$$

für jedes ganze positive n, sämmtlich zwischen den Gränzen $L - \Theta$, $L + \Theta$ enthalten, wie klein man auch Θ nehmen mag. Das geometrische Mittel zwischen diesen Brüchen ist

$$\left\{\frac{f(h+1)}{f(h)}\cdot\frac{f(h+2)}{f(h+1)}\cdots\frac{f(h+n-1)}{f(h+n-2)}\cdot\frac{f(h+n)}{f(h+n-1)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

(Mittel in d. Z. 13.), welches folglich auch zwischen den angegebenen Gränzen enthalten ist, wie klein man auch Θ nehmen mag (a. a. O.). Dieses geometrische Mittel ist aber

$$\left\{\frac{f(h+n)}{f(h)}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

welche Größe also auch immer zwischen den Gränzen $L - \Theta$, $L + \Theta$ enthalten ist, so daß wir also

$$\left\{\frac{f(h+n)}{f(h)}\right\}^{\frac{1}{n}} = L + \alpha$$

setzen können, wo α eine zwischen $-\Theta$ und $+\Theta$ enthaltene Größe ist. Setzen wir jetzt $h+n=x$; so wird

$$\left\{\frac{f(x)}{f(h)}\right\}^{\frac{1}{x-h}} = L + \alpha,$$

$$f(x) = f(h).(L+\alpha)^{x-h},$$

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} = \{f(h)\}^{\frac{1}{x}}.(L+\alpha)^{1-\frac{h}{x}}.$$

In dieser Gleichung kann man offenbar h als constant betrachten, indem man, um x beliebig wachsen zu lassen, bloß, h unverändert lassend, n beliebig wachsen zu lassen braucht. Nähert sich nun x der Gränze ∞; so nähern sich die Größen

$$\{f(h)\}^{\frac{1}{x}},\ 1-\frac{h}{x}$$

offenbar beide der Gränze 1, und

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

nähert sich also einer Größe von der Form $L+\alpha$, wo α zwischen den Gränzen $-\Theta$ und $+\Theta$ enthalten ist. Da man aber Θ beliebig klein annehmen kann; so ist klar, daß

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

sich der Gränze L nähert, wenn x sich der Gränze ∞ nähert.

Ist ferner $L=\infty$, so sey H eine Größe, welche beliebig groß genommen werden kann. Da

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

größer als jede beliebige Größe werden kann; so sey h eine Größe von solcher Beschaffenheit, daß, für $x=h$ und $x>h$,

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} > H$$

ist. Daher sind die Brüche

$$\frac{f(h+1)}{f(h)},\ \frac{f(h+2)}{f(h+1)},\ \ldots\ \frac{f(h+n-1)}{f(h+n-2)},\ \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)}$$

sämmtlich größer als H, und es ist folglich auch das geometrische Mittel

$$\left\{\frac{f(h+n)}{f(h)}\right\}^{\frac{1}{n}} > H \text{ (a. a. O.)}.$$

Für $h+n=x$ ergiebt sich, wie vorher:

$$\left\{\frac{f(x)}{f(h)}\right\}^{\frac{1}{x-h}} > H,$$

$$f(x) > f(h).H^{x-h},$$

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} > \{f(h)\}^{\frac{1}{x}}.H^{1-\frac{h}{x}}.$$

Folglich, wenn x sich der Gränze ∞ nähert:

$$\text{Lim}\{f(x)\}^{\frac{1}{x}} > H,$$

so daß also die Gränze, welcher

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{x}}$$

sich nähert, wenn x sich der Gränze ∞ nähert, größer als jede gegebene, noch so große, Größe, d. i. selbst $= \infty$ ist.

Denkt man sich für h in dem vorhergehenden Beweise eine sehr große ganze Zahl gesetzt, so ist klar, daß der vorhergehende Satz auch für den Fall gilt, wenn für x bloß ganze Zahlen gesetzt werden. Hat man also eine Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.$$

mit positiven Gliedern, und das Verhältniß

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}$$

nähert sich fortwährend der Gränze L, wenn n sich der Gränze ∞ nähert; so nähert

$$(t_n)^{\frac{1}{n}}$$

unter derselben Voraussetzung sich derselben Gränze.

Für $f(x) = x$ ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

und nähert sich also der Gränze 1, wenn x sich der Gränze ∞ nähert. Unter derselben Voraussetzung nähert also auch

$$x^{\frac{1}{x}}$$

sich der Gränze 1.

Für

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots.$$

ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^n + \frac{b}{x}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \frac{c}{x^2}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \ldots}{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \ldots}$$

und nähert sich folglich der Gränze

$$\frac{a}{a} = 1,$$

wenn x sich der Gränze ∞ nähert. Unter derselben Voraussetzung nähert also auch

$$\{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots\}^{\frac{1}{x}}$$

sich der Gränze 1.

Für $f(x) = lx$ ist

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{l(x+1)}{lx} = \frac{lx + l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{lx} = 1 + \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{lx},$$

und nähert sich folglich der Gränze 1, welcher Gränze also auch

$$(lx)^{\frac{1}{x}}$$

sich nähert, wenn x sich der Gränze ∞ nähert.

Für $t_n = 1.2.3 \ldots n$ ist das Verhältniß

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = n + 1,$$

und nähert sich folglich der Gränze ∞, wenn n sich derselben Gränze nähert. Also nähert auch

$$\{1.2.3 \ldots . n\}^{\frac{1}{n}}$$

sich der Gränze ∞, wenn n sich derselben Gränze nähert.

8. Mit Hülfe des in (7.) bewiesenen Satzes läßt sich nun der in (6.) bewiesene Satz auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn sämmtliche Glieder der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$$

positiv sind, und für wachsende n das Verhältniß

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}$$

sich der Gränze L nähert; so ist die obige Reihe convergirend oder divergirend, jenachdem $L <$ oder > 1 ist.

Für die Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots \frac{1}{1 \ldots . n}, \ldots .$$

z. B. ist

$$t_n = \frac{1}{1.2.3..(n-1)}, \quad t_{n+1} = \frac{1}{1.2.3..n}, \quad \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{n}.$$

Nähert also n sich der Gränze ∞, so nähert

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}$$

sich der Gränze $\frac{1}{\infty} = 0 < 1$. Also ist die gegebene Reihe convergent, wie wir schon in (4.) auf anderm Wege gefunden haben.

Das hier bewiesene Kriterium der Convergenz und Divergenz einer Reihe ist in allen den Fällen anwendbar, wo L nicht $= 1$ ist. In diesem Falle ist es jedoch nicht immer ganz leicht, über

die Convergenz oder Divergenz mit Bestimmtheit zu entscheiden. Folgende Sätze, die wir ebenfalls von Cauchy entlehnen, können oft von Nutzen seyn.

9. Wenn in der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots$$

jedes Glied kleiner ist als das zunächst vorhergehende; so ist diese Reihe mit der Reihe

$$t_0, 2t_1, 4t_3, 8t_7, 16t_{15}, 32t_{31}, \ldots$$

zugleich convergirend und divergirend.

Sey zuvörderst die erstere Reihe convergirend. Da jedes Glied dieser Reihe kleiner als das nächst vorhergehende ist; so ist, wie sogleich erhellet:

$$t_0 = t_0$$
$$2t_1 = 2t_1$$
$$4t_3 < 2t_2 + 2t_3$$
$$8t_7 < 2t_4 + 2t_5 + 2t_6 + 2t_7$$
$$16t_{15} < 2t_8 + 2t_9 + 2t_{10} + 2t_{11} + 2t_{12} + 2t_{13} + 2t_{14} + 2t_{15}$$
u. s. f. u. s. f.

Setzen wir nun

$$T_0 = t_0$$
$$T_1 = t_1$$
$$T_3 = t_2 + t_3$$
$$T_7 = t_4 + t_5 + t_6 + t_7$$
$$T_{15} = t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{15}$$
u. s. f. u. s. f.

so sind die Glieder der Reihe

$$t_0, 2t_1, 4t_3, 8t_7, 16t_{15}, 32t_{31}, \ldots,$$

wenigstens vom dritten an, respective kleiner als die Glieder der Reihe

$$T_0, 2T_1, 2T_3, 2T_7, 2T_{15}, 2T_{31}, \ldots.$$

Die beiden ersten Glieder sind in beiden Reihen einander gleich. Da nun nach der Voraussetzung die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots\ldots$$

convergirt; so convergirt offenbar auch die Reihe

$$T_0, T_1, T_3, T_7, T_{15}, T_{31}, \ldots,$$

also auch (2.) die Reihe

$$2T_0, 2T_1, 2T_3, 2T_7, 2T_{15}, 2T_{31}, \ldots:$$

oder die Reihe

$$T_0, 2T_1, 2T_3, 2T_7, 2T_{15}, 2T_{31}, \ldots.$$

Folglich convergirt nach (5.) auch die Reihe

$$t_0, 2t_1, 4t_3, 8t_7, 16t_{15}, 32t_{31}, \ldots.$$

Ist die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots$$

divergent; so ist nach der Voraussetzung

$$t_0 = t_0$$
$$2t_1 > t_1 + t_2$$
$$4t_3 > t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$
$$8t_7 > t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14}$$

u. s. f. u. s. f.

und es sind also, wenn wir die Aggregate auf der rechten Seite nach der Reihe durch

$$T_0, T_2, T_6, T_{14}, T_{30}, \ldots.$$

bezeichnen, die Glieder der Reihe

$$t_0, 2t_1, 4t_3, 8t_7, 16t_{15}, \ldots.$$

respective größer als die Glieder der Reihe

$$T_0, T_2, T_6, T_{14}, T_{30}, \ldots.,$$

welche, so wie die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots.,$$

offenbar divergirt. Also divergirt nach (5.) auch die Reihe

$$t_0, 2t_1, 4t_3, 8t_7, 16t_{15}, 32t_{31}, \ldots.$$

Die gegebene Reihe sey z. B.

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6^\alpha}, \ldots.;$$

so erhält man nach dem vorigen Satze die Reihe

$$1, 2.\frac{1}{2}, 4.\frac{1}{4^\alpha}, 8.\frac{1}{8^\alpha}, 16.\frac{1}{16^\alpha}, 32.\frac{1}{32^\alpha}, \ldots.;$$

$$1, \frac{1}{2^{\alpha-1}}, \frac{1}{4^{\alpha-1}}, \frac{1}{8^{\alpha-1}}, \frac{1}{16^{\alpha-1}}, \frac{1}{32^{\alpha-1}}, \ldots.;$$

$$1, (\tfrac{1}{2})^{\alpha-1}, (\tfrac{1}{2})^{2(\alpha-1)}, (\tfrac{1}{2})^{3(\alpha-1)}, (\tfrac{1}{2})^{4(\alpha-1)}, (\tfrac{1}{2})^{5(\alpha-1)}, \ldots.$$

Dies ist eine geometrische Reihe, deren Exponent $(\frac{1}{2})^{\alpha-1}$ ist. Dieser Exponent ist < 1, $= 1$, > 1, jenachdem $\alpha > 1$, $= 1$, < 1 ist. Also ist vorstehende Reihe convergent, wenn $\alpha > 1$ ist, divergent dagegen, wenn $\alpha = 1$ oder $\alpha < 1$ ist (2.). Unter denselben Bedingungen ist also auch die gegebene Reihe convergent und divergent. Die erste der drei folgenden Reihen ist convergent, die beiden andern sind divergent:

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \ldots.;$$

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots.;$$

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \ldots..$$

Der hier bewiesene Satz ist oft bei der Beurtheilung der Convergenz und Divergenz einer Reihe von besonderem Nutzen.

10. Wenn für wachsende n der Bruch

$$\frac{\log t_n}{\log\left(\frac{1}{n}\right)}$$

sich der Gränze L fortwährend und beliebig nähert; so ist die Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ \ldots.$$

convergirend oder divergirend, jenachdem $L > 1$ oder $L < 1$ ist.

Sey zunächst $L < 1$. Man nehme zwischen L und 1 eine Größe a, so daß also

$$L > a > 1$$

ist. Da sich nun für wachsende n das Verhältniß

$$\frac{\log t_n}{\log\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1}{t_n}\right)}{\log n}$$

der Gränze L fortwährend nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann; so wird es offenbar immer einen Werth von n geben, für welchen, und über welchen hinaus, dieses Verhältniß größer als a ist. Man wird also für diesen, und für größere Werthe von n immer haben:

$$\frac{\log\left(\frac{1}{t_n}\right)}{\log n} > a,\ \log\left(\frac{1}{t_n}\right) > a \log n\,;$$

$$\log\left(\frac{1}{t_n}\right) > \log n^a,\ \frac{1}{t_n} > n^a,\ t_n < \frac{1}{n^a}\,.$$

Die Glieder der Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots.\ t_n,\ t_{n+1},\ \ldots..$$

werden also immer endlich einmal sämmtlich kleiner seyn als die Glieder der Reihe

$$1,\ \frac{1}{2^a},\ \frac{1}{3^a},\ \frac{1}{4^a},\ \ldots\ \frac{1}{n^a},\ \frac{1}{(n+1)^a},\ \ldots..$$

Da nun diese Reihe, weil $a > 1$ ist, convergirt (9.); so convergirt auch die Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots..\quad (5.)\,.$$

In dem Falle $L < 1$ hat man, wie vorher,

$$L < a < 1\,;$$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{t_n}\right)}{\log n} < a,\ \log\left(\frac{1}{t_n}\right) < a \log n\,;$$

$$\log\left(\frac{1}{t_n}\right) < \log n^a,\ \frac{1}{t_n} < n^a,\ t_n > \frac{1}{n^a}\,.$$

Demnach sind immer endlich einmal die Glieder der Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots\ t_n,\ t_{n+1},\ \ldots..$$

sämmtlich größer als die Glieder der Reihe

$$1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, \ldots \frac{1}{n^a}, \frac{1}{(n+1)^a}, \ldots,$$

welche, weil $a < 1$ ist, divergirt (9.). Daher divergirt auch die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots (5.).$$

11. Wenn

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots;$$
$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

convergirende Reihen sind, deren Summen wir durch s und s' bezeichnen wollen; so ist

$$t_0 + u_0, t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, t_4 + u_4, \ldots$$

gleichfalls eine convergirende Reihe, deren Summe $= s + s'$ ist.

Sey

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1},$$
$$s'_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1};$$

so nähern sich diese Summen, für wachsende n, fortwährend den Gränzen s und s', und können, wenn man nur n groß genug nimmt, diesen Gränzen beliebig nahe gebracht werden. Man kann also n immer groß genug nehmen, daß die positiven Werthe der Differenzen $s - s_n$, $s' - s'_n$ kleiner als jede gegebene, noch so kleine, Größe Θ werden. Nimmt man nun n so groß, daß die absoluten Werthe dieser Differenzen beide $< \frac{1}{2}\Theta$ sind; so ist der absolute Werth der Größe

$$(s - s_n) + (s' - s'_n),$$

d. i. der absolute Werth der Differenz

$$(s + s') - (s_n + s'_n)$$

offenbar $< \Theta$. Es ist aber

$$s_n + s'_n = (t_0 + u_0) + (t_1 + u_1) + \ldots + (t_{n-1} + u_{n-1}),$$

und man kann also n immer so groß nehmen, daß der absolute Werth der Differenz

$$(s + s') - (s_n + s'_n)$$

kleiner als jede gegebene, noch so kleine, Größe wird, woraus der zu beweisende Satz unmittelbar folgt.

12. Wenn wieder

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots;$$
$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

convergirende Reihen, und deren Summen respective s und s' sind; so ist

$$\begin{array}{l} t_0 u_0 \\ t_0 u_1 + t_1 u_0 \\ t_0 u_2 + t_1 u_1 + t_2 u_0 \\ t_0 u_3 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + t_3 u_0 \\ t_0 u_4 + t_1 u_3 + t_2 u_2 + t_3 u_1 + t_4 u_0 \\ \quad\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{array}$$

eine convergirende Reihe, deren Summe $= ss'$ ist.

Die Summe der n ersten Glieder der beiden ersten Reihen wollen wir, wie vorher, durch s_n, s'_n, die Summe der n ersten Glieder der letztern Reihe dagegen durch S_n bezeichnen. Es ist

$$\begin{array}{rl} s_n s'_n = & t_0 u_0 + t_1 u_0 + t_2 u_0 + \ldots + t_{n-1} u_0 \\ & + t_0 u_1 + t_1 u_1 + t_2 u_1 + \ldots + t_{n-1} u_1 \\ & + t_0 u_2 + t_1 u_2 + t_2 u_2 + \ldots + t_{n-1} u_2 \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & + t_0 u_{n-2} + t_1 u_{n-2} + t_2 u_{n-2} + \ldots + t_{n-1} u_{n-2} \\ & + t_0 u_{n-1} + t_1 u_{n-1} + t_2 u_{n-1} + \ldots + t_{n-1} u_{n-1}\,. \end{array}$$

Also, wenn man sich dieses Product nach den Diagonalreihen geordnet denkt, offenbar

$$S_n < s_n s'_n\,.$$

Ist ferner m die größte in $\frac{n-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl, nämlich

$$m = \frac{n-1}{2} \text{ oder } m = \frac{n-2}{2}\,,$$

jenachdem n ungerade oder gerade ist; so ist offenbar immer

$$S_n > s_{m+1} s'_{m+1}\,.$$

Läßt man nun n fortwährend zunehmen, so wird offenbar auch m fortwährend wachsen, und nach der Voraussetzung werden sich also die Summen s_n, s_{m+1} der Gränze s, die Summen s'_n, s'_{m+1} der Gränze s', die Producte $s_n s'_n$, $s_{m+1} s'_{m+1}$ der Gränze ss' fortwährend nähern. S ist nach dem Obigen immer zwischen $s_n s'_n$, $s_{m+1} s'_{m+1}$ enthalten, und wird sich also, für wachsende n, ebenfalls fortwährend der Gränze ss' nähern, woraus der zu beweisende Satz sich augenblicklich ergiebt.

II. Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

13. Die positiven Werthe der Glieder der Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots\ldots$$

wollen wir immer respective durch

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichnen; so ist klar, daß der absolute Werth der Summe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_{n-1}$$

nie größer als

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots . + \varrho_{n-1}$$

seyn kann. Auch ist der absolute Werth von

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots + t_{n+m-1}$$

nie größer als der absolute Werth von

$$\varrho_n + \varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \ldots + \varrho_{n+m-1} .$$

Setzen wir nun

$$s_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} ,$$
$$s'_n = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots + \varrho_{n-1} ;$$

so ist der absolute Werth von $s_{n+m} - s_n$ nie größer als $s'_{n+m} - s'_n$. Convergirt die Reihe

$$\varrho_0 , \varrho_1 , \varrho_2 , \varrho_3 , \varrho_4 , \ldots . . ;$$

so kann, wenn n wächst, die Differenz

$$s'_{n+m} - s'_n ,$$

für jedes m, der Null beliebig nahe gebracht werden (1.); also kann, wenn n wächst, offenbar auch die Differenz

$$s_{n+m} - s_n ,$$

für jedes m, der Null beliebig nahe gebracht werden; so daß folglich die Reihe

$$t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , \ldots . .$$

ebenfalls convergirt (1.).

Wenn die Glieder der Reihe

$$\varrho_0 , \varrho_1 , \varrho_2 , \varrho_3 , \varrho_4 , \ldots .$$

sich der Null nicht nähern, indem der Index n wächst; so divergirt die Reihe

$$t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , \ldots . .$$

Es ist nämlich

$$s_{n+1} - s_n = t_n$$
$$s_{n+2} - s_{n+1} = t_{n+1}$$
$$s_{n+3} - s_{n+2} = t_{n+2}$$
$$s_{n+4} - s_{n+3} = t_{n+3}$$
u. s. f. u. s. f.

so daß also die absoluten Werthe der Differenzen auf der linken Seite der Reihe nach

$$\varrho_n , \varrho_{n+1} , \varrho_{n+2} , \varrho_{n+3} , \ldots .$$

sind. Da nun diese Größen sich nach der Voraussetzung der Null nicht nähern; so nähern sich auch die in Rede stehenden Differenzen der Null nicht, d. i.

$$s_{n+1} - s_n ,$$

oder

$$s_{n+m} - s_n ,$$

für $m = 1$, nähert sich der Null nicht, wenn n wächst. Folglich ist die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots$$

divergent (1.).

14. Die Reihe

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots$$

ist convergent, wenn, für wachsende n, die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich einer Gränze nähern, welche < 1 ist (6.). Nähern sich dagegen, für wachsende n, die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ einer Gränze, welche > 1 ist; so kann ϱ_n, für wachsende n, sich nicht der Null nähern. Nähert sich nämlich $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$, für wachsende n, einer Gränze, welche > 1 ist; so giebt es einen Werth von n, für welchen

$$(\varrho_n)^{\frac{1}{n}} > 1$$
$$(\varrho_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} > 1$$
$$(\varrho_{n+2})^{\frac{1}{n+2}} > 1$$
u. s. f. u. s. f.

ist, woraus sich unmittelbar ergiebt:

$$\varrho_n > 1$$
$$\varrho_{n+1} > 1$$
$$\varrho_{n+2} > 1$$
u. s. f. u. s. f.

sodaß also ϱ_n, für wachsende n, sich offenbar der Gränze Null nicht nähert. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Wenn ϱ_n der absolute Werth des allgemeinen Gliedes einer Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots$$

ist, und, für wachsende n, die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich einer bestimmten Gränze L nähern; so ist die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots$$

convergent oder divergent, jenachdem $L < 1$ oder $L > 1$ ist.

Nach (7.) kann man diesen Satz aber auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Wenn für wachsende n der absolute Werth des Verhältnisses

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}$$

sich einer bestimmten Gränze L nähert; so ist die Reihe

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots\ldots$$

convergent oder divergent, jenachdem $L < 1$ oder $L > 1$ ist.

15. Wenn die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, und, ihren absoluten Werthen nach, wenn der Index wächst, der Null sich beständig und beliebig nähern, indem sie zugleich fortwährend abnehmen; so ist die Reihe jederzeit convergent.

Die Reihe sey

$$t_0,\ -t_1,\ +t_2,\ -t_3,\ +t_4,\ -t_5,\ \ldots\ldots;$$

die absoluten Werthe der einzelnen Glieder:

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ \ldots\ldots$$

nehmen beständig ab, und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur den Index des Gliedes hinreichend wachsen läßt. Es ist

$$s_{n+m} - s_n = \pm\{t_n - t_{n+1} + t_{n+2} - \ldots \pm t_{n+m-1}\} = \pm S,$$

wo die obern und untern Zeichen außerhalb und innerhalb der Klammer sich nicht auf einander beziehen sollen. Für $m = 2\mu$ ist

$$\begin{aligned} S &= t_n - t_{n+1} + t_{n+2} - \ldots\ldots - t_{n+2\mu-1} \\ &= t_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - \ldots\ldots - (t_{n+2\mu-3} - t_{n+2\mu-2}) - t_{n+2\mu-1} \\ &= (t_n - t_{n+1}) + (t_{n+2} - t_{n+3}) + \ldots + (t_{n+2\mu-2} - t_{n+2\mu-1}). \end{aligned}$$

Für $m = 2\mu + 1$ dagegen ist

$$\begin{aligned} S &= t_n - t_{n+1} + t_{n+2} - \ldots\ldots + t_{n+2\mu} \\ &= t_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - \ldots\ldots - (t_{n+2\mu-1} - t_{n+2\mu}) \\ &= (t_n - t_{n+1}) + (t_{n+2} - t_{n+3}) + \ldots + (t_{n+2\mu-2} - t_{n+2\mu-1}) + t_{n+2\mu}, \end{aligned}$$

so daß also in beiden Fällen

$$\begin{aligned} S &= t_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - (t_{n+3} - t_{n+4}) - \ldots\ldots \\ &= (t_n - t_{n+1}) + (t_{n+2} - t_{n+3}) + (t_{n+4} - t_{n+5}) + \ldots\ldots \end{aligned}$$

ist, wo die Größen

$$\begin{array}{lcl} t_n & - & t_{n+1} \\ t_{n+1} & - & t_{n+2} \\ t_{n+2} & - & t_{n+3} \\ t_{n+3} & - & t_{n+4} \\ \text{u. s. f.} & & \text{u. s. f.} \end{array}$$

nach der Voraussetzung sämmtlich positiv sind. Demnach ist S offenbar positiv, und

$$S < t_n,\ S > t_n - t_{n+1},$$

d. i. S zwischen

$$t_n \text{ und } t_n - t_{n+1}$$

enthalten. Der Unterschied zwischen diesen beiden Gränzen ist $= t_{n+1}$, und kann nach der Voraussetzung, für wachsende n, der Null beliebig nahe gebracht werden. Daher kann um so mehr, für wachsende n, S der Null beliebig nahe gebracht werden. Es kann also auch, für wachsende n, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n,$$
für jedes m, der Null beliebig nahe gebracht werden, so daß also die Reihe

$$t_0, - t_1, + t_2, - t_3, + t_4, - t_5, \ldots\ldots$$
convergirt (1.). Cauchy hat diesen Satz nur an einem Beispiele für die Reihe

$$1, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, +\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, +\tfrac{1}{7}, \ldots\ldots$$
erläutert. Aus (3.) wissen wir, daß die Reihe

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, \ldots\ldots$$
divergent ist. Man sieht also hieraus, daß eine divergente Reihe mit positiven Gliedern zuweilen convergent werden kann, wenn man die Glieder von gerader Stellenzahl negativ nimmt.

16. Wenn sämmtliche Glieder der convergirenden Reihe

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots$$
positiv sind, und

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots$$
ist eine Reihe von Größen, welche sämmtlich positiv sind und die Einheit nicht übersteigen; so ist auch

$$\varrho_0 p_0, \varrho_1 p_1, \varrho_2 p_2, \varrho_3 p_3, \varrho_4 p_4, \ldots\ldots$$
eine convergente Reihe.

Sey

$$s_n = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n-1}$$
$$s'_n = \varrho_0 p_0 + \varrho_1 p_1 + \varrho_2 p_2 + \ldots + \varrho_{n-1} p_{n-1};$$
so ist

$$s_{n+m} - s_n = \varrho_n + \varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \ldots + \varrho_{n+m-1}$$
$$s'_{n+m} - s'_n = \varrho_0 p_0 + \varrho_1 p_1 + \varrho_2 p_2 + \ldots + \varrho_{n+m-1} p_{n+m-1}.$$
Also nach der Voraussetzung

$$s_{n+m} - s_n \overline{\overline{>}} s'_{n+m} - s'_n.$$
Da die erste Reihe convergirt, so kann, für wachsende n, die Differenz $s_{n+m} - s_n$, für jedes m, der Null beliebig nahe gebracht werden, welches also um so mehr auch von $s'_{n+m} - s'_n$ gilt.

17. Wenn

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots$$
eine convergirende Reihe mit positiven Gliedern ist, und

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots\ldots$$
Größen sind, welche in Bezug auf ihre absoluten Werthe die Einheit nicht übersteigen, aber positiv und negativ seyn können; so ist

$$\varrho_0 t_0, \varrho_1 t_1, \varrho_2 t_2, \varrho_3 t_3, \varrho_4 t_4, \ldots\ldots$$
stets eine convergirende Reihe.

Sind nämlich

$$(t_0),\ (t_1),\ (t_2),\ (t_3),\ (t_4),\ \ldots..$$

die absoluten Werthe der entsprechenden Größen in der zweiten Reihe; so ist die Reihe

$$\varrho_0(t_0),\ \varrho_1(t_1),\ \varrho_2(t_2),\ \varrho_3(t_3),\ \varrho_4(t_4),\ \ldots.$$

convergirend (16.). Also ist auch

$$\varrho_0 t_0,\ \varrho_1 t_1,\ \varrho_2 t_2,\ \varrho_3 t_3,\ \varrho_4 t_4,\ \ldots..$$

eine convergirende Reihe (13.).

18. Ist also wieder

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots..$$

eine convergirende Reihe mit positiven Gliedern; so sind auch

$$\varrho_0 \cos\Theta_0,\ \varrho_1 \cos\Theta_1,\ \varrho_2 \cos\Theta_2,\ \varrho_3 \cos\Theta_3,\ \varrho_4 \cos\Theta_4,\ \ldots. ;$$

$$\varrho_0 \sin\Theta_0,\ \varrho_1 \sin\Theta_1,\ \varrho_2 \sin\Theta_2,\ \varrho_3 \sin\Theta_3,\ \varrho_4 \sin\Theta_4,\ \ldots.$$

convergirende Reihen. Eben so sind auch

$$\varrho_0,\ \varrho_1 \cos\Theta,\ \varrho_2 \cos 2\Theta,\ \varrho_3 \cos 3\Theta,\ \varrho_4 \cos 4\Theta,\ \ldots. ;$$

$$\varrho_1 \sin\Theta,\ \varrho_2 \sin 2\Theta,\ \varrho_3 \sin 3\Theta,\ \varrho_4 \sin 4\Theta,\ \ldots.$$

convergirende Reihen, unter der obigen Voraussetzung.

19. Sind

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots.. ;$$

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots.$$

convergente Reihen, deren Summen s und s' sind; so ist auch

$$t_0 + u_0,\ t_1 + u_1,\ t_2 + u_2,\ t_3 + u_3,\ \ldots..$$

eine convergente Reihe, deren Summe $s + s'$ ist.

Dieser Satz kann ganz auf dieselbe Art wie der analoge Satz in (11.) bewiesen werden.

20. Wenn

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots. ;$$

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots.$$

convergente Reihen, und s, s' ihre Summen sind; so ist, wenn auch die absoluten oder numerischen Werthe der Glieder dieser Reihen convergente Reihen bilden, auch

$$\begin{array}{l}
t_0 u_0 \\
t_0 u_1 + t_1 u_0 \\
t_0 u_2 + t_1 u_1 + t_2 u_0 \\
t_0 u_3 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + t_3 u_0 \\
t_0 u_4 + t_1 u_3 + t_2 u_2 + t_3 u_1 + t_4 u_0 \\
\quad \text{u. s. f.} \qquad\qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{array}$$

eine convergente Reihe, deren Summe $= ss'$ ist.

Seyen s_n, s'_n, S_n die Summen der n ersten Glieder der in Rede stehenden Reihen; so ist

$$s_n s'_n - S_n =$$

$$t_{n-1} u_{n-1}$$
$$+ \{ t_{n-1} u_{n-2} + t_{n-2} u_{n-1} \}$$
$$+ \{ t_{n-1} u_{n-3} + t_{n-2} u_{n-2} + t_{n-3} u_{n-1} \}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{ t_{n-1} u_1 + t_{n-2} u_2 + \ldots + t_2 u_{n-2} + t_1 u_{n-1} \}$$

wobei (12.) verglichen werden kann.

Bezeichnen wir die numerischen Werthe der Glieder der beiden gegebenen Reihen durch

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots;$$
$$\varrho'_0, \varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3, \varrho'_4, \ldots\ldots;$$

und die den Größen s_n, s'_n, S_n analogen Größen für diese beiden Reihen, welche nach der Voraussetzung ebenfalls convergiren, durch σ_n, σ'_n, Σ; so ist:

$$\sigma_n \sigma'_n - \Sigma_n =$$

$$\varrho_{n-1} \varrho'_{n-1}$$
$$+ \{ \varrho_{n-1} \varrho'_{n-2} + \varrho_{n-2} \varrho'_{n-1} \}$$
$$+ \{ \varrho_{n-1} \varrho'_{n-3} + \varrho_{n-2} \varrho'_{n-2} + \varrho_{n-3} \varrho'_{n-1} \}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{ \varrho_{n-1} \varrho'_1 + \varrho_{n-2} \varrho'_2 + \ldots + \varrho_2 \varrho'_{n-2} + \varrho_1 \varrho'_{n-1} \}.$$

Es fällt sogleich in die Augen, daß, rücksichtlich der absoluten Werthe,

$$\sigma_n \sigma'_n - \Sigma_n > s_n s'_n - S_n$$

ist. Nach (12.) nähert sich, für wachsende n, der absolute Werth von

$$\sigma_n \sigma'_n - \Sigma_n$$

der Null fortwährend, weil sowohl $\sigma_n \sigma'_n$, als auch Σ_n, sich der Gränze $\sigma\sigma'$ fortwährend und beliebig nähert, wenn n wächst. Also nähert auch der absolute Werth von

$$s_n s'_n - S_n$$

sich der Gränze Null fortwährend und beliebig, wenn n wächst. Da nun s_n, s'_n sich respective den Gränzen s, s', also $s_n s'_n$ sich der Gränze ss' fortwährend und beliebig nähert, wenn n wächst; so muß auch S_n sich der Gränze ss' fortwährend und beliebig nähern, wenn n wächst, woraus der zu beweisende Satz unmittelbar folgt (1.).

Die Bedingung, daß die gegebenen Reihen, auch nach der Reduction ihrer Glieder auf deren numerische Werthe, convergent bleiben, ist nothwendig und wohl zu beachten. Cauchy erläutert dies auch an einem Beispiele (a. a. O. p. 149.), welches wir jedoch, der Kürze wegen, hier unterlassen, da die Nothwendigkeit dieser Bedingung schon aus dem allgemeinen Beweise deutlich genug hervorgeht.

III. Reihen, welche nach den aufsteigenden ganzen positiven Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet sind.

21. Sey

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ \ldots\ldots$$

eine beliebige nach den Potenzen von x geordnete Reihe, deren Coefficienten positiv und negativ seyn können. Die positiven Werthe der Coefficienten wollen wir durch

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots\ldots,$$

den positiven Werth von x durch ξ bezeichnen.

Wenn A die Gränze ist, welcher sich, für wachsende n, die größten Werthe von $(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ nähern; so ist offenbar die Gränze, welcher sich, für wachsende n, die größten Werthe von

$$(\alpha_n\xi^n)^{\frac{1}{n}} = (\alpha_n)^{\frac{1}{n}}\xi$$

nähern, $= A\xi$. Nach (14.) ist also die Reihe

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ \ldots\ldots$$

convergent oder divergent, jenachdem $A\xi < 1$ oder $A\xi > 1$, d. i. jenachdem

$$\xi < \frac{1}{A} \text{ oder } \xi > \frac{1}{A}$$

ist. Dies führt auf folgenden Lehrsatz:

Wenn α_n der absolute Werth des allgemeinen Coefficienten α_n in der Reihe

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ \ldots\ldots$$

und ξ der absolute Werth von x ist; die größten Werthe von $(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ sich aber, für wachsende n, der Gränze A nähern; so convergirt oder divergirt die obige Reihe, jenachdem

$$\xi < \frac{1}{A} \text{ oder } \xi > \frac{1}{A}$$

ist, oder, was dasselbe ist, die Reihe convergirt für alle zwischen den Gränzen

$$x = -\frac{1}{A},\ x = +\frac{1}{A}$$

liegenden Werthe von x, und divergirt für alle außerhalb dieser Gränzen liegenden Werthe von x.

Nach (7.) kann man diesen Satz aber auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Wenn, für wachsende n, der numerische Werth des Verhältnisses

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

sich der Gränze A nähert; so convergirt die Reihe

$$a_0, \; a_1 x, \; a_2 x^2, \; a_3 x^3, \; a_4 x^4, \; \ldots\ldots$$

für alle zwischen den Gränzen

$$\frac{1}{A} \text{ und } + \frac{1}{A}$$

liegenden Werthe von x, und divergirt für alle außerhalb dieser Gränzen liegenden Werthe von x.

22. Sey z. B. die Reihe

$$1, \; 2x, \; 3x^2, \; 4x^3, \; 5x^4, \; 6x^5, \; \ldots\ldots$$

gegeben. Für diese Reihe ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Also $A = 1$. Demnach convergirt die Reihe für alle Werthe von x zwischen den Gränzen -1 und $+1$, divergirt dagegen für alle außerhalb dieser Gränzen liegenden Werthe vo nx.

Für die Reihe

$$\frac{x}{1}, \; \frac{x^2}{2}, \; \frac{x^3}{3}, \; \frac{x^4}{4}, \; \frac{x^5}{5}, \; \ldots\ldots$$

ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Also $A = 1$. Die Reihe convergirt und divergirt folglich unter denselben Bedingungen wie die erstere.

Setzt man

$$x = \pm \frac{1}{A},$$

so können die entsprechenden Reihen sowohl divergent, als auch convergent seyn, welches sich sogleich bei der letztern Reihe zeigt. Setzt man nämlich zuerst $x = +1$, dann $x = -1$; so erhält man die beiden Reihen

$$1, \; \tfrac{1}{2}, \; \tfrac{1}{3}, \; \tfrac{1}{4}, \; \tfrac{1}{5}, \; \tfrac{1}{6}, \; \ldots\ldots$$

$$-1, \; +\tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{3}, \; +\tfrac{1}{4}, \; -\tfrac{1}{5}, \; +\tfrac{1}{6}, \; \ldots\ldots$$

von denen die erste divergirt (3.), die zweite dagegen convergirt (15.).

Die Reihe sey

$$1, \; \frac{\alpha}{1}x, \; \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2, \; \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3, \; \ldots\ldots;$$

so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} = -\frac{1 - \frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Folglich offenbar $A = 1$. Unsere Reihe ist also convergent oder divergent, jenachdem x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten ist, oder außerhalb dieser Gränzen liegt.

Für die Reihe

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \frac{x^4}{1.2.3.4},\ \ldots\ldots$$

ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1},\ A = 0,\ \frac{1}{A} = \infty.$$

Die Reihe ist folglich für jedes zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ liegende x, d. i. für jeden bestimmten reellen Werth von x, convergent.

Für die Reihe

$$1,\ 1.x,\ 1.2x^2,\ 1.2.3x^3,\ 1.2.3.4x^4,\ \ldots.$$

ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1,\ A = \infty,\ \frac{1}{A} = 0.$$

Da zwischen -0 und $+0$ keine Werthe von x liegen können; so ist klar, daß diese Reihe immer divergirt.

Die Anzahl dieser Beispiele würde sich leicht vermehren lassen.

23. Sind

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ \ldots.;$$
$$b_0,\ b_1x,\ b_2x^2,\ b_3x^3,\ b_4x^4,\ \ldots.$$

zwei Reihen, welche, wenn man der veränderlichen Größe einen bestimmten Werth beilegt, convergent sind, und die Summen s, s' haben; so ist, für denselben Werth von x, auch

$$a_0 + b_0,\ (a_1+b_1)x,\ (a_2+b_2)x^2,\ (a_3+b_3)x^3,\ \ldots.$$

eine convergente Reihe, und die Summe dieser Reihe ist $= s + s'$.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet unmittelbar aus (19.), so wie man denselben auch leicht auf mehrere Reihen ausdehnen kann. Sind nämlich für einen bestimmten Werth von x z. B. die vier Reihen

$$a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ a_3x^3,\ a_4x^4,\ \ldots.,$$
$$b_0,\ b_1x,\ b_2x^2,\ b_3x^3,\ b_4x^4,\ \ldots.;$$
$$c_0,\ c_1x,\ c_2x^2,\ c_3x^3,\ c_4x^4,\ \ldots.;$$
$$d_0,\ d_1x,\ d_2x^2,\ d_3x^3,\ d_4x^4,\ \ldots.$$

convergent, und s, s', s'', s''' respective die Summen diese Reihen; so ist auch

$$a_0+b_0+c_0+d_0,\ (a_1+b_1+c_1+d_1)x,\ (a_2+b_2+c_2+d_2)x^2,\ \ldots.$$

für denselben Werth von x eine convergente Reihe, und ihre Summe

$$= s + s' + s'' + s'''.$$

24. Eben so ergiebt sich aus (20.) unmittelbar folgender Satz:

Wenn die Reihen

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3, a_4 x^4, \ldots;$$
$$b_0, b_1 x, b_2 x^2, b_3 x^3, b_4 x^4, \ldots$$

für einen bestimmten Werth von x convergent sind, und convergent bleiben, wenn man sämmtliche Glieder derselben auf ihre numerischen Werthe reducirt; so ist auch

$$\begin{array}{l} a_0 b_0 \\ \{a_0 b_1 + a_1 b_0\} x \\ \{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\} x^2 \\ \{a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0\} x^3 \\ \{a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0\} x^4 \\ \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{array}$$

für denselben Werth von x eine convergirende Reihe, und ss' ist die Summe dieser Reihe, wenn s und s' die Summen der gegebenen Reihen sind.

Man übersieht leicht, daß dieser Satz in folgender Gleichung dargestellt werden kann:

$$\begin{array}{l} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\ = \quad a_0 b_0 \\ \quad + \{a_0 b_1 + a_1 b_0\} x \\ \quad + \{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\} x^2 \\ \quad + \{a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0\} x^3 \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

unter der Voraussetzung, daß die beiden in einander multiplicirten Reihen convergent sind und convergent bleiben, wenn man für jedes Glied seinen numerischen oder absoluten Werth setzt. Die Erweiterung des Satzes auf mehr als zwei Reihen unterliegt keiner Schwierigkeit.

Setzt man, wie offenbar verstattet ist,

$$\begin{array}{l} a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = \ldots \\ a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \ldots \\ a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = \ldots \\ \text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.} \end{array}$$

so dient der Satz, immer unter den gemachten Voraussetzungen, zur Entwickelung der Potenz

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^n,$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist, in eine convergirende Reihe.

25. Ein Polynom

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$$

mit einer endlichen bestimmten Anzahl von Gliedern, kann man offenbar als eine convergirende Reihe betrachten, bei welcher von einem bestimmten Gliede an sämmtliche Glieder verschwinden oder $= 0$ werden, indem ein solches Polynom offenbar immer eine bestimmte Summe hat, auch wenn man für alle Glieder ihre numerischen Werthe setzt. Dies führt, mittelst (24.), auf folgenden Satz:

Wenn

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3,\ a_4 x^4,\ a_5 x^5,\ \ldots\ldots$$

eine Reihe ist, welche, für einen bestimmten Werth von x, convergent ist und auch convergent bleibt, wenn man für jedes Glied seinen numerischen Werth setzt; so ist für jedes beliebige Polynom

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$$

mit einer endlichen Anzahl von Gliedern:

$$\begin{aligned}
(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m) \\
= \quad & a_0 b_0 \\
& + \{a_0 b_1 + a_1 b_0\} x \\
& + \{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\} x^2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \{a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \ldots + a_m b_0\} x^m \\
& + \{a_1 b_m + a_2 b_{m-1} + a_3 b_{m-2} + \ldots + a_{m+1} b_0\} x^{m+1} \\
& + \{a_2 b_m + a_3 b_{m-1} + a_4 b_{m-2} + \ldots + a_{m+2} b_0\} x^{m+2} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

für denselben Werth von x, und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist, unter den gemachten Voraussetzungen, stets convergent.

26. Eine Function $\varphi(x)$ kann, wenn es überhaupt möglich ist, zwischen den Gränzen $x = -\alpha$ und $x = +\alpha$ nur auf eine Art durch eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe, welche zwischen den obigen Gränzen stets convergent ist, dargestellt, oder, wie man sich gewöhnlich auszudrücken pflegt, in eine solche Reihe entwickelt werden.

Sey, um dies zu beweisen, zwischen den Gränzen $x = -\alpha$, $x = +\alpha$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots \\
&= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so daß diese beiden Reihen zwischen den angegebenen Gränzen stets convergent bleiben. Es ist also für jedes x zwischen diesen Gränzen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

welches also auch für $x = 0$ gilt, woraus sogleich $a_0 = b_0$, und

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots.$$
$$x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots.)$$

für jedes x zwischen den obigen Gränzen. Also ist auch für jedes noch so kleine x, welches nur nicht $= 0$ ist:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots. = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots.$$

Läßt man nun aber x sich der Gränze Null nähern, so nähern diese beiden Größen sich den Gränzen a_1 und b_1 (m. v. d. Art. Unendlich). Da aber diese Größen für alle noch so kleine x einander gleich sind, so müssen offenbar auch ihre Gränzen einander gleich seyn, woraus sich $a_1 = b_1$, und

$$a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = b_2 x + b_3 x^2 + \ldots.$$
$$x(a_2 + a_3 x + \ldots) = x(b_2 + b_3 x + \ldots.)$$

ergiebt, für jedes x zwischen den obigen Gränzen. Hieraus schließt man auf dieselbe Weise, daß $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$, ... ist, womit also unser Satz bewiesen.

IV. Imaginäre Reihen.

27. Wenn

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots;$$
$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots\ldots$$

zwei beliebige reelle Reihen sind; so wollen wir die Reihe der imaginären Ausdrücke:

$$p_0 + q_0\sqrt{-1}$$
$$p_1 + q_1\sqrt{-1}$$
$$p_2 + q_2\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n + q\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

überhaupt eine imaginäre Reihe nennen. Eine solche Reihe ist convergent, wenn die obigen reellen Reihen beide convergent sind; dagegen ist die imaginäre Reihe divergent, wenn die reellen Reihen entweder beide, oder nur eine derselben, divergent sind.

Bezeichnen wir die Moduli der obigen imaginären Ausdrücke (Unmögliche Größen 6.) nach der Reihe durch

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots;$$

so kann (a. a. O.) die imaginäre Reihe jederzeit auf die Form

$$\varrho_0(\cos\Theta_0 + \sin\Theta_0\sqrt{-1})$$
$$\varrho_1(\cos\Theta_1 + \sin\Theta_1\sqrt{-1})$$
$$\varrho_2(\cos\Theta_2 + \sin\Theta_2\sqrt{-1})$$
$$\varrho_3(\cos\Theta_3 + \sin\Theta_3\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varrho_n(\cos\Theta_n + \sin\Theta_n\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gebracht werden. Wir wollen uns daher im Folgenden jede imaginäre Reihe, bevor wir eine nähere Untersuchung derselben unternehmen, auf diese Form gebracht denken.

28. Wenn, für wachsende n, die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich einer gewissen bestimmten Gränze nähern; so ist die entsprechende imaginäre Reihe convergent oder divergent, jenachdem diese Gränze < 1 oder > 1 ist.

Ist zuerst diese Gränze kleiner als die Einheit, so ist nach (6.) die Reihe

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots$$

convergent. Folglich sind auch

$$\varrho_0\cos\Theta_0,\ \varrho_1\cos\Theta_1,\ \varrho_2\cos\Theta_2,\ \varrho_3\cos\Theta_3,\ \ldots\ldots;$$
$$\varrho_0\sin\Theta_0,\ \varrho_1\sin\Theta_1,\ \varrho_2\sin\Theta_2,\ \varrho_3\sin\Theta_3,\ \ldots\ldots$$

convergente Reihen (18.), und es ist also auch die imaginäre Reihe selbst convergent (27.).

Ist L die Gränze, welcher, für wachsende n, die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich nähern, und $L > 1$; so nehme man die Größe T so, daß

$$L > T > 1$$

ist. Da $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich der Gränze L beliebig nähern kann, so wird es immer einen Werth von n geben, für welchen, und über welchen hinaus, immer

$$(\varrho_n)^{\frac{1}{n}} > T,\ \varrho_n > T^n$$

ist. Es werden also immer einmal die Glieder der Reihe

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots$$

sämmtlich, von einem gewissen Gliede an, die Glieder der Reihe

$$T^n,\ T^{n+1},\ T^{n+2},\ T^{n+3},\ T^{n+4},\ \ldots\ldots$$

übersteigen. Die Glieder der letztern Reihe wachsen aber, weil $T > 1$ ist, über alle Gränzen, so daß also auch die Glieder der erstern Reihe über alle Gränzen wachsen. Nach dem Artikel Unmögliche Größen (6.) ist

$$\varrho_n = \sqrt{p_n^2 + q_n^2},$$

woraus erhellet, daß ϱ_n nicht über alle Gränzen wachsen kann, wenn nicht wenigstens eine der Größen p_n, q_n, rücksichtlich ihres absoluten Werthes, über alle Gränzen wächst. Daher ist im vorliegenden Falle immer wenigstens eine der Reihen

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots ;$$
$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots ;$$

also auch jederzeit die von diesen beiden Reihen abhängende imaginäre Reihe divergent (27.). Daß eine Reihe, deren Glieder, rücksichtlich ihres absoluten Werths, über alle Gränzen wachsen, divergent ist, erhellet augenblicklich, weil für eine solche Reihe die Differenz

$$s_{n+m} - s_n ,$$

für $m = 1$, der Null nicht beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man n wachsen läßt, welches doch für jedes m Statt finden müßte, wenn die Reihe convergent seyn sollte.

Nach (7.) kann man nun dieses Theorem auch wieder auf folgenden Ausdruck bringen:

Wenn das Verhältniß

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$$

für wachsende n sich einer gewissen bestimmten Gränze nähert; so ist die entsprechende imaginäre Reihe convergent oder divergent, jenachdem diese Gränze $<$ oder >1 ist.

29. Seyen

$$p_0 + q_0\sqrt{-1},\ p_1 + q_1\sqrt{-1},\ p_2 + q_2\sqrt{-1}, \ldots ;$$
$$t_0 + u_0\sqrt{-1},\ t_1 + u_1\sqrt{-1},\ t_2 + u_2\sqrt{-1}, \ldots$$

convergente Reihen, deren Summen wir durch S und S' bezeichnen wollen; so sind auch

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots ;$$
$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots ;$$
$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots ;$$
$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

convergente Reihen (27.), und mögen daher respective die Summen s, s_1, s', s'_1 haben. Es ist folglich

$$S = s + s_1\sqrt{-1},\ S' = s' + s'_1\sqrt{-1}.$$

Die Reihen

$$p_0 + t_0,\ p_1 + t_1,\ p_2 + t_2,\ p_3 + t_3, \ldots ;$$
$$q_0 + u_0,\ q_1 + u_1,\ q_2 + u_2,\ q_3 + u_3, \ldots$$

sind gleichfalls convergent, und ihre Summen sind $s + s'$, $s_1 + s'_1$ (19.). Also ist auch

$$p_0 + t_0 + (q_0 + u_0)\sqrt{-1}$$
$$p_1 + t_1 + (q_1 + u_1)\sqrt{-1}$$
$$p_2 + t_2 + (q_2 + u_2)\sqrt{-1}$$
$$p_3 + t_3 + (q_3 + u_3)\sqrt{-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

d. i.

$$(p_0 + q_0\sqrt{-1}) + (t_0 + u_0\sqrt{-1})$$
$$(p_1 + q_1\sqrt{-1}) + (t_1 + u_1\sqrt{-1})$$
$$(p_2 + q_2\sqrt{-1}) + (t_2 + u_2\sqrt{-1})$$
$$(p_3 + q_3\sqrt{-1}) + (t_3 + u_3\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

eine convergente Reihe (27.), deren Summe =

$$s + s' + (s_1 + s'_1)\sqrt{-1} = s + s_1\sqrt{-1} + s' + s'_1\sqrt{-1},$$

d. i. $= S + S'$ ist.

30. Wenn

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ \ldots\ldots;$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \ldots\ldots$$

zwei convergirende imaginäre Reihen, und S, S' ihre Summen sind, die Moduli der einzelnen Glieder dieser beiden Reihen aber auch convergirende Reihen bilden; so ist

$$t_0 u_0$$
$$t_0 u_1 + t_1 u_0$$
$$t_0 u_2 + t_1 u_1 + t_2 u_0$$
$$t_0 u_3 + t_1 u_2 + t_2 u_1 + t_3 u_0$$
$$t_0 u_4 + t_1 u_3 + t_2 u_2 + t_3 u_1 + t_4 u_0$$
u. s. f. u. s. f.

eine convergirende imaginäre Reihe, deren Summe $= SS'$ ist.

Sey

$$t_n = \varrho_n (\cos\Theta_n + \sin\Theta_n \sqrt{-1})$$
$$u_n = \varrho'_n (\cos\Theta'_n + \sin\Theta'_n \sqrt{-1});$$

so sind nach der Voraussetzung

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ldots;$$
$$\varrho'_0,\ \varrho'_1,\ \varrho'_2,\ \varrho'_3,\ \varrho'_4,\ \ldots\ldots$$

convergirende Reihen. Folglich nähert nach (20.), für wachsende n, die Größe

$$\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1}$$
$$+ \{\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2} + \varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}\}$$
$$+ \{\varrho_{n-1}\varrho'_{n-3} + \varrho_{n-2}\varrho'_{n-2} + \varrho_{n-3}\varrho'_{n-1}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{\varrho_{n-1}\varrho'_1 + \varrho_{n-2}\varrho'_2 + \ldots + \varrho_2\varrho'_{n-2} + \varrho_1\varrho'_{n-1}\}$$

sich fortwährend der Null, welches also um so mehr von den absoluten Werthen der Größen

$$\begin{aligned}&\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1}\cos(\theta_{n-1}+\theta'_{n-1})\\+&\{\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2}\cos(\theta_{n-1}+\theta'_{n-2})+\varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}\cos(\theta_{n-2}+\theta'_{n-1})\}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+&\{\varrho_{n-1}\varrho'_{1}\cos(\theta_{n-1}+\theta'_{1})+\varrho_{n-2}\varrho'_{2}\cos(\theta_{n-2}+\theta'_{2})+\ldots\\&\ldots+\varrho_{2}\varrho'_{n-2}\cos(\theta_{2}+\theta'_{n-2})+\varrho_{1}\varrho'_{n-1}\cos(\theta_{1}+\theta'_{n-1})\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1}\sin(\theta_{n-1}+\theta'_{n-1})\\+&\{\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2}\sin(\theta_{n-1}+\theta'_{n-2})+\varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}\sin(\theta_{n-2}+\theta'_{n-1})\}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+&\{\varrho_{n-1}\varrho'_{1}\sin(\theta_{n-1}+\theta'_{1})+\varrho_{n-2}\varrho'_{2}\sin(\theta_{n-2}+\theta'_{2})+\ldots\\&\ldots+\varrho_{2}\varrho'_{n-2}\sin(\theta_{2}+\theta'_{n-2})+\varrho_{1}\varrho'_{n-1}\sin(\theta_{1}+\theta'_{n-1})\}\end{aligned}$$

gilt. Entwickelt man aber die Größe

$$\begin{aligned}&t_{n-1}u_{n-1}\\+&\{t_{n-1}u_{n-2}+t_{n-2}u_{n-1}\}\\+&\{t_{n-1}u_{n-3}+t_{n-2}u_{n-2}+t_{n-3}u_{n-1}\}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\+&\{t_{n-1}u_{1}+t_{n-2}u_{2}+\ldots+t_{2}u_{n-2}+t_{1}u_{n-1}\},\end{aligned}$$

nachdem man jede imaginäre Größe durch ihren Modulus ausgedrückt hat; so ist klar, daß der reelle Theil und der Coefficient von $\sqrt{-1}$ in der aus dieser Entwickelung hervorgehenden Größe die beiden vorhergehenden durch Cosinus und Sinus ausgedrückten Größen sind, welche wir durch P und Q bezeichnen wollen. Die Summen der n ersten Glieder der beiden gegebenen Reihen bezeichne man durch S_n, S'_n, und die Summe der n ersten Glieder der Reihe, deren Convergenz bewiesen werden soll, durch S''_n; so ist, wie in (20.),

$$\begin{aligned}&S_nS'_n-S''_n=\\&t_{n-1}u_{n-1}\\+&\{t_{n-1}u_{n-2}+t_{n-2}u_{n-1}\}\\+&\{t_{n-1}u_{n-3}+t_{n-2}u_{n-2}+t_{n-3}u_{n-1}\}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\+&\{t_{n-1}u_{1}+t_{n-2}u_{2}+\ldots+t_{2}u_{n-2}+t_{1}u_{n-1}\}.\end{aligned}$$

Also

$$S_nS'_n-S''_n=P+Q\sqrt{-1},$$

wo P und Q, für wachsende n, sich der Null fortwährend und beliebig nähern. Daher nähert auch $S_nS'_n-S''_n$, für wachsende n, sich der Null immer mehr und mehr. Die beiden gegebenen Reihen sind aber convergent. Also nähert, für wachsende n, $S_nS'_n$ sich der Gränze SS', und S''_n nähert sich also, für wachsende n, gleichfalls der Gränze SS', so daß folglich die Reihe, für welche die Summe der n ersten Glieder durch S''_n

bezeichnet wurde, convergent, und ihre Summe $= SS'$ ist, w. z. b. w.

30. Betrachten wir nun ferner noch die Reihe

$$a_0(\cos\Theta_0 + \sin\Theta_0\sqrt{-1})$$
$$a_1 x(\cos\Theta_1 + \sin\Theta_1\sqrt{-1})$$
$$a_2 x^2(\cos\Theta_2 + \sin\Theta_2\sqrt{-1})$$
$$a_3 x^3(\cos\Theta_3 + \sin\Theta_3\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n x^n(\cos\Theta_n + \sin\Theta_n\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die numerischen Werthe von a_n und x wollen wir durch α_n und ξ bezeichnen. Die Gränze, welcher sich die größten Werthe von $(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$ nähern, wenn n wächst, sey $= A$; so ist $A\xi$ die Gränze, welcher sich die größten Werthe von $(\alpha_n\xi^n)^{\frac{1}{n}}$ nähern, wenn n wächst. $A\xi$ ist $<$ oder $>$ 1, jenachdem

$$\xi < \frac{1}{A} \text{ oder } \xi > \frac{1}{A}$$

ist, oder jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x = -\frac{1}{A},\ x = +\frac{1}{A}$$

enthalten ist, oder nicht. Setzen wir nun, eine willkührliche Folge der Vorzeichen der einzelnen Glieder annehmend, daß die Reihe

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3,\ a_4 x^4,\ a_5 x^5,\ \ldots.$$

mit der Reihe

$$-\alpha_0,\ \alpha_1\xi,\ -\alpha_2\xi^2,\ -\alpha_3\xi^3,\ \alpha_4\xi^4,\ \alpha_5\xi^5,\ \ldots.$$

übereinstimme. Nach (28.) ist die Reihe

$$\alpha_0\{\cos(\pi+\Theta_0) + \sin(\pi+\Theta_0)\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_1\xi\{\cos\Theta_1 + \sin\Theta_1\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_2\xi^2\{\cos(\pi+\Theta_2) + \sin(\pi+\Theta_2)\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_3\xi^3\{\cos(\pi+\Theta_3) + \sin(\pi+\Theta_3)\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_4\xi^4\{\cos\Theta_4 + \sin\Theta_4\sqrt{-1}\}$$
$$\alpha_5\xi^5\{\cos\Theta_5 + \sin\Theta_5\sqrt{-1}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

convergent oder divergent, jenachdem $A\xi <$ oder > 1, d. i. jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x = -\frac{1}{A},\ x = +\frac{1}{A}$$

enthalten ist, oder nicht. Aus obiger Reihe erhält man nach einfachen goniometrischen Sätzen die Reihe:

$$
\begin{array}{l}
-\quad \alpha_0(\cos\Theta_0+\sin\Theta_0\sqrt{-1})\\
\alpha_1\xi(\cos\Theta_1+\sin\Theta_1\sqrt{-1})\\
-\alpha_2\xi^2(\cos\Theta_2+\sin\Theta_2\sqrt{-1})\\
-\alpha_3\xi^3(\cos\Theta_3+\sin\Theta_3\sqrt{-1})\\
\alpha_4\xi^4(\cos\Theta_4+\sin\Theta_4\sqrt{-1})\\
\alpha_5\xi^5(\cos\Theta_5+\sin\Theta_5\sqrt{-1})\\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

d. i. die Reihe

$$
\begin{array}{l}
a_0(\cos\Theta_0+\sin\Theta_0\sqrt{-1})\\
a_1x(\cos\Theta_1+\sin\Theta_1\sqrt{-1})\\
a_2x^2(\cos\Theta_2+\sin\Theta_2\sqrt{-1})\\
a_3x^3(\cos\Theta_3+\sin\Theta_3\sqrt{-1})\\
a_4x^4(\cos\Theta_4+\sin\Theta_4\sqrt{-1})\\
a_5x^5(\cos\Theta_5+\sin\Theta_5\sqrt{-1})\\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

welche also auch convergent oder divergent ist, jenachdem x zwischen den Gränzen

$$x=-\frac{1}{A},\ x=+\frac{1}{A}$$

enthalten ist, oder nicht.

Nach einer schon öfter gebrauchten Schlußweise ist die Gränze A einerlei mit der Gränze, welcher, für wachsende n, der numerische Werth von

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

sich nähert.

Ist in der Reihe

$$a_0,\ a_1z,\ a_2z^2,\ a_3z^3,\ a_4z^4,\ \ldots.$$

z eine imaginäre Größe, so kann man bekanntlich

$$z=x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),\ z^n=x^n(\cos n\Theta+\sin n\Theta\sqrt{-1})$$

setzen, wodurch die obige Reihe auf die Form

$$
\begin{array}{l}
a_0\\
a_1x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\
a_2x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
a_3x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
a_4x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

gebracht wird, unter welcher Form die Convergenz oder Divergenz der Reihe nun nach den vorher bewiesenen Kriterien beurtheilt werden kann.

Die in (23.) und (24.) bewiesenen Sätze gelten auch, wenn x eine imaginäre Größe ist; nur müssen, in Bezug auf den Satz in (24.), die Moduli der einzelnen Glieder der Reihen

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3,\ a_4 x^4,\ \ldots\ ;$$
$$b_0,\ b_1 x,\ b_2 x^2,\ b_3 x^3,\ b_4 x^4,\ \ldots\ ;$$

auch convergirende Reihen bilden, wenn dieser Satz richtig bleiben soll (m. vergl. 29.).

V. Einige Anwendungen der bestimmten Integrale bei Beurtheilung der Convergenz und Divergenz einer Reihe.

31. Sey $f(x)$ eine Function von x, welche für positive Werthe von x beständig positiv bleibt. Ist nun das Verhältniß

$$\frac{f(x+\Theta)}{f(x)}$$

für unendlich große Werthe von x, und für alle die Einheit nicht übersteigende Werthe von Θ, beständig zwischen zwei endlichen, aber von Null verschiedenen, positiven Gränzen A und B enthalten; so ist die Reihe

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots$$

convergent, wenn, indem n und m positive ganze Zahlen bezeichnen, für unendlich große n das bestimmte Integral

$$\int_n^{n+m} f(x)\,\partial x$$

verschwindet, welches auch der Werth der Zahl m seyn mag. Im entgegengesetzten Falle ist die obige Reihe divergent. Wir nehmen hierbei auch an, daß $f(x)$ eine stetige Function sey.

Bevor wir zu dem Beweise dieses Satzes übergehen, schicken wir folgende Bemerkung über die bestimmten Integrale voraus. Nach dem Art. Bestimmtes Integral (5.) ist

$$\int_a^A f(x)\,\partial x$$

das Aggregat der Producte, welche man erhält, wenn man die zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ liegenden Werthe von $f(x)$ mit $\frac{A-a}{n}$ multiplicirt, desto genauer, je größer n ist, vorausgesetzt, daß $f(x)$, wenigstens zwischen den obigen Gränzen stetig ist. Nach dem Art. Mittel (11.) i. d. Z. ist also

$$\int_a^A f(x)\,\partial x = (A-a)M,$$

wo M ein gewisses Mittel zwischen den Werthen der Function

f(x) bezeichnet, welche zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ liegen. Da nun M zwischen dem kleinsten und größten dieser Werthe enthalten (a. a. O.), und die Function f(x) zwischen den angegebenen Gränzen stetig ist; so ist klar, daß sich M unter den zwischen diesen Gränzen liegenden Werthen der Function vorfinden muß, und daß man daher

$$M = f\{a+\Theta(A-a)\}$$

setzen kann, wo Θ zwischen Null und der Einheit enthalten ist. Also ist immer

$$\int_a^A f(x)\partial x = (A-a)f\{a+\Theta(A-a)\}.$$

Am deutlichsten wird das Obige, wenn man sich zwischen den Gränzen $x=a$, $x=A$ die Werthe der Function f(x) als Ordinaten einer Curve dargestellt denkt.

Sey nun, um jetzt zu dem Beweise unsers obigen Satzes überzugehen,

$$s_n = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$
$$s_{n+m} - s_n = f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+m-1).$$

Nach dem Art. Bestimmtes Integral (6.) ist

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x = \int_n^{n+1} f(x)\partial x + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\partial x + \ldots + \int_{n+m-1}^{n+m} f(x)\partial x$$

$$= \int_0^1 f(x+n)\partial x + \int_0^1 f(x+n+1)\partial x + \ldots + \int_0^1 f(x+n+m-1)\partial x$$

d. i. nach dem vorher bewiesenen Satze von den bestimmten Integralen:

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x =$$
$$f(n+\Theta) + f(n+1+\Theta_1) + \ldots + f(n+m-1+\Theta_{m-1}),$$

wo die Größen Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{m-1} sämmtlich zwischen 0 und 1 enthalten sind. Nach der Voraussetzung sind aber die Verhältnisse

$$\frac{f(n+\Theta)}{f(n)}, \frac{f(n+1+\Theta_1)}{f(n+1)}, \ldots \frac{f(n+m-1+\Theta_{m-1})}{f(n+m-1)},$$

für unendlich große n sämmtlich zwischen den Gränzen A und B enthalten. Nach dem Art. Mittel (7.) i. d. Z. ist also auch

$$\frac{f(n+\Theta) + f(n+1+\Theta_1) + \ldots + f(n+m-1+\Theta_{m-1})}{f(n) + f(n+1) + \ldots + f(n+m-1)}$$

$$= \frac{\int_n^{n+m} f(x)\partial x}{s_{n+m} - s_n}$$

zwischen denselben Gränzen enthalten. Folglich ist, für unendlich große n, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n$$

zwischen den Gränzen

$$\frac{1}{A}.\int_n^{n+m} f(x)\partial x,\ \frac{1}{B}.\int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

enthalten, und es wird also diese Differenz, da A und B nicht $= 0$ sind, für unendlich große n, $= 0$, wenn das Integral

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

für unendlich große n verschwindet, wobei immer m als beliebig angenommen wird. In diesem Falle convergirt also nach (1.) die Reihe

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots.$$

Verschwindet aber für unendlich große n das Integral

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

nicht; so ist, weil nach der Voraussetzung dieses Integral positiv ist, und auch A und B, also auch die Gränzen

$$\frac{1}{A}.\int_n^{n+m} f(x)\partial x,\ \frac{1}{B}.\int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

positiv sind, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n,$$

für unendlich große n, offenbar nicht $= 0$, in diesem Falle also die in Rede stehende Reihe divergent.

32. Sey jetzt

$$\frac{f(x+\Theta)}{f(x)}$$

immer zwischen den beiden Gränzen

$$1 \text{ und } \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

enthalten, und die zweite Größe nehme, für wachsende x, entweder immer zu oder immer ab. Im ersten Falle kann man, wenn

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} < 1$$

ist, offenbar

$$A = \frac{f(1)}{f(0)},\ B = 1;$$

wenn

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} > 1$$

ist, dagegen

$$A = 1,\ B = \frac{f(\infty+1)}{f(\infty)}$$

setzen. Eben so kann man im zweiten Falle, wenn

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} < 1$$

ist, offenbar

$$A = \frac{f(\infty + 1)}{f(\infty)}, \quad B = 1 ;$$

wenn

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} > 1$$

ist, dagegen

$$A = 1, \quad B = \frac{f(1)}{f(0)}$$

setzen, so daß also der in (31.) bewiesene Satz in diesen Fällen immer seine Anwendung findet.

33. Sey z. B.

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} ;$$

so ist

$$\frac{f(x+\theta)}{f(x)} = \left\{\frac{1+x}{1+x+\theta}\right\}^\alpha = \left\{\frac{1}{1+\frac{\theta}{1+x}}\right\}^\alpha$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left\{\frac{1+x}{1+x+1}\right\}^\alpha = \left\{\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}\right\}^\alpha .$$

Also ist offenbar

$$\frac{f(x+\theta)}{f(x)}$$

immer zwischen den Gränzen

$$1 \text{ und } \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

enthalten. Auch ist immer

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} < 1 \text{ oder } \frac{f(x+1)}{f(x)} > 1 ,$$

jenachdem α positiv oder negativ ist. Es ist nun

$$\int_n^{n+m} f(x)\,\partial x = \frac{(n+m+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} .$$

Für unendlich große n verschwindet dieses Integral nur dann, wenn $\alpha > 1$ ist. Für $\alpha < 1$ verschwindet dasselbe nicht. Demnach ist die Reihe

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{5^\alpha}, \ldots.$$

convergent oder divergent, jenachdem $\alpha >$ oder < 1 ist. Für $\alpha = 1$ wird diese Reihe

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots.$$

und das obige Integral ist =

$$\int_n^{n+m} \frac{\partial x}{1+x} = l(n+m+1) - l(n+1)$$

$$= l\left\{\frac{n+m+1}{n+1}\right\} = l\left\{1 + \frac{m}{n+1}\right\},$$

woraus sogleich erhellet, daß dieses Integral für $n = \infty$ nur dann verschwindet, wenn m einen endlichen Werth hat, daß dies aber nicht der Fall ist, wenn man z. B. $m = n$, $= 2n$, $= 3n$, ... setzt, so daß folglich die in Rede stehende Reihe divergent ist.

34. Wenn die Function $f(x)$ für positive Werthe von x stets positiv bleibt, und, für unendlich große Werthe von x, abnimmt, wenn x zunimmt; so ist die Reihe

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots.$$

convergent oder divergent, jenachdem das Integral

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

für unendlich große Werthe von n verschwindet, oder nicht verschwindet.

Nach (31.) ist

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x =$$

$$f(n+\Theta) + f(n+1+\Theta_1) + \ldots + f(n+m-1+\Theta_{m-1}),$$

wo Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{m-1} dieselbe Bedeutung haben, wie a. a. O. Nach der Voraussetzung ist also

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x < f(n) + f(n+1) + \ldots + f(n+m-1)$$

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x > f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+m)$$

d. i.

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x < s_{n+m} - s_n$$

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x > s_{n+m+1} - s_{n+1},$$

für unendlich große Werthe von n. Also ist auch

$$\int_{n-1}^{n+m-1} f(x)\partial x < s_{n+m-1} - s_{n-1}$$

$$\int_{n-1}^{n+m-1} f(x)\partial x > s_{n+m} - s_n.$$

Demnach

$$s_{n+m} - s_n > \int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

$$s_{n+m} - s_n < \int_{n-1}^{n+m-1} f(x)\partial x$$

und es ist folglich

$$s_{n+m} - s_n$$

zwischen den Gränzen

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x, \int_{n-1}^{n+m-1} f(x)\partial x$$

enthalten. Verschwindet nun

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x$$

für $n = \infty$, so gilt dies offenbar auch von dem zweiten Integral, und es ist also in diesem Falle

$$s_{n+m} - s_n = 0,$$

d. i. die obige Reihe convergent. Ist aber vorstehendes Integral nicht $= 0$, so ist klar, weil offenbar nach der Voraussetzung beide obigen Integrale positiv sind, daß die Differenz

$$s_{n+m} - s_n$$

nicht $= 0$, die Reihe also divergent ist.

Sey z. B.

$$f(x) = \frac{l(1+x)}{1+x};$$

so ist die Reihe

$$0, \frac{l2}{2}, \frac{l3}{2}, \frac{l4}{4}, \frac{l5}{5}, \ldots,$$

und

$$\int_n^{n+m} f(x)\partial x = \tfrac{1}{2}\{l(n+m+1)\}^2 - \tfrac{1}{2}\{l(n+1)\}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\{l(n+m+1) + l(n+1)\}.l\left\{1 + \frac{m}{n+1}\right\}.$$

Für $m = n, = 2n, = 3n, = \ldots$ behält also dieses Integral, auch für $n = \infty$, einen endlichen Werth, so daß folglich obige Reihe divergent ist.

35. Die Reihe

$$f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$$

ist convergent, wenn, für $n = \infty$, nicht bloß das Product $nf(n)$, sondern auch das Product

$$n^{1+\delta} f(n),$$

für jedes positive, noch so kleine, δ, verschwindet. Dagegen ist die in Rede stehende Reihe divergent, wenn das Product

$$nf(n)$$

eine gewisse positive Größe A beständig übersteigt, indem man n über eine gewisse bestimmte Gränze hinaus wachsen läßt.

Sey N die größte unter den Größen

$$n^{1+\delta} f(n), (n+1)^{1+\delta} f(n+1), \ldots (n+m-1)^{1+\delta} f(n+m-1);$$

so ist offenbar

$$s_{n+m} - s_n = f(n) + f(n+1) + \ldots f(n+m-1)$$
$$< N\left\{\frac{1}{n^{1+\delta}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\delta}} + \ldots + \frac{1}{(n+m-1)^{1+\delta}}\right\}.$$

Für $n = \infty$ verschwinden nach der Voraussetzung und nach (33.) beide Factoren dieses Products; also ist in diesem Falle unsere Reihe convergent. Man hat hierbei zu beobachten, daß nach (33.) die Reihe

$$1, \frac{1}{2^{1+\delta}}, \frac{1}{3^{1+\delta}}, \frac{1}{4^{1+\delta}}, \frac{1}{5^{1+\delta}}, \ldots.$$

convergent ist.

Ist, von irgend einem Werthe von n an, $nf(n)$ immer größer als die positive Größe A; so ist

$$s_{n+m} - s_n > A\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+m-1}\right\}.$$

Folglich ist, weil die Reihe

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots.$$

divergent ist (33.), auch die Reihe

$$f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots.$$

divergent.

Hieraus folgt augenblicklich z. B. die Convergenz der Reihe

$$0, \frac{1}{2^\alpha l2}, \frac{1}{3^\alpha l3}, \frac{1}{4^\alpha l4}, \frac{1}{5^\alpha l5}, \ldots.,$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(x+1)^\alpha l(x+1)}$$

ist, vorausgesetzt, daß $\alpha > 1$ ist.

Einige Sätze über die Convergenz der Reihen s. m. auch Thl. IV. S. 590. ff. Die in diesem Artikel mitgetheilten Sätze sind sämmtlich, wie schon erinnert, von Cauchy gefunden, welcher sich durch die Erfindung derselben ein sehr bedeutendes Verdienst um die genaue Theorie der Reihen überhaupt erworben hat, namentlich in Bezug auf die Anwendung derselben zur numerischen annähernden Berechnung der durch sie dargestellten Größen.

Auch in dem Art. Binomischer Lehrsatz in diesen Zus. sind einige der obigen Sätze von der Convergenz der Reihen, aber auf andere Art, wie in gegenwärtigem Artikel, bewiesen, mitgetheilt, und jene Beweise können daher mit den hier gegebenen verglichen werden. Einen sehr lesenswerthen Aufsatz über die Convergenz und Divergenz der Reihen von J. L. Raabe s. m. auch in Baumgartner und Ettinghausens Zeitschrift für Physik und Mathematik. Bd. 10. Heft 1. Wien. 1831. S. 41. Auch s. m. Eytelweins Analysis. II. S. 719. und über die sogenannten halbconvergenten Reihen Legendre Exercices de calcul integral. T. I. p. 267.

Coordinaten. Die Veränderung der Coordinaten ist eine für analytische Geometrie und höhere Mechanik in jeder Beziehung so wichtige Operation, daß es nöthig ist, hier alle dazu dienende Formeln an einem Orte beisammen zu haben. Wir gehen dabei sogleich von dem zusammengesetztern Falle der Coordinaten im Raume aus, weil es möglich ist, von diesen zu Coordinaten in der Ebene überzugehen, wenn man nur eine Coordinate = 0 setzt.

1. Denken wir uns also jetzt drei auf einander senkrechte gerade Linien, welche sich in dem Punkte O schneiden, und die Coordinatenaxen genannt werden. Diese drei Axen bestimmen drei auf einander senkrechte Ebenen, welche die Coordinatenebenen heißen. Ist nun M irgend ein Punkt im Raume, so heißen die drei von ihm auf die Coordinatenebenen gefällten Perpendikel seine Coordinaten, welche auch erhalten werden, wenn man sich durch M drei mit den Coordinatenebenen parallele Ebenen gelegt denkt, indem dann die von diesen Ebenen auf den Coordinatenaxen von dem Punkte O, welcher in dieser Beziehung der Anfang der Coordinaten genannt wird, aus abgeschnittenen Stücke offenbar den Coordinaten des Punktes M der Größe und Lage (in Beziehung auf die Coordinatenebenen) nach gleich sind. Um aber die Lage eines Punktes im Raume durch seine Coordinaten vollkommen zu bestimmen, legt man jeder Coordinatenaxe einen positiven und einen negativen Theil, jeder Coordinatenebene eine positive und eine negative Seite bei. Jede Coordinatenaxe wird nämlich durch den Anfang der Coordinaten in zwei Theile getheilt. Alle auf dem einen Theile liegende Coordinaten werden als positiv, alle auf dem andern Theile liegende als negativ betrachtet. Jener Theil heißt der positive, dieser der negative Theil der entsprechenden Axe. Die Seite einer jeden Coordinatenebene, auf welcher der positive Theil der auf ihr senkrechten Coordinatenaxe liegt, heißt ihre positive, die andere ihre negative Seite. Alle auf der positiven Seite einer Coordinatenebene liegende Coordinaten sind natürlich als positiv, so wie alle auf ihrer negativen Seite liegende Coordinaten als negativ zu betrachten. Man sieht leicht, daß nur unter diesen Voraussetzungen die Lage eines Punktes im Raume durch seine drei Coordinaten völlig bestimmt wird. Wäre nämlich bloß die absolute Größe einer jeden der drei Coordinaten bekannt, so würde sich immer noch fragen, in welchem der acht körperlichen Winkel, die durch die drei Coordinatenebenen gebildet werden, der entsprechende Punkt liege, da offenbar in jedem dieser acht Winkel dreien nur ihrer absoluten Größe nach bekannten Coordinaten ein Punkt entsprechen kann. Kommt aber zu der Bestimmung der absoluten Größe der Coordinaten noch die Bestimmung ihrer Lage gegen die Coordinatenebenen vermittelst ihrer Zeichen, ist z. B. die erste Coordinate positiv, die zweite und dritte

negativ, so ist hierin zugleich die Bestimmung enthalten, daß der entsprechende Punkt in dem der genannten acht körperlichen Winkel liegen müsse, welcher von dem positiven Theile der ersten, und den negativen Theilen der zweiten und dritten Axe als Kanten gebildet wird. In den meisten Fällen werden die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume, mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen, durch x, y, z, bezeichnet. Die Coordinatenaxen heißen die Axe der x, der y und der z, jenachdem sie respective den durch x, y, z bezeichneten Coordinaten parallel sind, so wie die drei Coordinatenebenen die Ebene der xy, der xz und der yz genannt werden, jenachdem auf ihnen respective die Axe der z, y, x senkrecht ist. Alles Vorhergehende bezieht sich auf den Fall, wenn die Coordinatenaxen oder Coordinatenebenen senkrecht auf einander sind, in welchem die Coordinaten rechtwinklige Coordinaten genannt werden. Man übersieht aber leicht, daß sämmtliche obige Begriffe sich unmittelbar auch auf den Fall ausdehnen lassen, wenn die Coordinatenaxen beliebige schiefe Winkel mit einander einschließen, in welchem die Coordinaten, die immer durch den gegebenen Punkt mit den Coordinatenaxen parallel gezogen gedacht werden müssen, schiefwinklige Coordinaten genannt werden. Irgend drei gegebene Coordinatenaxen bilden ein Coordinatensystem. Sind die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein bestimmtes Coordinatensystem gegeben, oder werden als gegeben betrachtet, und man soll durch diese Coordinaten die Coordinaten des Punktes in Bezug auf ein anderes gegebenes System ausdrücken, so nennt man dies im Allgemeinen eine Verwandelung oder Veränderung der Coordinaten. Das erste System heißt das primitive, das andere das secundäre oder neue System. Die zu dieser wichtigen Operation dienenden allgemeinen Formeln im Zusammenhange aufzustellen, ist der Zweck gegenwärtigen Artikels.

2. Dazu ist zunächst folgende Bestimmung nöthig. Sey M ein Punkt im Raume, bestimmt durch seine Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges System. MA sey eine willkührliche von M ausgehende gerade Linie, so daß nämlich M als Anfangspunkt dieser Linie, und überhaupt nur der von M an in's Unendliche sich erstreckende Theil derselben betrachtet, diese Linie also nicht nach der andern Seite hin über M hinaus verlängert gedacht wird. Von M aus ziehe man, parallel mit den primitiven Coordinatenaxen, und nach denselben Seiten hin, nach welchen von dem Anfange der Coordinaten aus deren positive Theile liegen, drei gerade Linien. Die von MA mit diesen drei Linien eingeschlossenen, 180° nie übersteigenden Winkel, heißen die von MA mit den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, und es ist klar, daß durch diese drei Winkel die Lage der Linie MA im Raume vollkommen bestimmt ist. Ist M selbst der Anfang der Coordinaten, so ist klar, daß die von M aus mit den Coordinatenaxen parallel gezogenen Linien mit den positiven Theilen der Coordina-

tenaxen selbst zusammenfallen. Sind α, β, γ die von MA mit den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, so sind offenbar $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$ die von der der MA entgegesetzten Linie MA', welche man erhält, wenn MA über M hinaus verlängert wird, mit den entsprechenden Axen eingeschlossenen Winkel. Die Lage der drei Axen eines neuen Systems wird immer bestimmt einmal durch die Coordinaten des Anfangspunktes des neuen Systems in Bezug auf das primitive System, und zweitens durch die Winkel, welche der positive Theil einer jeden der neuen Coordinatenaxen mit den primitiven Axen einschließt, immer den vorher gegebenen Bestimmungen gemäß. Die primitiven Coordinaten sollen im Folgenden immer durch x, y, z, die secundären durch x', y', z' bezeichnet werden. Die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems in Bezug auf das primitive seyen immer a, b, c, und die von der Axe der x' mit den Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel wollen wir stets durch X, Y, Z, die von der Axe der y' mit den Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel durch X', Y', Z', so wie die von der Axe der z' mit den Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel durch X'', Y'', Z'' bezeichnen.

3. Wir gehen von der ganz einfachen Betrachtung zweier mit einander parallelen Ebenen E und E' aus, indem wir jeder derselben eine positive und eine negative Seite beilegen, so daß jedoch die positive und negative Seite der Ebene E' von dieser Ebene aus nach derselben Gegend hin genommen wird, wie respective die positive und negative Seite der Ebene E von dieser Ebene aus. Die Entfernung der Ebene E' von der Ebene E, positiv oder negativ genommen, jenachdem E' auf der positiven oder negativen Seite der Ebene E liegt, sey $= e$; die Entfernungen irgend eines Punktes M von den Ebenen E und E' mit Rücksicht auf ihre Zeichen seyen respective $= t$, und $= t'$. Ist nun zuerst e positiv, so können folgende Fälle Statt finden. Liegt M auf der positiven Seite der Ebene E', so sind t und t' beide positiv, t ist größer als t', und offenbar $t = e + t'$. Liegt M auf der negativen Seite von E', zugleich aber auf der positiven Seite von E, d. i. zwischen den beiden Ebenen, so ist t positiv, t' negativ, $-t'$ positiv, und offenbar $t + (-t') = e$, d. i. $t - t' = e$, $t = e + t'$. Liegt endlich M auf der negativen Seite von E, so sind t und t' beide negativ, also $-t$ und $-t'$ beide positiv, $-t'$ ist größer als $-t$, und offenbar $-t' = e + (-t)$, d. i. $-t' = e - t$, $t = e + t'$. Läge M in der Ebene E', oder in der Ebene E, so wäre im ersten Falle $t' = 0$, $t = e$, im andern $t' = -e$, $t = 0$. Folglich im ersten Falle $t = e + 0 = e + t'$, im andern $t = e + (-e) = e + t'$. Demnach ist in allen Fällen $t = e + t'$. Wäre nun ferner e negativ, so vertausche man, welches offenbar verstattet ist, die positive und negative Seite einer jeden der beiden Ebenen mit einander. Dann ist das positive $-e$ die Entfernung der beiden

Ebenen von einander, und $-t$, $-t'$ sind die Entfernungen des Punktes M von denselben. Also nach der so eben bewiesenen Gleichung, da nun $-e$ positiv ist, $-t = (-e) + (-t')$, d. i. $-t = -e - t'$, $t = e + t'$. Folglich ist in allen Fällen mit völliger Allgemeinheit

$$t = e + t'.$$

Daß alles dieses auch gilt, wenn die durch e, t, t' bezeichneten Linien nicht auf den Ebenen E und E' senkrecht, sondern nur sämmtlich unter einander parallel sind, fällt sogleich in die Augen.

4. Will man nun von irgend einem Systeme zu einem andern diesem parallelen Systeme übergehen, wobei wir voraussetzen, daß in beiden Systemen die positiven Coordinaten von den Anfangspunkten aus nach denselben Gegenden hin genommen werden, so folgt aus (3.) sogleich, daß in allen Fällen mit völliger Allgemeinheit

$$x = a + x', \; y = b + y', \; z = c + z'$$

ist, wo immer a, b, c die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems in Bezug auf das primitive, und x, y, z; x', y', z' die Coordinaten eines willkührlichen Punktes M in Bezug auf das primitive und secundäre System bezeichnen.

5. So lange nichts Anderes erinnert wird, wollen wir immer annehmen, daß das primitive System ein rechtwinkliges, das secundäre ein beliebiges schiefwinkliges System sey, welches mit dem primitiven einerlei Anfangspunkt hat. Was die Zeichnungen betrifft, auf welche wir uns im Folgenden beziehen werden, so bemerken wir ein für alle Mal, daß dieselben stets ganz allgemein aufzufassen sind, und bloß zur Erläuterung unserer allgemeinen Betrachtungen dienen werden, welche auch sehr gut ohne dieselben bestehen könnten.

6. Zuerst nehmen wir an, daß der willkührliche Punkt M in einer der secundären Axen, z. B. der Axe der x' liege, wobei Fig. 7. zu vergleichen ist. Man ziehe nach dem Anfange O der Coordinaten die Linie OM, und setze also $\pm OM = x'$. Denkt man sich ferner durch M drei Linien gezogen, welche den Ebenen der yz, xz, xy parallel sind, und respective die Axen der x, y, z in den Punkten A, B, C schneiden, so ist klar, daß durch die Linien OA, OB, OC die absoluten Größen der Coordinaten des Punktes M in Bezug auf das primitive System dargestellt werden. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem M in dem positiven oder negativen Theile der Axe der x' liegt, d. i. jenachdem $x' = +OM$, oder $= -OM$ ist. Findet das Erste Statt, so sind X, Y, Z (2.) die Winkel, welche OM selbst mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschließt, und die Coordinaten x, y, z des Punktes M, mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen, sind offenbar die Cosinus der Winkel X, Y, Z für OM als Radius, so daß also

$$x = OM.\cos X,\ y = OM.\cos Y,\ z = OM.\cos Z,$$

oder, weil wir angenommen haben, daß $+ OM = x'$ sey,

$$x = x'\cos X,\ y = x'\cos Y,\ z = x'\cos Z$$

ist.

Liegt ferner M in dem negativen Theile der Axe der x', ist also $- OM = x'$, so sind X, Y, Z nicht die Winkel, welche OM selbst mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschließt, indem diese Winkel von der Verlängerung von OM über O hinaus nach der andern Seite hin mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossen werden. Die von OM selbst mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel sind $180° - X$, $180° - Y$, $180° - Z$ (2.), und die Coordinaten x, y, z des Punktes M sind offenbar, mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen, die Cosinus dieser Winkel in Bezug auf OM als Radius, so daß also

$$x = OM.\cos(180° - X),\ y = OM.\cos(180° - Y),\ z = OM.\cos(180° - Z)$$

ist. Aber $- OM = x'$, $OM = - x'$. Also

$$x = (-x')(-\cos X),\ y = (-x')(-\cos Y),\ z = (-x')(-\cos Z);$$

d. i.

$$x = x'\cos X,\ y = x'\cos Y,\ z = x'\cos Z;$$

so daß also diese Gleichungen allgemein sind, und für alle Fälle gelten.

Jenachdem nun der Punkt M in der Axe der x', oder y', oder z' liegt, ist respective:

$$x = x'\cos X,\ y = x'\cos Y,\ z = x'\cos Z;$$
$$x = y'\cos X',\ y = y'\cos Y',\ z = y'\cos Z';$$
$$x = z'\cos X'',\ y = z'\cos Y'',\ z = z'\cos Z''.$$

7. Schreiten wir nun ferner zu dem Falle fort, wo der Punkt M in einer der secundären Coordinatenebenen, z. B. in der Ebene der $x'y'$ liegt, wobei Fig. 8. zu vergleichen ist. Durch M denke man sich in der Ebene der $x'y'$ mit den Axen der x' und y' Parallelen gezogen, deren erstere die Axe der y' in dem Punkte O'' schneide. Durch diesen Punkt als Anfangspunkt lege man das dem primitiven parallele System der Coordinaten x'', y'', z''. Betrachtet man nun die durch M mit der Axe der x' gezogene Parallele als eine neue Axe der x', in welcher der Punkt M liegt, so sind die von deren positivem Theile mit den Axen der x'', y'', z'' eingeschlossenen Winkel offenbar X, Y, Z, und folglich, weil augenscheinlich $O''M$ jederzeit der Größe und Lage nach $= x'$ ist, nach (6.):

$$x'' = x'\cos X,\ y'' = x'\cos Y,\ z'' = x'\cos Z.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Punktes O'' in Bezug auf das primitive System durch a_1, b_1, c_1, so ist, weil das y' des Punktes O'' offenbar mit dem y' des Punktes M einerlei ist, da der Punkt O'' in der Axe der y' liegt, ganz eben so nach (6.):

$$a_1 = y' \cos X', \; b_1 = y' \cos Y', \; c_1 = y' \cos Z'.$$

Nun ist aber für den Punkt M nach (4.)

$$x = a_1 + x'', \; y = b_1 + y'', \; z = c_1 + z''.$$

Also, jenachdem der Punkt M in der Ebene $x'y'$, oder in der Ebene der $x'z'$, oder in der Ebene $y'z'$ liegt:

$$x = x' \cos X + y' \cos X', \; y = x' \cos Y + y' \cos Y', \; z = x' \cos Z + y' \cos Z';$$

oder

$$x = x' \cos X + z' \cos X'', \; y = x' \cos Y + z' \cos Y'', \; z = x' \cos Z + z' \cos Z'';$$

oder

$$x = y' \cos X' + z' \cos X'', y = y' \cos Y' + z' \cos Y'', z = y' \cos Z' + z' \cos Z''.$$

8. Habe nun endlich, um zu dem allgemeinsten Falle überzugehen, der Punkt M eine ganz willkührliche Lage im Raume, wobei Fig. 9. zu vergleichen ist. Durch M lege man eine mit der Ebene der $x'y'$ parallele Ebene, welche die Axe der z' in dem Punkte O'' schneide, und denke sich durch O'' drei mit den primitiven Axen parallele rechtwinklige Axen gelegt, in Bezug auf welche die Coordinaten des Punktes M durch x''', y''', z''' bezeichnet werden sollen. Die von den Axen der x'', y'' (vergl. die Figur) mit den Axen der x''', y''', z''' eingeschlossenen Winkel sind offenbar $X, Y, Z; X', Y', Z'$. Also nach (7.), da M in der Ebene der $x''y''$ liegt:

$$x''' = x'' \cos X + y'' \cos X', \; y''' = x'' \cos Y + y'' \cos Y', \; z''' = x'' \cos Z + y'' \cos Z'.$$

Aber offenbar mit völliger Allgemeinheit:

$$x'' = x', \; y'' = y'.$$

Also

$$x''' = x' \cos X + y' \cos X', y''' = x' \cos Y + y' \cos Y', z''' = x' \cos Z + y' \cos Z'.$$

Da nun der Punkt O'' in der Axe der z' liegt, und das z' des Punktes O'' offenbar mit dem z' des Punktes M einerlei ist, so ist, wenn wir die Coordinaten des Punktes O'' in Bezug auf das primitive System durch a_1, b_1, c_1 bezeichnen, nach (6.):

$$a_1 = z' \cos X'', \; b_1 = z' \cos Y'', \; c_1 = z' \cos Z''.$$

Aber nach (4.)

$$x = a_1 + x''', \; y = b_1 + y''', \; z = c_1 + z'''.$$

Also

$$x = x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X''$$
$$y = x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y''$$
$$z = x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z''$$

in völliger Allgemeinheit. Bei der Veränderung der Coordinaten leisten diese Formeln vortreffliche Dienste.

Für Coordinaten in einer Ebene, denke man sich den Punkt M bloß z. B. in der Ebene der xy liegend, und lasse die Ebene der $x'y'$ mit der Ebene der xy zusammenfallen, so ist $z = 0$, $z' = 0$. Auch ist es offenbar verstattet, $z = z' = 90°$ zu setzen. Also

$$x = x' \cos X + y' \cos X'$$
$$y = x' \cos Y + y' \cos Y'.$$

Hat das secundäre System mit dem primitiven nicht den Anfangspunkt gemein, und a, b, c sind die Coordinaten des Anfangspunktes jenes in Bezug auf dieses, so denke man sich durch den Anfangspunkt des secundären Systems ein System mit den primitiven paralleler Coordinaten x'', y'', z'' gelegt; so ist nach dem Obigen:

$$x'' = x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X''$$
$$y'' = x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y''$$
$$z'' = x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z'',$$

und nach (4.)

$$x = a + x'', \; y = b + y'', \; z = c + z''.$$

Also für Coordinaten im Raume:

$$x = a + x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X''$$
$$y = b + x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y''$$
$$z = c + x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z''$$

und für Coordinaten in der Ebene:

$$x = a + x' \cos X + y' \cos X'$$
$$y = b + x' \cos Y + y' \cos Y'.$$

9. Seyen jetzt zwei von irgend einem Punkte O im Raume ausgehende Linien OA, OB gegeben. Der von diesen Linien eingeschlossene, 180° nicht übersteigende, Winkel sey $= \varphi$. Durch O denke man sich drei auf einander senkrechte Coordinatenaxen gelegt, und bezeichne die Coordinaten eines jeden Punktes in Bezug auf dieses System durch x, y, z. Die von AO und OB mit den positiven Theilen dieser Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel seyen respective α, β, γ und α', β', γ'. Man nehme nun OA als den positiven Theil der Axe der x' eines neuen durch O gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems an, dessen Ebene der $x'y'$ mit der durch die Linien OA und OB bestimmten Ebene zusammenfällt, und denke sich in der Linie OB einen willkührlichen Punkt M. Nimmt man nun ferner OB als den positiven Theil der Axe der x'' eines ebenfalls durch O gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems an, dessen Ebene der $x''y''$ mit der Ebene der $x'y'$ zusammenfällt, so ist klar, daß der von den positiven Theilen der Axen der x' und x'' eingeschlossene Winkel $= \varphi$ ist. Da der Punkt M in der Axe der x'' liegt, so ist, wenn sich jetzt alle Coordinaten auf diesen Punkt beziehen,

$$y'' = 0, \; z'' = 0.$$

Folglich nach (8.), weil der von der Axe der x'' mit der Axe der x' eingeschlossene Winkel $= \varphi$ ist,

$$x' = x'' \cos \varphi.$$

Betrachtet man das System der x', y', z' als das primitive, das System der x, y, z als das secundäre System, so sind α, β, γ die von den secundären Axen mit der primitiven Axe der x' eingeschlossenen Winkel. Folglich nach (8.)

$$x' = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \,.$$

Betrachtet man ferner das System der x, y, z als das primitive, das System der x'', y'', z'' als das secundäre System, so ist, weil α', β', γ' die Winkel sind, welche die secundäre Axe der x'' mit den drei primitiven Axen einschließt, und

$$y'' = 0,\; z'' = 0$$

ist, nach (8.):

$$x = x''\cos\alpha',\; y = x''\cos\beta',\; z = x''\cos\gamma' \,.$$

Also nach dem Obigen

$$x' = x''\cos\alpha\cos\alpha' + x''\cos\beta\cos\beta' + x''\cos\gamma\cos\gamma' \,.$$

Folglich

$$x''\cos\varphi = x''\cos\alpha\cos\alpha' + x''\cos\beta\cos\beta' + x''\cos\gamma\cos\gamma' \,,$$

d. i.

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \,.$$

Denkt man sich die beiden Linien OA und OB zusammenfallend, so daß man nur eine Linie OA hat, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ einschließt, so ist $\varphi = 0$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\cos\varphi = 1$. Also

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 \,.$$

Die Formel für $\cos\varphi$ wird gewöhnlich aus der bekannten trigonometrischen Formel, durch welche der Cosinus eines Winkels eines Dreiecks durch dessen drei Seiten ausgedrückt wird, hergeleitet. Der obige Beweis scheint uns aber, namentlich wegen seiner Allgemeinheit, wesentliche Vorzüge zu haben. Die Formel für die Summe der Quadrate der Cosinus erscheint hier als ein bloßes Corollarium der allgemeinen Formel, da bei dem gewöhnlichen Beweise dieser Formel jene meistens schon vorausgesetzt wird.

10. Bezeichnen wir die von den positiven Theilen der Axen der x', y'; x', z'; y', z' mit einander eingeschlossenen Winkel durch $(x'y')$, $(x'z')$, $(y'z')$; so erhält man mittelst der vorher bewiesenen Formel in den obigen Zeichen augenblicklich:

$$\cos(x'y') = \cos X\cos X' + \cos Y\cos Y' + \cos Z\cos Z'$$
$$\cos(x'z') = \cos X\cos X'' + \cos Y\cos Y'' + \cos Z\cos Z''$$
$$\cos(y'z') = \cos X'\cos X'' + \cos Y'\cos Y'' + \cos Z'\cos Z'' \,.$$

Sind auch die secundären Axen auf einander senkrecht, so ist

$$(x'y') = (x'z') = (y'z') = 90^\circ \,.$$

Also in diesem Falle

$$\cos X\cos X' + \cos Y\cos Y' + \cos Z\cos Z' = 0$$
$$\cos X\cos X'' + \cos Y\cos Y'' + \cos Z\cos Z'' = 0$$
$$\cos X'\cos X'' + \cos Y'\cos Y'' + \cos Z'\cos Z'' = 0 \,.$$

Für jedes beliebige secundäre System ist auch nach (9.)

$$\cos X^2 + \cos Y^2 + \cos Z^2 = 1$$
$$\cos X'^2 + \cos Y'^2 + \cos Z'^2 = 1$$
$$\cos X''^2 + \cos Y''^2 + \cos Z''^2 = 1 .$$

Ist aber das secundäre System rechtwinklig, so wie das primitive; so ist zugleich auch

$$\cos X^2 + \cos X'^2 + \cos X''^2 = 1$$
$$\cos Y^2 + \cos Y'^2 + \cos Y''^2 = 1$$
$$\cos Z^2 + \cos Z'^2 + \cos Z''^2 = 1 ,$$

wie leicht erhellen wird. Auch ist in diesem Falle offenbar

$$\cos X \cos Y + \cos X' \cos Y' + \cos X'' \cos Y'' = 0$$
$$\cos X \cos Z + \cos X' \cos Z' + \cos X'' \cos Z'' = 0$$
$$\cos Y \cos Z + \cos Y' \cos Z' + \cos Y'' \cos Z'' = 0 ,$$

indem durch diese Aggregate die Cosinus der von den primitiven Axen, welche ebenfalls auf einander senkrecht sind, mit einander eingeschlossenen Winkel ausgedrückt werden.

11. Setzt man

$$\cos X = A,\quad \cos X' = B,\quad \cos X'' = C ;$$
$$\cos Y = A',\quad \cos Y' = B',\quad \cos Y'' = C' ;$$
$$\cos Z = A'',\quad \cos Z' = B'',\quad \cos Z'' = C'' ;$$

so ist nach (8.)

$$x = Ax' + By' + Cz'$$
$$y = A'x' + B'y' + C'z'$$
$$z = A''x' + B''y' + C''z' ;$$

und, vorausgesetzt, daß beide Systeme auf einander senkrecht sind, nach (10.)

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = 1,\ AB + A'B' + A''B'' = 0 ;$$
$$B^2 + B'^2 + B''^2 = 1,\ AC + A'C' + A''C'' = 0 ;$$
$$C^2 + C'^2 + C''^2 = 1,\ BC + B'C' + B''C'' = 0 ;$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,\ AA' + BB' + CC' = 0 ;$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1,\ AA'' + BB'' + CC'' = 0 ;$$
$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1,\ A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0 ;$$

eine sehr merkwürdige Folge von Gleichungen zwischen diesen Coefficienten.

12. Die Entfernung irgend eines Punktes im Raume von dem Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystems sey $= e$. Man betrachte e als den positiven Theil der Axe der x' eines neuen Coordinatensystems, und setze e selbst $= x'$; so ist, weil der gegebene Punkt in der Axe der x' liegt,

$$y' = 0,\ z' = 0 .$$

Folglich nach (8.)

$$x = x' \cos X,\ y = x' \cos Y,\ z = x' \cos Z,$$

wenn x, y, z die Coordinaten des gegebenen Punktes in Bezug auf das primitive System bezeichnen. Also

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 (\cos X^2 + \cos Y^2 + \cos Z^2).$$

Aber

$$x' = e,\ \cos X^2 + \cos Y^2 + \cos Z^2 = 1 \quad (10.).$$

Folglich

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^2.$$

Ist e die Entfernung zweier Punkte M, M' im Raume, deren rechtwinklige Coordinaten in Bezug auf das primitive System x, y, z und x_1, y_1, z_1 sind; so denke man sich durch M' ein mit dem primitiven paralleles System gelegt, und bezeichne die Coordinaten von M in Bezug auf dieses System durch ξ, v, ζ; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\xi^2 + v^2 + \zeta^2 = e^2.$$

Da nun aber x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Anfangspunktes des neuen Systems in Bezug auf das primitive sind, so ist nach (4.):

$$x = x_1 + \xi,\ y = y_1 + v,\ z = z_1 + \zeta;$$
$$x - x_1 = \xi,\ y - y_1 = v,\ z - z_1 = \zeta;$$

also

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = e^2.$$

Für ein beliebiges System seyen x', y', z'; x'_1, y'_1, z'_1 die Coordinaten der Punkte M, M'. Durch den Anfang dieses Systems denke man sich ein beliebiges rechtwinkliges System gelegt, für welches die Coordinaten dieser Punkte durch x, y, z; x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden; so ist nach (8.)

$$x = x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X'',$$
$$y = x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y'',$$
$$z = x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z'';$$
$$x_1 = x'_1 \cos X + y'_1 \cos X' + z'_1 \cos X'',$$
$$y_1 = x'_1 \cos Y + y'_1 \cos Y' + z'_1 \cos Y'',$$
$$z_1 = x'_1 \cos Z + y'_1 \cos Z' + z'_1 \cos Z''.$$

Also

$$x-x_1 = (x'-x'_1)\cos X + (y'-y'_1)\cos X' + (z'-z'_1)\cos X''$$
$$y-y_1 = (x'-x'_1)\cos Y + (y'-y'_1)\cos Y' + (z'-z'_1)\cos Y''$$
$$z-z_1 = (x'-x'_1)\cos Z + (y'-y'_1)\cos Z' + (z'-z'_1)\cos Z''.$$

Folglich

$$\begin{aligned}e^2 = &\ (x'-x'_1)^2(\cos X^2 + \cos Y^2 + \cos Z^2)\\ &+ (y'-y'_1)^2(\cos X'^2 + \cos Y'^2 + \cos Z'^2)\\ &+ (z'-z'_1)^2(\cos X''^2 + \cos Y''^2 + \cos Z''^2)\\ &+ 2(x'-x'_1)(y'-y'_1)(\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z')\\ &+ 2(x'-x'_1)(z'-z'_1)(\cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'')\\ &+ 2(y'-y'_1)(z'-z'_1)(\cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z'')\end{aligned}$$

d. i. nach (10.), wenn auch hier die von den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel durch $(x'y')$, $(x'z')$, $(y'z')$ bezeichnet werden:

$$e^2 = (x'-x'_1)^2 + (y'-y'_1)^2 + (z'-z'_1)^2$$
$$+ 2(x'-x'_1)(y'-y'_1)\cos(x'y') + 2(x'-x'_1)(z'-z'_1)\cos(x'z')$$
$$+ 2(y'-y'_1)(z'-z'_1)\cos(y'z'),$$

Ist M' der Anfang der Coordinaten, so ist $x'_1 = y'_1 = z'_1 = 0$. Also

$$e^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y'\cos(x'y') + 2x'z'\cos(x'z') + 2y'z'\cos(y'z').$$

13. Hier läßt sich nun auch die Grundformel der ebenen Trigonometrie als ein einfaches Corollarium ganz streng und allgemein beweisen. Man habe nämlich ein willkührliches ebenes Dreieck ABC (Fig. 10.), nehme B als Anfang der Coordinaten, BA als Axe der x', und eine durch B nach derselben Richtung hin mit AC parallel gezogene Linie als Axe der y' an; so ist nach der bekannten trigonometrischen Bezeichnung

$$BA = c = x', \; AC = b = y'.$$

BC = a ist nach der in (12.) angewandten Bezeichnung = e, und immer

$$(x'y') + A = 180^\circ, \; \cos(x'y') = -\cos A.$$

z' ist in diesem Falle = 0. Also nach (12.)

$$e^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos(x'y')$$

d. i.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Also durch gehörige Vertauschung der Buchstaben:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Daß sich aus diesen Formeln die ganze ebene Trigonometrie ableiten läßt, ist in dem Art. Trigonometrie (7. ff.) gezeigt worden.

14. Man kann aus dem Vorhergehenden auch einen sehr genügenden völlig allgemeinen Beweis der Grundformel der sphärischen Trigonometrie ableiten, wobei Fig. 11. zur Erläuterung dient. Die Kanten einer beliebigen dreiseitigen körperlichen Ecke, deren Spitze O sey, nehme man als die positiven Theile der Axen eines schiefwinkligen Coordinatensystems an, für welches die Coordinaten durch x', y', z' bezeichnet werden sollen. Durch O lege man sodann drei auf einander senkrechte Axen, so daß, wenn wir die Coordinaten in diesem Systeme durch x, y, z bezeichnen, der positive Theil der Axe der x mit dem positiven Theile der Axe x', und die Ebene der xy mit der Ebene der $x'y'$ zusammenfällt. Die positiven y und y' nehme man auf einer Seite der Axe der x oder x', die positiven z und z' auf

einer Seite der Ebene der xy oder $x'y'$; so ist klar, daß immer entweder

$$(x'y') + Y' = 90^\circ\,,$$

oder

$$(x'y') - Y' = 90^\circ\,,$$

d. i. immer

$$(x'y') \pm Y' = 90^\circ\,,\ \pm Y' = 90^\circ - (x'y')$$

ist. Ueberhaupt ist

$$\begin{array}{lll} X = 0, & Y = 90^\circ, & Z = 90^\circ\,; \\ X' = (x'y'), & \pm Y' = 90^\circ - (x'y'), & Z' = 90^\circ\,; \\ X'' = (x'z'), & Y'' = Y'', & Z'' = Z''\,. \end{array}$$

Für Y'' und Z'' läßt sich jetzt keine weitere Bestimmung geben. Den Neigungswinkel der Ebenen $x'Oy'$, $x'Oz'$ gegen einander setze man $= (y'x'z')$. In Oz' denke man sich nun einen willkührlichen Punkt M, für welchen $x' = 0$, $y' = 0$, und $z' = OM$ positiv ist. Folglich ist für diesen Punkt nach (8.)

$$y = z'\cos Y''\,.$$

Die Coordinate y schneide die Axe der x oder x' in M'. Zieht man MM', so ist diese Linie bekanntlich auch auf der Axe der x oder x' senkrecht, und $(y'x'z') = \varphi$ ist der von y und MM' eingeschlossene Winkel. Augenblicklich erhellet nun, daß völlig allgemein, mit gehöriger Berücksichtigung des Zeichens

$$y = MM'.\cos\varphi\,,$$

und

$$MM' = OM.\sin(x'z') = z'\sin(x'z')$$

ist. y ist nämlich positiv oder negativ, jenachdem $\varphi <$ oder $> 90^\circ$ ist, wie es seyn muß. z' ist positiv, und auch $\sin(x'z')$ ist positiv, mag $(x'z') <$ oder $> 90^\circ$ seyn. Also ist auch MM' immer positiv, wie es seyn muß. Folglich ist ganz allgemein

$$y = z'\cos\varphi\sin(x'z')\,.$$

Also

$$z'\cos Y'' = z'\cos\varphi\sin(x'z')\,,$$

woraus sogleich

$$\cos\varphi = \frac{\cos Y''}{\sin(x'z')}\,.$$

Nach (10.) ist

$$\cos(y'z') = \cos X'\cos X'' + \cos Y'\cos Y'' + \cos Z'\cos Z''\,,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\cos(y'z') = \cos(x'y')\cos(x'z') + \cos Y'\cos Y''\,.$$

Aber

$$\cos(\pm Y') = \cos Y' = \cos\{90^\circ - (x'y')\} = \sin(x'y')\,.$$

Also

$$\cos(y'z') = \cos(x'y')\cos(x'z') + \sin(x'y')\cos Y''\,;$$

$$\cos Y'' = \frac{\cos(y'z') - \cos(x'y')\cos(x'z')}{\sin(x'y')}\,.$$

Folglich nach dem Obigen, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben, in völliger Allgemeinheit:

$$\cos(y'x'z') = \frac{\cos(y'z') - \cos(x'y')\cos(x'z')}{\sin(x'y')\sin(x'z')},$$

$$\cos(xyz') = \frac{\cos(x'z') - \cos(x'y')\cos(y'z')}{\sin(x'y')\sin(y'z')},$$

$$\cos(x'z'y') = \frac{\cos(x'y') - \cos(x'z')\cos(y'z')}{\sin(x'z')\sin(y'z')},$$

oder, wenn wir die ebenen Winkel, welche die Ecke bilden, durch a, b, c, die gegenüberstehenden Flächenwinkel durch A, B, C bezeichnen:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Aus diesen Formeln ist im Art. Trigonometrie (57. ff.) die ganze sphärische Trigonometrie abgeleitet worden.

15. Wir wollen nun sogleich den allgemeinsten Fall betrachten, wenn man von einem beliebigen schiefwinkligen Systeme zu einem andern schiefwinkligen Systeme übergehen soll, indem wir jedoch zuerst voraussetzen, daß beide Systeme einerlei Anfangspunkt haben. Die Coordinaten in Bezug auf das primitive System werden durch x, y, z, die Coordinaten in Bezug auf das secundäre System durch x', y', z', die von den positiven Theilen der Axen eingeschlossenen Winkel wie vorher bezeichnet. Durch den gemeinschaftlichen Anfangspunkt beider Systeme denke man sich ein beliebiges rechtwinkliges System gelegt, und bezeichne die von den primitiven Axen mit diesen neuen Axen eingeschlossenen Winkel durch

$$X, Y, Z; \; X', Y', Z'; \; X'', Y'', Z'';$$

die von den secundären Axen mit denselben rechtwinkligen Axen eingeschlossenen Winkel auf ähnliche Weise durch

$$X_1, Y_1, Z_1; \; X'_1, Y'_1, Z'_1; \; X''_1, Y''_1, Z''_1.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten sollen durch x'', y'', z'' bezeichnet werden. Alle Coordinaten beziehen sich auf denselben Punkt. Nach (8.) ist

$$x'' = x\cos X + y\cos X' + z\cos X''$$
$$y'' = x\cos Y + y\cos Y' + z\cos Y''$$
$$z'' = x\cos Z + y\cos Z' + z\cos Z'',$$

so wie auch

$$x'' = x'\cos X_1 + y'\cos X'_1 + z'\cos X''_1$$
$$y'' = x'\cos Y_1 + y'\cos Y'_1 + z'\cos Y''_1$$
$$z'' = x'\cos Z_1 + y'\cos Z'_1 + z'\cos Z''_1 .$$

Multiplicirt man die ersten Gleichungen zuerst nach der Reihe mit $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$; dann mit $\cos X'$, $\cos Y'$, $\cos Z'$, so wie auch mit $\cos X''$, $\cos Y''$, $\cos Z''$, und addirt die Gleichungen zu einander, so erhält man, weil nach (10.)

$$\cos X^2 + \cos Y^2 + \cos Z^2 = 1 ,$$
$$\cos X'^2 + \cos Y'^2 + \cos Z'^2 = 1 ,$$
$$\cos X''^2 + \cos Y''^2 + \cos Z''^2 = 1 ;$$
$$\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = \cos(xy) ,$$
$$\cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' = \cos(xz) ,$$
$$\cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z'' = \cos(yz)$$

ist, sogleich:

$$x''\cos X + y''\cos Y + z''\cos Z = x + y\cos(xy) + z\cos(xz)$$
$$x''\cos X' + y''\cos Y' + z''\cos Z' = y + x\cos(xy) + z\cos(yz)$$
$$x''\cos X'' + y''\cos Y'' + z''\cos Z'' = z + x\cos(xz) + y\cos(yz).$$

Werden nun für x'', y'', z'' ihre Ausdrücke aus den zweiten obigen Gleichungen gesetzt, so erhält man, weil nach (10.)

$$\cos X \cos X_1 + \cos Y \cos Y_1 + \cos Z \cos Z_1 = \cos(xx')$$
$$\cos X \cos X'_1 + \cos Y \cos Y'_1 + \cos Z \cos Z'_1 = \cos(xy')$$
$$\cos X \cos X''_1 + \cos Y \cos Y''_1 + \cos Z \cos Z''_1 = \cos(xz')$$
$$\cos X' \cos X_1 + \cos Y' \cos Y_1 + \cos Z' \cos Z_1 = \cos(yx')$$
$$\cos X' \cos X'_1 + \cos Y' \cos Y'_1 + \cos Z' \cos Z'_1 = \cos(yy')$$
$$\cos X' \cos X''_1 + \cos Y' \cos Y''_1 + \cos Z' \cos Z''_1 = \cos(yz')$$
$$\cos X'' \cos X_1 + \cos Y'' \cos Y_1 + \cos Z'' \cos Z_1 = \cos(zx')$$
$$\cos X'' \cos X'_1 + \cos Y'' \cos Y'_1 + \cos Z'' \cos Z'_1 = \cos(zy')$$
$$\cos X'' \cos X''_1 + \cos Y'' \cos Y''_1 + \cos Z'' \cos Z''_1 = \cos(zz')$$

ist, sogleich

$$x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz') = x + y\cos(xy) + z\cos(xz)$$
$$x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz') = y + x\cos(xy) + z\cos(yz)$$
$$x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz') = z + x\cos(xz) + y\cos(yz) .$$

Dies sind die allgemeinsten Gleichungen zur Verwandlung der Coordinaten. Setzt man die ersten Seiten dieser Gleichungen nach der Reihe $= A$, B, C, und

$$\cos(xy) = a_1 , \quad \cos(xz) = b_1 , \quad \cos(yz) = c_1 ;$$

so erhält man:

$$A = x + a_1 y + b_1 z$$
$$B = y + a_1 x + c_1 z$$
$$C = z + b_1 x + c_1 y ,$$

und hieraus durch Elimination:

$$x = \frac{A(1-c,c_1) - B(a_1-b,c_1) - C(b_1-a,c_1)}{1-a_1a_1-b_1b_1-c_1c_1+2a_1b_1c_1},$$

$$y = \frac{B(1-b,b_1) - A(a_1-b,c_1) - C(c_1-a,b_1)}{1-a_1a_1-b_1b_1-c_1c_1+2a_1b_1c_1},$$

$$z = \frac{C(1-a,a_1) - A(b_1-a,c_1) - B(c_1-a,b_1)}{1-a_1a_1-b_1b_1-c_1c_1+2a_1b_1c_1}.$$

Haben nun die beiden Systeme nicht einerlei Anfang der Coordinaten, und a, b, c sind, wie gewöhnlich, die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems in Bezug auf das primitive, so folgt aus (4.) augenblicklich, daß in diesem Falle

$$x = a + \frac{A(1-c,c_1) - B(a_1-b_1c_1) - C(b_1-a_1c_1)}{1-a_1a_1-b_1b_1-c_1c_1+2a_1b_1c_1},$$

$$y = b + \frac{B(1-b,b_1) - A(a_1-b_1c_1) - C(c_1-a_1b_1)}{1-a_1a_1-b_1b_1-c_1c_1+2a_1b_1c_1},$$

$$z = c + \frac{C(1-a,a_1) - A(b_1-a_1c_1) - B(c_1-a_1b_1)}{1-a_1a_1-b_1b_1-c_1c_1+2a_1b_1c_1}$$

ist. In diesen Gleichungen werden zwölf Winkel als gegeben angesehen. (xy), (xz), (yz) sind die Winkel der primitiven Coordinatenaxen, und werden jederzeit als gegeben betrachtet. Außerdem bleiben noch neun Winkel. Es entsteht nun die Frage, ob alle diese Winkel unmittelbar gegeben seyn müssen, oder ob nicht vielleicht einige durch die andern bestimmt werden.

16. Diese Frage genügend zu beantworten, beschäftigen wir uns zuerst wieder mit einer Aufgabe, welche in (9.) schon für rechtwinklige Coordinaten aufgelöst worden ist. Es seyen nämlich wieder OA und OB zwei beliebige von O ausgehende gerade Linien im Raume. Durch O legen wir ein beliebiges schiefwinkliges Coordinatensystem, und bezeichnen die von OA und OB mit den positiven Theilen der Axen dieses Systems eingeschlossenen Winkel durch α, β, γ, und α', β', γ'. Die Coordinaten in Bezug auf dieses System werden durch x, y, z bezeichnet. Man soll nun den von den Linien OA und OB eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden, Winkel φ finden. Man betrachte OA und OB als die positiven Theile der Axen der x' und y' eines neuen Coordinatensystems, und lasse den positiven Theil der Axe der z' dieses Systems mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen, so ist offenbar $(x'y') = \varphi$, $(zz') = 0$. Also, wenn sich jetzt alle Coordinaten auf einen willkührlichen Punkt beziehen, nach (15.):

$$x + y\cos(xy) + z\cos(xz) = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos(xz')$$
$$y + x\cos(xy) + z\cos(yz) = x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos(yz')$$
$$z + x\cos(xz) + y\cos(yz) = x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'.$$

Hier ist das System der x, y, z als das primitive System betrachtet worden. Betrachtet man aber, welches offenbar

verstattet ist, jetzt das System der x', y', z' als das primitive System, so erhält man eben so:

$$x' + y'\cos\varphi + z'\cos\gamma = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$
$$y' + x'\cos\varphi + z'\cos\gamma' = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$$
$$z' + x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' = x\cos(xz) + y\cos(yz) + z\,,$$

wobei zu bemerken, daß nach der Voraussetzung $(xz) = (xz')$, $(yz) = (yz')$ ist. Da nun aber die Lage des Punktes, auf welchen sich die Coordinaten beziehen, ganz willkührlich ist, so ist es verstattet, anzunehmen, daß derselbe in der Axe der x' liege, und demnach $y' = z' = 0$. Dadurch erhält man

$$x + y\cos(xy) + z\cos(xz) = x'\cos\alpha$$
$$y + x\cos(xy) + z\cos(yz) = x'\cos\beta$$
$$z + x\cos(xz) + y\cos(yz) = x'\cos\gamma$$

und

$$x' = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$
$$x'\cos\varphi = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'\,.$$

Die letzte Gleichung ist mit der vorhergehenden dritten identisch. Aus der vierten und fünften Gleichung folgt augenblicklich

$$\cos\varphi = \frac{x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'}{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}\,,$$

und es kommt nun darauf an, aus den drei ersten Gleichungen durch Elimination x, y, z zu bestimmen, welches nur die gemeinsten Regeln der Algebra erfordert. Setzen wir der Kürze wegen

$$Q = \cos(xy) - \cos(xz)\cos(yz)\,,$$
$$Q' = \cos(xz) - \cos(xy)\cos(yz)\,,$$
$$Q'' = \cos(yz) - \cos(xy)\cos(xz)\,;$$

so erhalten wir durch diese Elimination nach einigen ganz einfachen trigonometrischen Transformationen:

$$x = \frac{\cos\alpha\sin(yz)^2 - Q\cos\beta - Q'\cos\gamma}{1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 + 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz)}\,x'\,,$$

$$y = \frac{\cos\beta\sin(xz)^2 - Q\cos\alpha - Q''\cos\gamma}{1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 + 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz)}\,x'$$

$$z = \frac{\cos\gamma\sin(xy)^2 - Q'\cos\alpha - Q''\cos\beta}{1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 + 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz)}\,x'\,.$$

Setzt man

$$\Omega = \cos\alpha\cos\alpha'\sin(yz)^2 + \cos\beta\cos\beta'\sin(xz)^2 + \cos\gamma\cos\gamma'\sin(xy)^2$$
$$- (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\alpha'\cos\beta)\{\cos(xy) - \cos(xz)\cos(yz)\}$$
$$- (\cos\alpha\cos\gamma' + \cos\alpha'\cos\gamma)\{\cos(xz) - \cos(xy)\cos(yz)\}$$
$$- (\cos\beta\cos\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma)\{\cos(yz) - \cos(xy)\cos(xz)\}$$

$$\Omega' = \cos\alpha^2 \sin(yz)^2 + \cos\beta^2 \sin(xz)^2 + \cos\gamma^2 \sin(xy)^2$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\,\{\cos(xy) - \cos(xz)\cos(yz)\}$$
$$- 2\cos\alpha\cos\gamma\,\{\cos(xz) - \cos(xy)\cos(yz)\}$$
$$- 2\cos\beta\cos\gamma\,\{\cos(yz) - \cos(xy)\cos(xz)\}\,,$$

so überzeugt man sich leicht, daß durch die Substitution der gefundenen Ausdrücke von x, y, z in den obigen Ausdruck von $\cos\varphi$ erhalten wird:

$$\cos\varphi = \frac{\Omega}{\Omega'}\,,$$

wodurch also φ gefunden ist, auch für ein schiefwinkliges Coordinatensystem.

17. Nehmen wir nun an, daß die Linie OB mit dem positiven Theile einer der Coordinatenaxen, z. B. mit dem positiven Theile der Axe der x zusammenfalle, so ist, wie leicht erhellet,

$$\alpha' = 0,\ \beta' = (xy),\ \gamma' = (xz),\ \varphi = \alpha\,.$$

Also, für

$$T = \cos\alpha\sin(yz)^2 + \cos\beta\cos(xy)\sin(xz)^2 + \cos\gamma\cos(xz)\sin(xy)^2$$
$$- \{\cos\alpha\cos(xy) + \cos\beta\}\{\cos(xy) - \cos(xz)\cos(yz)\}$$
$$- \{\cos\alpha\cos(xz) + \cos\gamma\}\{\cos(xz) - \cos(xy)\cos(yz)\}$$
$$- \{\cos\beta\cos(xz) + \cos\gamma\cos(xy)\}\{\cos(yz) - \cos(xy)\cos(xz)\}:$$

$$\cos\alpha = \frac{T}{\Omega'}\,,$$

oder

$$\cos\alpha\,.\,\Omega' = T\,.$$

Entwickelt man diese Gleichung, drückt die Quadrate der Sinus sämmtlich durch Quadrate der Cosinus aus, hebt auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf, was sich aufheben läßt, und dividirt auf beiden Seiten durch $\cos\alpha$, so bleibt zuletzt stehen:

$$0 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2$$
$$+ \cos\alpha^2\cos(yz)^2 + \cos\beta^2\cos(xz)^2 + \cos\gamma^2\cos(xy)^2$$
$$+ 2\cos\alpha\cos\beta\cos(xy) + 2\cos\alpha\cos\gamma\cos(xz)$$
$$+ 2\cos\beta\cos\gamma\cos(yz) + 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz)$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\cos(xz)\cos(yz)$$
$$- 2\cos\alpha\cos\gamma\cos(xy)\cos(yz)$$
$$- 2\cos\beta\cos\gamma\cos(xy)\cos(xz)\,.$$

Wendet man diese Gleichung auf die positiven Theile der Axen des secundären Systems (15.) an, so erhält man:

$$0 = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(xx')^2 - \cos(yx')^2 - \cos(zx')^2$$
$$+ \cos(xy)^2\cos(zx')^2 + \cos(xz)^2\cos(yx')^2 + \cos(yz)^2\cos(xx')^2$$
$$+ 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz) + 2\cos(xy)\cos(xx')\cos(yx')$$
$$+ 2\cos(xz)\cos(xx')\cos(zx') + 2\cos(yz)\cos(yx')\cos(zx')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yx')\cos(zx')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(xx')\cos(zx')$$
$$- 2\cos(xz)\cos(yz)\cos(xx')\cos(yx')\,,$$

$$0 = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(xy')^2 - \cos(yy')^2 - \cos(zy')^2$$
$$+ \cos(xy)^2 \cos(zy')^2 + \cos(xz)^2 \cos(yy')^2 + \cos(yz)^2 \cos(xy')^2$$
$$+ 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz) + 2\cos(xy)\cos(xy')\cos(yy')$$
$$+ 2\cos(xz)\cos(xy')\cos(zy') + 2\cos(yz)\cos(yy')\cos(zy')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yy')\cos(zy')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(xy')\cos(zy')$$
$$- 2\cos(xz)\cos(yz)\cos(xy')\cos(yy'),$$

$$0 = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xz)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(xz')^2 - \cos(yz')^2 - \cos(zz')^2$$
$$+ \cos(xy)^2 \cos(zz')^2 + \cos(xz)^2 \cos(yz')^2 + \cos(yz)^2 \cos(xz')^2$$
$$+ 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz) + 2\cos(xy)\cos(xz')\cos(yz')$$
$$+ 2\cos(xz)\cos(xz')\cos(zz') + 2\cos(yz)\cos(yz')\cos(zz')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(xz)\cos(yz')\cos(zz')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(xz')\cos(zz')$$
$$- 2\cos(xz)\cos(yz)\cos(xz')\cos(yz').$$

Man sieht also, daß von jeder der drei Gruppen:

$$(xx'),\ (yx'),\ (zx');$$
$$(xy'),\ (yy'),\ (zy');$$
$$(xz'),\ (yz'),\ (zz');$$

immer jederzeit nur zwei Winkel gegeben zu seyn brauchen, indem sich dann der dritte mittelst einer der drei obigen Gleichungen finden läßt.

18. Man kann auch die Winkel finden, welche die drei secundären Axen mit einander einschließen, indem man die sechs Axen der x, y, z, x', y', z' auf eine solche Art zu vieren mit einander combinirt, daß in der Combination zwei primitive Axen und die beiden secundären Axen, deren Winkel gesucht wird, vorkommen. Um z. B. den Winkel $(x'y')$ zu finden, könnte man die sechs Axen auf eine der drei folgenden Arten mit einander verbinden:

$$x,\ y,\ x',\ y';$$
$$x,\ z,\ x',\ y';$$
$$y,\ z,\ x',\ y';$$

und würde z. B. aus der ersten dieser Verbindungen zur Bestimmung des Winkels $(x'y')$ folgende Gleichung erhalten:

$$0 = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(xx')^2 - \cos(yx')^2 - \cos(xy')^2 - \cos(yy')^2 - \cos(x'y')^2$$
$$+ \cos(xy)^2 \cos(x'y')^2 + \cos(xx')^2 \cos(yy')^2 + \cos(yx')^2 \cos(xy')^2$$
$$+ 2\cos(xy)\cos(xy')\cos(yy') + 2\cos(xx')\cos(xy')\cos(x'y')$$
$$+ 2\cos(yx')\cos(yy')\cos(x'y') + 2\cos(xy)\cos(xx')\cos(yx')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(xx')\cos(yy')\cos(x'y')$$
$$- 2\cos(xy)\cos(yx')\cos(xy')\cos(x'y')$$
$$- 2\cos(xx')\cos(yx')\cos(xy')\cos(yy').$$

19. Nach dieser allgemeinen Behandlung der Coordinatenverwandlung kehren wir in einer andern Beziehung wieder zu

dem Falle zweier rechtwinkligen Systeme mit einerlei Anfang zurück, indem sich nämlich zeigen läßt, daß es in diesem Falle immer eine ebenfalls durch den gemeinschaftlichen Anfang gehende Axe von solcher Beschaffenheit giebt, daß das eine der beiden Systeme, um diese Axe gedreht, mit dem andern zusammenfällt. Man übersieht augenblicklich, daß diese Axe eine solche Lage haben muß, daß die drei Winkel, welche die durch sie und die Axen der x und x', der y und der y', der z und der z' gelegten Ebenen mit einander einschließen, einander gleich sind, und daß die Drehungsaxe selbst gegen die positiven Theile der Axen der x und x', der y und y', der z und z' unter gleichen Winkeln geneigt seyn muß, wobei wir uns immer die Drehungsaxe am Anfange der Coordinaten anfangend, oder von demselben ausgehend denken. Die von den genannten Ebenen eingeschlossenen Winkel seyen $= \varphi$, und die von der Drehungsaxe mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z oder x', y', z' eingeschlossenen Winkel seyen $= \alpha, \beta, \gamma$; so folgt aus (14.) sogleich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{\cos(xx') - \cos\alpha^2}{\sin\alpha^2} = \frac{\cos(yy') - \cos\beta^2}{\sin\beta^2} = \frac{\cos(zz') - \cos\gamma^2}{\sin\gamma^2};$$

und hieraus:

$$\cos(xx') = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\varphi$$
$$\cos(yy') = \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\varphi$$
$$\cos(zz') = \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\varphi$$
$$1 - \cos(xx') = \sin\alpha^2 - \sin\alpha^2\cos\varphi = \sin\alpha^2(1-\cos\varphi)$$
$$1 - \cos(yy') = \sin\beta^2 - \sin\beta^2\cos\varphi = \sin\beta^2(1-\cos\varphi)$$
$$1 - \cos(zz') = \sin\gamma^2 - \sin\gamma^2\cos\varphi = \sin\gamma^2(1-\cos\varphi).$$

Nach (8.) ist, wenn sich jetzt alle Coordinaten auf ein und denselben Punkt beziehen:

$$x = x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz')$$
$$y = x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz')$$
$$z = x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz'),$$
$$x' = x\cos(xx') + y\cos(yx') + z\cos(zx')$$
$$y' = x\cos(xy') + y\cos(yy') + z\cos(zy')$$
$$z' = x\cos(xz') + y\cos(yz') + z\cos(zz'),$$

oder mittelst der schon in (11.) angewandten Bezeichnung:

$$x = Ax' + By' + Cz', \quad x' = Ax + A'y + A''z;$$
$$y = A'x' + B'y' + C'z', \quad y' = Bx + B'y + B''z;$$
$$z = A''x' + B''y' + C''z', \quad z' = Cx + C'y + C''z.$$

Betrachten wir nun die Drehungsaxe als den positiven Theil einer neuen Axe der x'', und nehmen an, daß der Punkt, auf welchen sich jetzt alle Coordinaten beziehen, in dieser Axe liege, so daß also für diesen Punkt $y'' = z'' = 0$ ist; so ist nach den obigen allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung für rechtwinklige Axen:

$$x = x''\cos(xx'') = x''\cos\alpha\,,$$
$$y = x''\cos(yx'') = x''\cos\beta\,,$$
$$z = x''\cos(zx'') = x''\cos\gamma\,;$$
$$x' = x''\cos(x'x'') = x''\cos\alpha\,,$$
$$y' = x''\cos(y'x'') = x''\cos\beta\,,$$
$$z' = x''\cos(z'x'') = x''\cos\gamma\,.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die obigen Gleichungen, so erhalten wir, nachdem auf beiden Seiten durch x'' dividirt worden:

$$\cos\alpha = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma\,,$$
$$\cos\beta = A'\cos\alpha + B'\cos\beta + C'\cos\gamma\,,$$
$$\cos\gamma = A''\cos\alpha + B''\cos\beta + C''\cos\gamma\,;$$
$$\cos\alpha = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma\,,$$
$$\cos\beta = B\cos\alpha + B'\cos\beta + B''\cos\gamma\,,$$
$$\cos\gamma = C\cos\alpha + C'\cos\beta + C''\cos\gamma\,.$$

Durch Subtraction und Addition dieser Gleichungen erhält man leicht:

$$0 = (A'-B)\cos\beta + (A''-C)\cos\gamma\,,$$
$$0 = (A'-B)\cos\alpha - (B''-C')\cos\gamma\,,$$
$$0 = (A''-C)\cos\alpha + (B''-C')\cos\beta\,;$$
$$2(1-A)\cos\alpha = (A'+B)\cos\beta + (A''+C)\cos\gamma\,,$$
$$2(1-B')\cos\beta = (A'+B)\cos\alpha + (B''+C')\cos\gamma\,,$$
$$2(1-C'')\cos\gamma = (A''+C)\cos\alpha + (B''+C')\cos\beta\,;$$

oder, wenn wir

$$A'-B = p,\quad A''-C = q,\quad B''-C' = r\,;$$
$$A'+B = p',\quad A''+C = q',\quad B''+C' = r'$$

setzen:

$$0 = p\cos\beta + q\cos\gamma\,,$$
$$0 = p\cos\alpha - r\cos\gamma\,,$$
$$0 = q\cos\alpha + r\cos\beta\,;$$
$$2(1-A)\cos\alpha = p'\cos\beta + q'\cos\gamma\,,$$
$$2(1-B')\cos\beta = p'\cos\alpha + r'\cos\gamma\,,$$
$$2(1-C'')\cos\gamma = q'\cos\alpha + r'\cos\beta\,.$$

Durch Auflösung der drei ersten Gleichungen findet man:

$$q = -p\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},\quad r = p\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,.$$

Zur Bestimmung aller drei unbekannten Größen reichen diese Gleichungen nicht hin, da eine jede derselben aus den beiden andern folgt.

Da

$$A = \cos(xx'),\quad B' = \cos(yy'),\quad C'' = \cos(zz')$$

ist, so nehmen die drei andern Gleichungen folgende Gestalt an:

$$2\sin\alpha^2\cos\alpha(1-\cos\varphi) = p'\cos\beta + q'\cos\gamma$$
$$2\sin\beta^2\cos\beta(1-\cos\varphi) = p'\cos\alpha + r'\cos\gamma$$
$$2\sin\gamma^2\cos\gamma(1-\cos\varphi) = q'\cos\alpha + r'\cos\beta\,,$$

und man erhält durch Auflösung dieser Gleichungen:

$$p' = \frac{(\sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \sin\beta^2\cos\beta^2 - \sin\gamma^2\cos\gamma^2)(1-\cos\varphi)}{\cos\alpha\cos\beta}\,,$$

$$q' = \frac{(\sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \sin\gamma^2\cos\gamma^2 - \sin\beta^2\cos\beta^2)(1-\cos\varphi)}{\cos\alpha\cos\gamma}\,,$$

$$r' = \frac{(\sin\beta^2\cos\beta^2 + \sin\gamma^2\cos\gamma^2 - \sin\alpha^2\cos\alpha^2)(1-\cos\varphi)}{\cos\beta\cos\gamma}\,.$$

Weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1\,,$$
$$\cos\gamma^2 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2\,,\quad \sin\gamma^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2\,,$$
$$\sin\gamma^2\cos\gamma^2 = \cos\alpha^2 - \cos\alpha^4 + \cos\beta^2 - \cos\beta^4 - 2\cos\alpha^2\cos\beta^2$$
$$= \cos\alpha^2(1-\cos\alpha^2) + \cos\beta^2(1-\cos\beta^2) - 2\cos\alpha^2\cos\beta^2$$
$$= \sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \sin\beta^2\cos\beta^2 - 2\cos\alpha^2\cos\beta^2$$

ist, so wird der erste Factor im Zähler des ersten Bruchs, und eben so die ähnlichen Factoren in den Zählern der andern Brüche:

$$2\cos\alpha^2\cos\beta^2\,,\ 2\cos\alpha^2\cos\gamma^2\,,\ 2\cos\beta^2\cos\gamma^2\,.$$

Folglich

$$p' = 2\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi)$$
$$q' = 2\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi)$$
$$r' = 2\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi)\,,$$

wodurch also die drei Größen p', q', r' bestimmt sind. Es bleibt demnach bloß unter den sechs Größen p, q, r, p', q', r' noch p zu bestimmen übrig. Man kann sich übrigens auch folgende Relationen merken. Es ist nach dem Obigen

$$p\cos\alpha = r\cos\gamma,\quad p^2\cos\alpha^2 = r^2\cos\gamma^2\,;$$
$$p\cos\beta = -q\cos\gamma,\quad p^2\cos\beta^2 = q^2\cos\gamma^2\,;$$
$$p\cos\gamma = p\cos\gamma,\quad p^2\cos\gamma^2 = p^2\cos\gamma^2\,.$$

Folglich durch Addition, weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$p = \cos\gamma.\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,,$$
$$q = \cos\beta.\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,,$$
$$r = \cos\alpha.\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,.$$

Zur Bestimmung einer der Größen p, q, r müssen wir einen andern Weg einschlagen. Entwickeln wir x', y', z' durch Elimination aus den Gleichungen

$$x = Ax' + By' + Cz'$$
$$y = A'x' + B'y' + C'z'$$
$$z = A''x' + B''y' + C''z' ,$$

so erhalten wir:

$$x' = \frac{(B'C'' - C'B'')x + (B''C - C''B)y + (BC' - CB')z}{L} ,$$

$$y' = \frac{(A''C' - C''A')x + (AC'' - CA'')y + (A'C - C'A)z}{L} ,$$

$$z' = \frac{(A'B'' - B'A'')x + (A''B - B''A)y + (AB' - BA')z}{L} ,$$

wenn wir

$$L = AB'C'' - A'BC'' + A''BC' - AB''C' + A'B''C - A''B'C$$

setzen.

Vergleichen wir nun diese Gleichungen mit den Gleichungen:

$$x' = Ax + A'y + A''z ,$$
$$y' = Bx + B'y + B''z ,$$
$$z' = Cx + C'y + C''z ;$$

so ergeben sich die folgenden merkwürdigen Relationen:

$$B'C'' - C'B'' = LA, \quad B''C - C''B = LA', \quad BC' - CB' = LA'' ;$$
$$A''C' - C''A' = LB, \quad AC'' - CA'' = LB', \quad A'C - C'A = LB'' ;$$
$$A'B'' - B'A'' = LC, \quad A''B - B''A = LC', \quad AB' - BA' = LC'' .$$

Also

$$(B'C'' - C'B'')^2 + (B''C - C''B)^2 + (BC' - CB')^2 = L^2 (A^2 + A'^2 + A''^2).$$

Der erste Theil dieser Gleichung kann, wie leicht erhellet, auf folgende Form gebracht werden:

$$(B^2 + B'^2 + B''^2)(C^2 + C'^2 + C''^2) - (BC + B'C' + B''C'')^2 .$$

Nach (11.) ist

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = 1, \quad B^2 + B'^2 + B''^2 = 1, \quad C^2 + C'^2 + C''^2 = 1 ;$$
$$BC + B'C' + B''C'' = 0 .$$

Also wird obige Gleichung:

$$L^2 = 1, \quad L = \pm 1 ;$$

wo eine nähere Bestimmung wegen des Zeichens nachher gegeben werden wird. Ferner hat man nach (11.)

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = 1 ,$$
$$B^2 + B'^2 + B''^2 = 1 ,$$
$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1 .$$

Durch Addition der beiden ersten, und durch Subtraction der dritten Gleichung erhält man:

$$A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 - C''^2 = 1 ,$$
$$A'^2 + B^2 = 1 - A^2 - B'^2 + C''^2 .$$

Aber nach dem vorher Bewiesenen:

$$AB' - BA' = \pm C'', \quad A'B = AB' \mp C'' .$$

Also

$$A'^2 - 2A'B + B^2 = 1 \pm 2C'' + C''^2 - (A^2 + 2AB' + B'^2)\ ,$$
$$A'^2 + 2A'B + B^2 = 1 \mp 2C'' + C''^2 - (A^2 - 2AB' + B'^2)\ ;$$

d. i.

$$(A' - B)^2 = p^2 = (1 \pm C'')^2 - (A + B')^2\ ,$$
$$(A' + B)^2 = p'^2 = (1 \mp C'')^2 - (A - B')^2\ .$$

Welches Zeichen zu nehmen ist, entscheidet man so. Nähme man die untern Zeichen, so wäre

$$p'^2 = (1 - C'')^2 - (A - B')^2 + 4C''\ .$$

Aber

$$1 - C'' = 1 - \cos(zz') = 1 - \cos\gamma^2 - \sin\gamma^2 \cos\varphi$$
$$= \sin\gamma^2 (1 - \cos\varphi)\ .$$

$$A - B' = \cos(xx') - \cos(yy') = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \cos\varphi - \cos\beta^2 - \sin\beta^2 \cos\varphi$$
$$= \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 + (\sin\alpha^2 - \sin\beta^2)\cos\varphi$$
$$= -(\sin\alpha^2 - \sin\beta^2)(1 - \cos\varphi)\ .$$

Folglich

$$(1 - C'')^2 - (A - B')^2 = \{\sin\gamma^4 - (\sin\alpha^2 - \sin\beta^2)^2\}(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= (\sin\gamma^2 + \sin\alpha^2 - \sin\beta^2)(\sin\gamma^2 - \sin\alpha^2 + \sin\beta^2)(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= (1 - \cos\alpha^2 - \cos\gamma^2 + \cos\beta^2)(1 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + \cos\alpha^2)(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= (\cos\beta^2 + \cos\beta^2)(\cos\alpha^2 + \cos\alpha^2)(1 - \cos\varphi)^2$$
$$= 4\cos\alpha^2 \cos\beta^2 (1 - \cos\varphi)^2\ .$$

Folglich

$$p'^2 = 4\cos\alpha^2 \cos\beta^2 (1 - \cos\varphi)^2 + 4C''$$
$$= 4\cos\alpha^2 \cos\beta^2 (1 - \cos\varphi)^2 + 4\cos(zz')\ ,$$

da doch oben bewiesen worden ist, daß

$$p' = 2\cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\varphi),\ p'^2 = 4\cos\alpha^2 \cos\beta^2 (1 - \cos\varphi)^2\ .$$

Man muß also die obern Zeichen nehmen, so daß folglich

$$L = 1\ ,$$

und

$$(A' - B)^2 = p^2 = (1 + C'')^2 - (A + B')^2\ ,$$
$$(A' + B)^2 = p'^2 = (1 - C'')^2 - (A - B')^2$$

ist. Wie oben ist

$$1 + C'' = 1 + \cos(zz') = 1 + \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\varphi\ ,$$
$$A + B' = \cos(xx') + \cos(yy') = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \cos\varphi + \cos\beta^2 + \sin\beta^2 \cos\varphi.$$

Also, weil

$$1 + C'' + A + B' = 1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2)\cos\varphi$$
$$= 2 + 2\cos\varphi = 2(1 + \cos\varphi)\ ,$$

$$1 + C'' - A - B' = 1 + \cos\gamma^2 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 + (\sin\gamma^2 - \sin\alpha^2 - \sin\beta^2)\cos\varphi$$
$$= 2\cos\gamma^2 + 2(\sin\gamma^2 - 1)\cos\varphi$$
$$= 2\cos\gamma^2 - 2(1 - \sin\gamma^2)\cos\varphi$$
$$= 2\cos\gamma^2 (1 - \cos\varphi)$$

ist:

$$p^2=(1+C'')^2-(A+B')^2=(1+C''+A+B')(1+C''-A-B')$$
$$=4\cos\gamma^2(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)$$
$$=4\cos\gamma^2(1-\cos\varphi^2)$$

d. i.

$$p^2=4\cos\gamma^2\sin\varphi^2\,,\quad p=\pm 2\cos\gamma\sin\varphi\,.$$

Mittelst der oben bewiesenen Formeln

$$q=-p\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},\quad r=p\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$$

hat man also:

$$p=\pm 2\cos\gamma\sin\varphi\,,$$
$$q=\mp 2\cos\beta\sin\varphi\,,$$
$$r=\pm 2\cos\alpha\sin\varphi\,.$$

Da nun

$$A'-B=p\,,\ A''-C=q,\ B''-C'=r\,;$$
$$A'+B=p',\ A''+C=q',\ B''+C'=r'$$

war; so ist

$$A'=\frac{p+p'}{2},\ A''=\frac{q+q'}{2},\ B''=\frac{r+r'}{2}\,,$$
$$B=\frac{-p+p'}{2},\ C=\frac{-q+q'}{2},\ C'=\frac{-r+r'}{2}\,;$$

und man erhält also mittelst der gefundenen Ausdrücke:

$$A\ =\cos(xx')=\quad\sin\alpha^2\cos\varphi+\cos\alpha^2$$
$$A'=\cos(yx')=\pm\cos\gamma\ \sin\varphi+\cos\alpha\ \cos\beta(1-\cos\varphi)$$
$$A''=\cos(zx')=\mp\cos\beta\ \sin\varphi+\cos\alpha\ \cos\gamma(1-\cos\varphi)$$
$$B'=\cos(yy')=\quad\sin\beta^2\cos\varphi+\cos\beta^2$$
$$B''=\cos(zy')=\pm\cos\alpha\ \sin\varphi+\cos\beta\ \cos\gamma(1-\cos\varphi)$$
$$B\ =\cos(xy')=\mp\cos\gamma\ \sin\varphi+\cos\alpha\ \cos\beta(1-\cos\varphi)$$
$$C''=\cos(zz')=\quad\sin\gamma^2\cos\varphi+\cos\gamma^2$$
$$C\ =\cos(xz')=\pm\cos\beta\ \sin\varphi+\cos\alpha\ \cos\gamma(1-\cos\varphi)$$
$$C'=\cos(yz')=\mp\cos\alpha\ \sin\varphi+\cos\beta\ \cos\gamma(1-\cos\varphi)\,.$$

Wir haben angenommen, daß die Drehungsaxe von dem Anfange der Coordinaten ausgehen solle. Man übersieht aber sogleich, daß auch die Verlängerung dieser Axe nach der andern Seite hin, über den Anfang der Coordinaten hinaus, der Aufgabe genügt. Das ist der Grund der doppelten Zeichen in den ersten Gliedern obiger Formeln. In der That sind auch die von diesen beiden Axen, oder vielmehr von den genannten beiden Theilen der Drehungsaxe mit den Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel α, β, γ und $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$. Die Cosinus dieser Winkel haben entgegengesetzte Zeichen. Daher müssen auch die ersten Theile obiger Gleichungen, welche die einfachen Cosinus enthalten, entgegengesetzte Zeichen haben, die zweiten Theile aber positiv bleiben, da sie das Product zweier Cosinus enthalten, welches positiv bleibt, wenn auch die beiden Cosinus ihre Zeichen ändern.

Die obigen sehr merkwürdigen Formeln sind von Euler und Lexell in zwei Abhandlungen der Nov. Comm. Petrop. T. XX. 1775.: Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi und Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum bewiesen worden, und auch wieder mitgetheilt von Jacobi in Crelles Journal. II. 2. S. 188., aber ohne Beweis. Obige Entwickelung wird manches Eigenthümliche haben.

20. Aus diesen Formeln lassen sich manche merkwürdige Relationen ableiten, worüber wir nur Einiges bemerken, indem wir vorher wieder in Erinnerung bringen, daß

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1\,,$$

$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = 3 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 = 2$$

ist. Zuerst ist

$$\begin{aligned} 1 + A + B' + C'' &= 1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 \\ &\quad + (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2)\cos\varphi \\ &= 2 + 2\cos\varphi = 2(1+\cos\varphi)\,, \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} 1 + A - B' - C'' &= 1 + \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 \\ &\quad + (\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 - \sin\gamma^2)\cos\varphi \\ &= 1 + \cos\alpha^2 - 1 + \cos\alpha^2 + (\sin\alpha^2 - 2 + \sin\alpha^2)\cos\varphi \\ &= 2\cos\alpha^2 - 2(1 - \sin\alpha^2)\cos\varphi = 2\cos\alpha^2(1-\cos\varphi)\,. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} 1 + A + B' + C'' &= M = 2(1+\cos\varphi) \\ 1 + A - B' - C'' &= N = 2\cos\alpha^2(1-\cos\varphi) \\ 1 - A + B' - C'' &= P = 2\cos\beta^2(1-\cos\varphi) \\ 1 - A - B' + C'' &= Q = 2\cos\gamma^2(1-\cos\varphi)\,. \end{aligned}$$

Ueberlegt man nun, daß

$$(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi) = 1 - \cos\varphi^2 = \sin\varphi^2$$

ist, so erhellet augenblicklich, daß die Gleichungen in (19.) sich auch auf folgende Art schreiben lassen:

$$\begin{aligned} 2A' &= \sqrt{QM} + \sqrt{PN}\,, \\ 2B'' &= \sqrt{MN} + \sqrt{PQ}\,, \\ 2C &= \sqrt{PM} + \sqrt{QN}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A'' &= -\sqrt{PM} + \sqrt{QN}\,, \\ 2B &= -\sqrt{QM} + \sqrt{PN}\,, \\ 2C' &= -\sqrt{MN} + \sqrt{PQ}\,. \end{aligned}$$

Die Größen A, B' C'' werden hier als gegeben angesehen, und man zieht hieraus folgenden merkwürdigen allgemeinen Schluß:

Wenn neun Größen durch die folgenden sechs Gleichungen verbunden sind:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1,$$
$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1;$$
$$AA' + BB' + CC' = 0;$$
$$AA'' + BB'' + CC'' = 0,$$
$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0,$$

und es sind drei dieser Größen, z. B. A, B′, C″ gegeben, so lassen sich die übrigen sechs immer finden, und zwar, wenn man

$$1 + A + B' + C'' = M,$$
$$1 + A - B' - C'' = N,$$
$$1 - A + B' - C'' = P,$$
$$1 - A - B' + C'' = Q$$

setzt, durch die Formeln:

$$2A' = \sqrt{PN} + \sqrt{QM},\quad 2A'' = \sqrt{QN} - \sqrt{PM},$$
$$2B'' = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN},\quad 2B = \sqrt{PN} - \sqrt{QM},$$
$$2C = \sqrt{QN} + \sqrt{PM},\quad 2C' = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}.$$

Die Erfindung dieser höchst merkwürdigen Formeln wird gewöhnlich Monge zugeschrieben; man sieht aber, daß sie eigentlich mit den obigen merkwürdigen Euler'schen Formeln einerlei sind, und daß durch letztere zugleich die geometrische Bedeutung dieser Ausdrücke nachgewiesen wird. Durch trigonometrische Rechnung ist auf eine sehr elegante Weise Encke zu den Formeln von Monge gelangt, in dem Berliner astron. Jahrbuch für 1832. Berlin. 1830. S. 305.

Auch

$$A'A' - BB = B''B'' - C'C' = CC - A''A''$$
$$= (A' + B)(A' - B) = (B'' + C')(B'' - C') = (C + A'')(C - A'')$$
$$= \pm 4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \sin\varphi (1 - \cos\varphi)$$

ist noch eine bemerkenswerthe Relation.

21. Den Formeln zur Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten:

$$x = x' \cos(xx') + y' \cos(xy') + z' \cos(xz'),$$
$$y = x' \cos(yx') + y' \cos(yy') + z' \cos(yz'),$$
$$z = x' \cos(zx') + y' \cos(zy') + z' \cos(zz')$$

und

$$x' = x \cos(xx') + y \cos(yx') + z \cos(zx'),$$
$$y' = x \cos(xy') + y \cos(yy') + z \cos(zy'),$$
$$z' = x \cos(xz') + y \cos(yz') + z \cos(zz')$$

pflegt man, namentlich in der Mechanik und Astronomie, häufig eine andere Form zu geben, welche sie zu vielen Untersuchungen ganz vorzüglich geschickt macht. Denken wir uns nämlich in der Ebene der xy von dem gemeinschaftlichen Anfange der Coordina-

ten an eine beliebige gerade Linie gezogen, die zugleich, welches offenbar immer möglich ist, auch in der Ebene der $x'y'$ liegt, und sehen wir diese Linie als eine neue positive Axe der Θ an, so ist nach (14.)

$$\cos(xx') = \cos(x\Theta x')\sin(\Theta x)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta x'),$$
$$\cos(xy') = \cos(x\Theta y')\sin(\Theta x)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta y'),$$
$$\cos(xz') = \cos(x\Theta z')\sin(\Theta x)\sin(\Theta z') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta z'),$$
$$\cos(yx') = \cos(y\Theta x')\sin(\Theta y)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta x'),$$
$$\cos(yy') = \cos(y\Theta y')\sin(\Theta y)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta y'),$$
$$\cos(yz') = \cos(y\Theta z')\sin(\Theta y)\sin(\Theta z') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta z'),$$
$$\cos(zx') = \cos(z\Theta x')\sin(\Theta z)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta z)\cos(\Theta x'),$$
$$\cos(zy') = \cos(z\Theta y')\sin(\Theta z)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta z)\cos(\Theta y'),$$
$$\cos(zz') = \cos(z\Theta z')\sin(\Theta z)\sin(\Theta z') + \cos(\Theta z)\cos(\Theta z').$$

Da aber die Linie Θ nach der Voraussetzung sowohl in der Ebene der xy, als auch in der Ebene der $x'y'$ liegt, so ist in allen Fällen

$$(\Theta z) = 90^\circ,\quad (\Theta z') = 90^\circ;$$
$$\sin(\Theta z) = \sin(\Theta z') = 1,\quad \cos(\Theta z) = \cos\Theta z') = 0;$$

und die Formeln nehmen folgende einfachere Gestalt an:

$$\cos(xx') = \cos(x\Theta x')\sin(\Theta x)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta x'),$$
$$\cos(xy') = \cos(x\Theta y')\sin(\Theta x)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta y'),$$
$$\cos(xz') = \cos(x\Theta z')\sin(\Theta x),$$
$$\cos(yx') = \cos(y\Theta x')\sin(\Theta y)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta x'),$$
$$\cos(yy') = \cos(y\Theta y')\sin(\Theta y)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta y'),$$
$$\cos(yz') = \cos(y\Theta z')\sin(\Theta y),$$
$$\cos(zx') = \cos(z\Theta x')\sin(\Theta x'),$$
$$\cos(zy') = \cos(z\Theta y')\sin(\Theta y'),$$
$$\cos(zz') = \cos(z\Theta z').$$

Also nach dem Obigen allgemein:

$$x = x'\{\cos(x\Theta x')\sin(\Theta x)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta x')\}$$
$$+ y'\{\cos(x\Theta y')\sin(\Theta x)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta y')\}$$
$$+ z'\cos(x\Theta z')\sin(\Theta x);$$
$$y = x'\{\cos(y\Theta x')\sin(\Theta y)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta x')\}$$
$$+ y'\{\cos(y\Theta y')\sin(\Theta y)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta y')\}$$
$$+ z'\cos(y\Theta z')\sin(\Theta y);$$
$$z = x'\cos(z\Theta x')\sin(\Theta x') + y'\cos(z\Theta y')\sin(\Theta y') + z'\cos(z\Theta z'),$$

so wie umgekehrt:

$$x' = x\{\cos(x\Theta x')\sin(\Theta x)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta x')\}$$
$$+ y\{\cos(y\Theta x')\sin(\Theta y)\sin(\Theta x') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta x')\}$$
$$+ z\cos(z\Theta x')\sin(\Theta x');$$
$$y' = x\{\cos(x\Theta y')\sin(\Theta x)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta x)\cos(\Theta y')\}$$
$$+ y\{\cos(y\Theta y')\sin(\Theta y)\sin(\Theta y') + \cos(\Theta y)\cos(\Theta y')\}$$
$$+ z\cos(z\Theta y')\sin(\Theta y');$$
$$z' = x\cos(x\Theta z')\sin(\Theta x) + y\cos(y\Theta z')\sin(\Theta y) + z\cos(z\Theta z').$$

Diese allgemeinen Formeln können aber in besondern Fällen noch unter eine einfachere Gestalt gebracht werden, wobei es jedoch immer auf eine besondere Uebereinkunft wegen der Annahme der Axen und ihrer positiven Theile ankommt. Einige der hierher gehörenden Fälle sollen jetzt näher betrachtet werden, wobei wir immer die Winkel

$$(x\Theta x') = \Theta,\ (\Theta x) = \psi,\ (\Theta x') = \varphi$$

setzen werden.

I. Denken wir uns die Lage der zehn sämmtlich von dem gemeinschaftlichen Anfange der Coordinaten ausgehenden Theile der Durchschnitte der Ebenen der xy und xz, der xy und yz, der $x'y'$ und $x'z'$, der $x'y'$ und $y'z'$, der xy und $x'y'$ deutlich, so ist klar, daß es unter diesen zehn Linien immer drei geben wird, für welche die Winkel Θ, ψ, φ sämmtlich spitze Winkel sind. Die Linie Θ liegt immer in den Ebenen der xy und $x'y'$ zugleich; diejenige der beiden andern der drei obigen Linien, welche in der Ebene der xy liegt, nehmen wir als positiven Theil der Axe der x, und die, welche in der Ebene der $x'y'$ liegt, als positiven Theil der Axe der x' an, indem wir nämlich voraussetzen, daß ursprünglich zwar bestimmt sey, welche Ebene die Ebene der xy, und welche die Ebene der $x'y'$ seyn solle, daß aber die Bezeichnung der Axen selbst der Willkühr überlassen bleibe, eine Annahme, die keiner weitern Rechtfertigung bedarf. Nachdem die positiven Theile der Axen der x und x' auf obige Weise bestimmt worden, nehmen wir den positiven Theil der Axe der y so an, daß die ebenfalls nach dem Obigen bestimmte Linie Θ in dem von den positiven Theilen der Axen der x und y gebildeten rechten Winkel liege, und den positiven Theil der Axe der y' auf eine solche Weise, daß derselbe von dem positiven Theile der Axe der x' an nach eben der Gegend hin liegt, wie der positive Theil der Axe der x' von der Linie Θ an. Die positiven Theile der Axen der z und z' endlich wollen wir so annehmen, daß sie in Bezug auf die Ebenen der xy und $x'y'$ auf denselben Seiten liegen, wie der Winkel Θ in Bezug auf die Ebene der xy. Aus Fig. 12., welche diesen Fall darstellt, erhellet leicht, daß in der obigen Bezeichnung

$(x\Theta x') = \Theta$	$(\Theta x) = \psi$
$(x\Theta y') = \Theta$	$(\Theta y) = 90^\circ - \psi$
$(x\Theta z') = 90^\circ + \Theta$	$(\Theta x') = \varphi$
$(y\Theta x') = 180^\circ - \Theta$	$(\Theta y') = 90^\circ + \varphi$
$(y\Theta y') = 180^\circ - \Theta$	
$(y\Theta z') = 90^\circ - \Theta$	
$(z\Theta x') = 90^\circ - \Theta$	
$(z\Theta y') = 90^\circ - \Theta$	
$(z\Theta z') = \Theta$	

ist. Setzt man nun dies in die obigen Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
x = {} & x'(\cos\Theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) \\
& + y'(\cos\Theta \sin\psi \cos\Theta - \cos\psi \sin\varphi) \\
& - z' \sin\Theta \sin\psi ; \\
y = {} & - x'(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) \\
& - y'(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) \\
& + z' \sin\Theta \cos\psi ; \\
z = {} & x' \sin\Theta \sin\varphi + y' \sin\Theta \cos\varphi + z' \cos\Theta
\end{aligned}$$

und auch umgekehrt

$$\begin{aligned}
x' = {} & x(\cos\Theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) \\
& - y(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) \\
& + z \sin\Theta \sin\varphi ; \\
y' = {} & x(\cos\Theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) \\
& - y(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) \\
& + z \sin\Theta \cos\varphi ; \\
z' = {} & - x \sin\Theta \sin\psi + y \sin\Theta \cos\psi + z \cos\Theta .
\end{aligned}$$

Unter dieser Gestalt gebraucht Lagrange die Formeln in der Mécanique analytique. p. 369.

II. Es bleibe Alles wie vorher; nur nehme man jetzt die positiven y auf der entgegengesetzten Seite, so schließt man aus Betrachtung von Fig. 13., welche diesen Fall darstellt, leicht, daß:

$$\begin{aligned}
(x\Theta x') &= \Theta & (\Theta x) &= \psi \\
(x\Theta y') &= \Theta & (\Theta y) &= 90^\circ + \psi \\
(x\Theta z') &= 90^\circ + \Theta & (\Theta x') &= \varphi \\
(y\Theta x') &= \Theta & (\Theta y') &= 90^\circ + \varphi \\
(y\Theta y') &= \Theta \\
(y\Theta z') &= 90^\circ + \Theta \\
(z\Theta x') &= 90^\circ - \Theta \\
(z\Theta y') &= 90^\circ - \Theta \\
(z\Theta z') &= \Theta .
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
x = {} & x'(\cos\Theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) \\
& + y'(\cos\Theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) \\
& - z' \sin\Theta \sin\psi ; \\
y = {} & x'(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) \\
& + y'(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) \\
& - z' \sin\Theta \cos\psi ; \\
z = {} & x' \sin\Theta \sin\varphi + y' \sin\Theta \cos\varphi + z' \cos\Theta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x' = {} & x(\cos\Theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) \\
& + y(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) \\
& + z \sin\Theta \sin\varphi ;
\end{aligned}$$

$$y' = \quad x(\cos\Theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi)$$
$$+ y(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi)$$
$$+ z \sin\Theta \cos\varphi\,;$$
$$z' = - x \sin\Theta \sin\psi - y \sin\Theta \cos\psi + z \cos\Theta\,.$$

So stellt Laplace die Formeln dar in der Mécanique céleste. T. I. p. 59.

III. Bleibt Alles wie in II., nur daß man die positiven Theile der Axen der z und z' jetzt auf den entgegengesetzten Seiten nimmt, so folgt aus Fig. 14. leicht, daß

$(x\Theta x') = \Theta$	$(\Theta x) = \psi$
$(x\Theta y') = \Theta$	$(\Theta y) = 90^\circ + \psi$
$(x\Theta z') = 90^\circ - \Theta$	$(\Theta x') = \varphi$
$(y\Theta x') = \Theta$	$(\Theta y') = 90^\circ + \varphi$
$(y\Theta y') = \Theta$	
$(y\Theta z') = 90^\circ - \Theta$	
$(z\Theta x') = 90^\circ + \Theta$	
$(z\Theta y') = 90^\circ + \Theta$	
$(z\Theta z') = \Theta$.	

Folglich, wenn man dies in die allgemeinen Formeln setzt:

$$x = \quad x'(\cos\Theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi)$$
$$+ y'(\cos\Theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi)$$
$$+ z' \sin\Theta \sin\psi\,;$$
$$y = \quad x'(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi)$$
$$+ y'(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi)$$
$$+ z' \sin\Theta \cos\psi\,;$$
$$z = - x' \sin\Theta \sin\varphi - y' \sin\Theta \cos\varphi + z' \cos\Theta$$

und auch:

$$x' = \quad x(\cos\Theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi)$$
$$+ y(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi)$$
$$- z \sin\Theta \sin\varphi\,;$$
$$y' = \quad x(\cos\Theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi)$$
$$+ y(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi)$$
$$- z \sin\Theta \cos\varphi\,;$$
$$z' = x \sin\Theta \sin\psi + y \sin\Theta \cos\psi + z \cos\Theta\,.$$

Unter dieser Gestalt gebraucht Poisson die Formeln im Traité de Mécanique. T. II. p. 97.

IV. Vertauscht man in I. die Bezeichnung der x und y so daß man die x jetzt als y, die y als x annimmt, übrigens aber Alles ungeändert bleibt, so erhält man aus I.:

$$x = - x'(\cos\Theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi)$$
$$- y'(\cos\Theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi)$$
$$+ z' \sin\Theta \cos\psi\,;$$

$$\begin{aligned} y = {} & x'(\cos\Theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi) \\ & + y'(\cos\Theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) \\ & - z'\sin\Theta\sin\psi\,; \end{aligned}$$

$$z = x'\sin\Theta\sin\varphi + y'\sin\Theta\cos\varphi + z'\cos\Theta\,,$$

wobei aber bemerkt werden muß, daß der Winkel ψ in dem jetzigen Systeme sich nicht mehr auf die Axe der x, sondern auf die Axe der y bezieht, indem jetzt $(\Theta y) = \psi$ ist. Soll sich ψ auch hier noch auf die Axe der x beziehen so muß man, wie aus Fig. 12. sogleich erhellet, $90^\circ - \psi$ statt ψ in obige Gleichungen einführen. Dadurch werden dieselben:

$$\begin{aligned} x = {} & - x'(\cos\Theta\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi) \\ & - y'(\cos\Theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi) \\ & + z'\sin\Theta\sin\psi\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = {} & x'(\cos\Theta\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) \\ & + y'(\cos\Theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi) \\ & - z'\sin\Theta\cos\psi\,; \end{aligned}$$

$$z = x'\sin\Theta\sin\varphi + y'\sin\Theta\cos\varphi + z'\cos\Theta\,.$$

Dies sind die Formeln von Lacroix im Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral. T. I. p. 539.

V. Nimmt man jetzt ferner die positiven y, z, y', z' auf den entgegengesetzten Seiten der entsprechenden Axen, und führt also $-y$, $-z$, $-y'$, $-z'$ statt y, z, y', z' in die Gleichungen in IV. ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} x = {} & - x'(\cos\Theta\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi) \\ & + y'(\cos\Theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi) \\ & - z'\sin\Theta\sin\psi\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y = {} & x'(\cos\Theta\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) \\ & - y'(\cos\Theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi) \\ & + z'\sin\Theta\cos\psi\,; \end{aligned}$$

$$-z = x'\sin\Theta\sin\varphi - y'\sin\Theta\cos\varphi - z'\cos\Theta$$

oder

$$\begin{aligned} x = {} & - x'(\cos\Theta\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi) \\ & + y'(\cos\Theta\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi) \\ & - z'\sin\Theta\sin\psi\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = {} & - x'(\cos\Theta\cos\varphi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) \\ & + y'(\cos\Theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi) \\ & - z'\sin\Theta\cos\psi\,; \end{aligned}$$

$$z = - x'\sin\Theta\sin\varphi + y'\sin\Theta\cos\varphi + z'\cos\Theta$$

oder

$$\begin{aligned} x = {} & x'(\cos\psi\cos\varphi - \cos\Theta\sin\psi\sin\varphi) \\ & + y'(\cos\psi\sin\varphi + \cos\Theta\sin\psi\cos\varphi) \\ & - z'\sin\Theta\sin\psi\,; \end{aligned}$$

$$y = -x'(\sin\psi\cos\varphi + \cos\Theta\cos\psi\sin\varphi)$$
$$- y'(\sin\psi\sin\varphi - \cos\Theta\cos\psi\cos\varphi)$$
$$- z'\sin\Theta\cos\psi\,;$$
$$z = -x'\sin\Theta\sin\varphi + y'\sin\Theta\cos\varphi + z'\cos\Theta\,.$$

So stellt Euler, welcher als der Erfinder dieser merkwürdigen Formeln zu betrachten ist, dieselben dar in der Introductio in Analysin Infinitorum (Appendix de Superficiebus. p. 369.).

VI. Nimmt man in I. die positiven z, y', z' auf den entgegengesetzten Seiten, und führt also —z, —y', —z' statt z, y', z' in die Formeln ein, so erhält man:

$$x = x'(\cos\Theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi)$$
$$- y'(\cos\Theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi)$$
$$+ z'\sin\Theta\sin\psi\,;$$
$$y = -x'(\cos\Theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi)$$
$$+ y'(\cos\Theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi)$$
$$- z'\sin\Theta\cos\psi\,;$$
$$-z = x'\sin\Theta\sin\varphi - y'\sin\Theta\cos\varphi - z'\cos\Theta$$

oder

$$x = x'(\cos\psi\cos\varphi + \cos\Theta\sin\psi\sin\varphi)$$
$$+ y'(\cos\psi\sin\varphi - \cos\Theta\sin\psi\cos\varphi)$$
$$+ z'\sin\Theta\sin\psi\,;$$
$$y = x'(\sin\psi\cos\varphi - \cos\Theta\cos\psi\sin\varphi)$$
$$+ y'(\sin\psi\sin\varphi + \cos\Theta\cos\psi\cos\varphi)$$
$$- z'\sin\Theta\cos\psi\,;$$
$$z = -x'\sin\Theta\sin\varphi + y'\sin\Theta\cos\varphi + z'\cos\Theta\,.$$

Unter dieser Gestalt hat sich Encke dieser Formeln bedient, um daraus die oben (20.) auf anderm Wege bewiesenen von Monge gefundenen merkwürdigen Ausdrücke mittelst goniometrischer Zerlegungen auf eine elegante Weise abzuleiten (s. 20.).

22. Endlich drückt man die Coordinaten eines Punktes im Raume zuweilen auch noch auf folgende Art aus, indem wir bloß rechtwinklige Coordinaten in's Auge fassen. Sey nämlich M (Fig. 15.) ein willkührlicher Punkt im Raume, O der Anfang der rechtwinkligen Coordinaten, M' die Projection des Punktes M auf der Ebene der xy. Man denke sich von O nach M eine gerade Linie OM = r gezogen, welche man den Radius vector nennt, und immer als positiv annimmt. Die Lage dieser Linie bestimme man durch den mit dem positiven Theile der Axe der z eingeschlossenen Winkel, welchen wir $= \varphi$ setzen, und von 0 bis 180° zählen wollen, auf allen Seiten der Axe der z, immer von deren positivem Theile an. Die Lage der Linie OM', welche den Anfang der Coordinaten mit der Projection des Punktes M auf der Ebene der xy verbindet, bestimmen wir durch den von ihr mit dem positiven Theile der Axe

der x eingeschlossenen Winkel ψ, indem wir aber diese Winkel, von dem positiven Theile der Axe der x an nach der Seite der positiven y hin immer nach einer Richtung von 0 bis 360° zählen, so daß wir uns also vorstellen, daß die Linie OM' einen ganzen Umlauf um den Punkt O vollende. Unter diesen Voraussetzungen ist nun ersichtlich, daß mit Berücksichtigung des Zeichens mit völliger Bestimmtheit

$$z = OM.\cos\varphi = r\cos\varphi,$$

so wie auch, daß

$$OM' = OM.\sin\varphi = r\sin\varphi$$

ist, wobei wir bemerken, daß OM' positiv ist, weil φ nie 180° übersteigt. Ferner erhellet auch augenblicklich, daß mit gehöriger Berücksichtigung des Zeichens mit völliger Bestimmtheit

$$x = OM'.\cos\psi = r\sin\varphi\cos\psi$$
$$y = OM'.\sin\psi = r\sin\varphi\sin\psi$$

ist, wobei man wohl zu merken hat, daß die Winkel ψ nach der Seite der positiven y hin von 0 bis 360° wachsen. Wir haben also zur Coordinatenveränderung:

$$x = r\sin\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\sin\psi,\quad z = r\cos\varphi.$$

Man sieht, daß die Lage eines Punktes im Raume durch die Größen r, φ, ψ völlig bestimmt wird. Man nennt in dieser Beziehung r, φ, ψ polare Coordinaten des Punktes M, und den Punkt, von welchem die Vectoren ausgehen, den Pol. Ist der Pol nicht zugleich der Anfang der Coordinaten, sondern wird durch die rechtwinkligen Coordinaten a, b, c bestimmt, so folgt aus dem Obigen und aus (4.) augenblicklich, daß

$$x = a + r\sin\varphi\cos\psi$$
$$y = b + r\sin\varphi\sin\psi$$
$$z = c + r\cos\varphi$$

ist. Wollte man von schiefwinkligen Coordinaten zu polaren Coordinaten übergehen, so würde man am besten erstere vorher in rechtwinklige verwandeln.

22. Bei Coordinaten in der Ebene befolgt man, um die Lage einer von dem Anfange der Coordinaten als ihrem Anfangspunkte ausgehenden geraden Linie zu bestimmen, oft eine andere Methode, wie die im Vorhergehenden durchgängig angewandte. Eine solche Bestimmung wird nämlich in dem vorliegenden Falle auch ohne alle Zweideutigkeit durch den Winkel gegeben, welchen die in Rede stehende Linie entweder mit dem positiven Theile der Axe der x, oder mit dem positiven Theile der y einschließt, indem man diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der x nach dem positiven Theile der Axe der y, oder von dem positiven Theile der Axe der y nach dem positiven Theile der Axe der x hin von 0 bis 360° zählt. Geht die in Rede stehende Linie nicht von dem Anfange der Coordinaten, son-

dern von einem andern bestimmten Punkte als ihrem Anfangspunkte aus, so denkt man sich durch diesen Punkt zwei mit den Coordinatenaxen parallele Axen, und bestimmt nun in Bezug auf diese Axen die Winkel ganz wie vorher, indem man in beiden Systemen die positiven Coordinaten ganz nach denselben Seiten hin nimmt.

24. Hat man nun irgend zwei von dem Anfange der Coordinaten ausgehende gerade Linien, als positive Theile der Axen der x und x', so ist klar, daß bei der vorigen Bestimmungsweise die Winkel (xx') und (x'x) nicht einerlei sind, indem im ersten Falle der Winkel zwischen den beiden in Rede stehenden Linien von dem positiven Theile der Axe der x, im andern Falle von dem positiven Theile der Axe der x' an genommen worden ist, beide Mal nach derselben Seite hin. Augenblicklich wird aber erhellen, daß immer

$$(xx') + (x'x) = 360^\circ$$

ist.

25. Bedienen wir uns bei der Bezeichnung der Winkel nach der frühern Bestimmungsweise jetzt doppelter Parenthesen, so ist in dem Falle eines rechtwinkligen primitiven Systems, und eines gemeinschaftlichen Anfangspunktes beider Systeme, nach (8.):

$$x = x' \cos((xx')) + y' \cos((xy'))$$
$$y = x' \cos((yx')) + y' \cos((yy')) .$$

Liegt nun der positive Theil der Axe der x' in dem ersten rechten Winkel zwischen dem positiven Theile der Axe der x und dem positiven Theile der Axe der y, so ist

$$((xx')) = (xx'), \quad ((yx')) = 90^\circ - (xx') ;$$
$$\cos((xx')) = \cos(xx'), \quad \cos((yx')) = \sin(xx') .$$

Liegt ferner der positive Theil der Axe der x' im zweiten rechten Winkel, so ist

$$((xx')) = (xx'), \quad ((yx')) = (xx') - 90^\circ ;$$
$$\cos((xx')) = \cos(xx'), \quad \cos((yx')) = \sin(xx') .$$

Eben so ist, wenn der positive Theil der Axe der x' im dritten rechten Winkel liegt:

$$((xx')) = 360^\circ - (xx'), \quad ((yx')) = (xx') - 90^\circ ;$$
$$\cos((xx')) = \cos(xx'), \quad \cos((yx')) = \sin(xx') ,$$

und endlich, wenn der positive Theil der Axe der x' im vierten rechten Winkel liegt:

$$((xx')) = 360^\circ - (xx'), \quad ((yx')) = 450^\circ - (xx') ;$$
$$\cos((xx')) = \cos(xx'), \quad \cos((yx')) = \sin(xx') ,$$

Also immer

$$\cos((xx')) = \cos(xx'), \quad \cos((yx')) = \sin(xx') ;$$

und ganz eben so

$$\cos((xy')) = \cos(xy'), \quad \cos((yy')) = \sin(xy') .$$

Folglich ist in dem Falle eines rechtwinkligen primitiven Systems, und eines gemeinschaftlichen Anfangspunktes beider Systeme:

$$x = x' \cos(xx') + y' \cos(xy')$$
$$y = x' \sin(xx') + y' \sin(xy') .$$

Wären a, b die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems in Bezug auf das primitive, so wäre, wie aus (4.) augenblicklich folgt:

$$x = a + x' \cos(xx') + y' \cos(xy') ,$$
$$y = b + x' \sin(xx') + y' \sin(xy') .$$

26. Ist das primitive System nicht rechtwinklich, der Anfang der Coordinaten aber beiden Systemen gemein, so denke man sich durch denselben zwei willkührliche rechtwinkliche Axen der x'', y'' gelegt. Dann ist nach (25.)

$$x'' = x \cos(x''x) + y \cos(x''y)$$
$$y'' = x \sin(x''x) + y \sin(x''y) ,$$

und

$$x'' = x' \cos(x''x') + y' \cos(x''y')$$
$$y'' = x' \sin(x''x') + y' \sin(x''y') .$$

Also

$$x \cos(x''x) + y \cos(x''y) = x' \cos(x''x') + y' \cos(x''y') ,$$
$$x \sin(x''x) + y \sin(x''y) = x' \sin(x''x') + y' \sin(x''y') .$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$x = \frac{x' \sin\{(x''y) - (x''x')\} + y' \sin\{(x''y) - (x''y')\}}{\sin\{(x''y) - (x'x)\}} ,$$

$$y = \frac{x' \sin\{(x''x') - (x''x)\} + y' \sin\{(x''y' - (x''x)\}}{\sin\{(x''y) - (x''x)\}} .$$

Läßt man den positiven Theil der Axe der x'' mit dem positiven Theile der Axe der x zusammenfallen, so ist

$$(x''x) = 0, \ (x''y) = (xy), \ (x''x') = (xx'), \ (x''y') = (xy') .$$

Also

$$x = \frac{x' \sin\{(xy) - (xx')\} + y' \sin\{(xy) - (xy')\}}{\sin(xy)} ,$$

$$y = \frac{x' \sin(xx') + y' \sin(xy')}{\sin(xy)} .$$

Lassen wir aber den positiven Theil der Axe der x'' mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfallen, und nehmen jetzt an, wie auch in der Folge immer geschehen soll, daß die positiven y' gegen die positiven x', die positiven y'' gegen die positiven x'' ganz eben so liegen, wie die positiven y gegen die positiven x, so erhellet leicht, daß

$$(x''x) = 360^\circ - (xx'') \ (24.) = 360^\circ - (xy) ,$$
$$(x''x') = 360^\circ - (yx'), \ (x''y') = 360^\circ - (yy'), \ (x''y) = 0$$

ist. Also

$$x = \frac{x' \sin(yx') + y' \sin(yy')}{\sin(xy)},$$

$$y = \frac{x' \sin\{(xy) - (yx')\} + y' \sin\{(xy) - (yy')\}}{\sin(xy)}$$

Wir haben folglich

$$x = \frac{x' \sin(yx') + y' \sin(yy')}{\sin(xy)},$$

$$y = \frac{x' \sin(xx') + y' \sin(xy')}{\sin(xy)}$$

und

$$x = \frac{x' \sin\{(xy) - (xx')\} + y' \sin\{(xy) - (xy')\}}{\sin(xy)},$$

$$y = \frac{x' \sin\{(xy) - (yx')\} + y' \sin\{(xy) - (yy')\}}{\sin(xy)}.$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke folgt

$$\sin(xx') = \sin\{(xy) - (yx')\}$$
$$\sin(xy') = \sin\{(xy) - (yy')\}$$
$$\sin(yx') = \sin\{(xy) - (xx')\}$$
$$\sin(yy') = \sin\{(xy) - (xy')\}.$$

Also auch

$$\sin(x'x) = \sin\{(x'y') - (y'x)\}$$
$$\sin(x'y) = \sin\{(x'y') - (y'y)\}$$
$$\sin(y'x) = \sin\{(x'y') - (x'x)\}$$
$$\sin(y'y) = \sin\{(x'y') - (x'y)\}.$$

27. Wir wollen hier nun alle zur Coordinatenverwandlung bei Coordinaten in der Ebene nöthigen Formeln zusammenstellen. Die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems in Beziehung auf das primitive werden immer durch a, b bezeichnet.

1) Soll man von einem Systeme zu einem diesem parallelen Systeme übergehen; so ist nach (4.)

$$x = a + x', \; y = b + y'.$$

2) Um von einem schiefwinkligen Systeme zu irgend einem andern schiefwinkligen Systeme überzugehen, hat man nach (26.):

$$x = a + \frac{x' \sin(yx') + y' \sin(yy')}{\sin(xy)},$$

$$y = b + \frac{x' \sin(xx') + y' \sin(xy')}{\sin(xy)}.$$

3) Um von einem rechtwinklichen Systeme zu einem schiefwinkligen überzugehen, hat man nach (25.):

$$x = a + x' \cos(xx') + y' \cos(xy'),$$
$$y = b + x' \sin(xx') + y' \sin(xy').$$

4) Soll man von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern rechtwinkligen Systeme übergehen, so ist

$$(xy) = 90^0, \; (x'y') = 90^0 .$$

Also nach (26.) und (24.)

$$\sin(y'x) = \sin\{90^0 - (x'x)\} = \cos(x'x) = \cos\{360^0 - (xx')\} = \cos(xx'),$$
$$\sin(x'x) = \sin\{90^0 - (y'x)\} = \cos(y'x) = \sin\{360^0 - (xx')\} = -\sin(xx').$$

Nach der Weise aber, wie wir hier die Winkel nehmen, ist offenbar $(y'x) = (xy')$. Also

$$\sin(xy') = \cos(xx'), \quad \cos(xy') = -\sin(xx') .$$

Folglich nach Nr. 3.

$$x = a + x'\cos(xx') - y'\sin(xx'),$$
$$y = b + x'\sin(xx') + y'\cos(xx') .$$

Haben beide rechtwinklige Systeme einerlei Anfang, so ist, für $(xx') = \alpha$:

$$x^2 = x'^2\cos\alpha^2 - 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha + y'^2\sin\alpha^2,$$
$$y^2 = x'^2\sin\alpha^2 + 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha + y'^2\cos\alpha^2 .$$

Also

$$x^2 + y^2 = (x'^2 + y'^2)(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) = x'^2 + y'^2,$$

welches eine allgemeine Eigenschaft aller rechtwinkligen Systeme mit einerlei Anfang ist.

5) Soll man von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen Systeme übergehen, so hat man nach Nr. 3:

$$x' = a + x\cos(x'x) + y\cos(x'y),$$
$$y' = b + x\sin(x'x) + y\sin(x'y),$$

wo x', y' die rechtwinkligen, x, y die schiefwinkligen, und a, b die Coordinaten des Anfangspunktes des schiefwinkligen Systems in Bezug auf das rechtwinklige System sind. Bestimmt man aus diesen Gleichungen x, y, so erhält man:

$$x = \frac{(x'-a)\sin(x'y) - (y'-b)\cos(x'y)}{\sin\{(x'y) - (x'x)\}},$$
$$y = \frac{(y'-b)\cos(x'x) - (x'-a)\sin(x'x)}{\sin\{(x'y) - (x'x)\}} .$$

Aber offenbar $(x'y) = (yx')$, und $(x'x) = 360^0 - (xx')$ (24.); also $(x'y) - (x'x) = (xx') + (yx') - 360^0$. Folglich

$$x = \frac{(x'-a)\sin(yx') - (y'-b)\cos(yx')}{\sin\{(xx') + (yx')\}},$$
$$y = \frac{(x'-a)\sin(xx') + (y'-b)\cos(xx')}{\sin\{(xx') + (yx')\}} .$$

28. Bei polaren Coordinaten in der Ebene endlich denkt man sich einen von dem Anfange der Coordinaten als Pol ausgehenden Radius vector von dem positiven Theile der Axe der x nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegt, und be-

zeichnet den von demselben mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von 0 bis 360° zählt, durch φ, den Radius vector selbst, welcher immer als positiv angenommen wird, durch r. Unter diesen Voraussetzungen überzeugt man sich augenblicklich, daß, wenn x, y rechtwinklige Coordinaten sind, ganz allgemein

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

ist. Ist der Pol nicht der Anfang der Coordinaten, sondern ein durch die rechtwinkligen Coordinaten a, b bestimmter Punkt, so folgt aus (4.) augenblicklich

$$x = a + r\cos\varphi,\ y = b + r\sin\varphi\ .$$

29. In neuerer Zeit hat man zur Erleichterung gewisser specieller Untersuchungen andere von dem im Vorhergehenden ausführlich betrachteten verschiedene Coordinatensysteme vorgeschlagen, worüber man z. B. eine schöne Abhandlung von Plücker in Crelles Journal. B. V. S. 1. nachsehen kann. In Gudermanns Grundriß der analytischen Sphärik. Cöln. 1830. führt der Gebrauch sphärischer oder Bogen-Coordinaten zu vielen merkwürdigen und interessanten Sätzen. Dem gewöhnlichen Coordinatensysteme gebührt aber vor allen übrigen der Vorzug der allgemeinen Anwendbarkeit.

Cotesischer Lehrsatz.

L'Huilier, Principiorum calculi diff. et int. expositio elementaris. Tub. 1795. p. XXVI.

Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. éd. Paris. 1806. p. 143.

Lacroix, Traité du calcul diff. et du calcul int. T. I. Paris. 1810. p. 114 — 130.

Eytelwein, Grundlehren der höhern Analysis. B. I. Berlin. 1824. S. 174.

Cauchy, Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. P. I. Paris. 1821. p. 348.

Cribrum arithmeticum, s. Eratosthenes Sieb.

Cubikwurzel, s. Wurzel.

Cubirung der Körper, s. vorzüglich den Artikel Stereometrie im vierten Theile.

Cykloide. Eine der merkwürdigsten Eigenschaften der Cykloide ist folgende.

Sei BC (Fig. 16.) eine beliebige rectanguläre Curve, d. i. eine solche, bei welcher die Berührenden in B und C respective

auf den auf einander normalen Axen AB und AA′ senkrecht sind. Wenn man, von C anfangend, die Curve BC abwickelt, wodurch die Curve CD entsteht, zwischen den Parallelen AA′ und BB′; wenn man hierauf wieder die Curve CD, von D anfangend, abwickelt, wodurch zwischen denselben Parallelen die Curve DE entsteht, und dieses Verfahren in's Unendliche fortsetzt; so nähern sich die Curven BC, CD, DE, EF, FG, GH, u. s. f. immer mehr und mehr einer halben Cykloide, deren Basis der Linie AB gleich und parallel ist.

Zuvörderst folgt aus der Natur der Evolution unmittelbar, daß die entstandenen Curven, wie die gegebene, sämmtlich rectanguläre Curven sind, und daß die Berührenden MP, PN, NQ, QR, RS, u. s. f. abwechselnd auf einander senkrecht und einander parallel sein müssen. Der Winkel, welchen die einander parallelen Berührenden MP, NQ, RS, u. s. f. mit der Axe AB einschließen, sey $= \Theta$, und man setze

$CM = x$	$CMB = a$
$CP = z$	$CPD = b$
$EN = x'$	$END = a'$
$EQ = z'$	$EQF = b'$
$GR = x''$	$GRF = a''$
$GS = z''$	$GSH = b''$
u. s. f.	u. s. f.

Aus Fig. 17. erhellet nun augenblicklich, wenn man sich an jeder Curve zwei einander unendlich nahe Berührende denkt, mittelst einfacher geometrischer Sätze die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$\partial\Theta = \frac{\partial z}{MP} = \frac{\partial x'}{PN} = \frac{\partial z'}{NQ} = \frac{\partial x''}{QR} = \ldots.$$

Nach der Natur der Evolution ist aber:

$$\begin{aligned} MP &= CM = x \\ PN &= DP = b - z \\ NQ &= EN = x' \\ QR &= FQ = b' - z' \\ RS &= GR = x'' \\ ST &= HS = b'' - z'' \\ &\text{u. s. f.} \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Also

$$\partial\Theta = \frac{\partial z}{x} = \frac{\partial x'}{b-z} = \frac{\partial z'}{x'} = \frac{\partial x''}{b'-z'} = \frac{\partial z''}{x''} = \frac{\partial x'''}{b''-z''} = \ldots$$

Hieraus erhält man:

$$\partial z = x\partial\Theta,\ z = \int x\partial\Theta,$$

wo das Integral so bestimmt werden muß, daß es für $\Theta = 0$ verschwindet. Setzt man dann $\Theta = \frac{1}{2}\pi$, so wird $z = b$.

Ferner ist:

$$\partial x' = b\partial\Theta - \partial\Theta\int x\partial\Theta,\ x' = b\Theta - \int\partial\Theta\int x\partial\Theta\,,$$

indem man dieses Integral wieder so bestimmt, daß es für $\Theta = 0$ verschwindet. Setzt man dann $\Theta = \frac{1}{2}\pi$, so wird $x' = a'$. Man hat hier zu bemerken, daß sich Alles auf die den Berührenden der ersten gegebenen Curve BC entsprechenden Werthe von Θ bezieht.

Ganz auf ähnliche Art ist:

$$\partial z' = x'\partial\Theta = b\Theta\partial\Theta - \partial\Theta\int\partial\Theta\int x\partial\Theta$$

$$z' = \tfrac{1}{2}b\Theta^2 - \int\partial\Theta\int\partial\Theta\int x\partial\Theta\,,$$

oder nach einer kürzern Bezeichnung:

$$z' = \tfrac{1}{2}b\Theta^2 - \int^2\partial\Theta^2\int x\partial\Theta\,,$$

wo das Integral wieder so bestimmt werden muß, daß es für $\Theta = 0$ verschwindet. Setzt man dann $\Theta = \frac{1}{2}\pi$, so wird $z' = b'$.

Ferner hat man:

$$\partial x'' = b'\partial\Theta - \tfrac{1}{2}b\Theta^2\partial\Theta + \partial\Theta\int^2\partial\Theta\int x\partial\Theta$$

$$x'' = b'\Theta - b.\frac{\Theta^3}{2.3} + \int^3\partial\Theta^3\int x\partial\Theta,$$

dieses Integral wieder so bestimmt, daß es für $\Theta = 0$ verschwindet. Für $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ wird dann $x'' = a''$.

$$\partial z'' = x''\partial\Theta = b'\Theta\partial\Theta - b.\frac{\Theta^3}{2.3}\partial\Theta + \partial\Theta\int^3\partial\Theta^3\int x\partial\Theta$$

$$z'' = b'.\frac{\Theta^2}{2} - b.\frac{\Theta^4}{2.3.4} + \int^4\partial\Theta^4\int x\partial\Theta\,,$$

das Integral immer wie oben bestimmt.

$$\partial x''' = b''\partial\Theta - b'.\frac{\Theta^2}{2}\partial\Theta + b.\frac{\Theta^4}{2.3.4}\partial\Theta - \partial\Theta\int^4\partial\Theta^4\int x\partial\Theta$$

$$x''' = b''\Theta - b'.\frac{\Theta^3}{2.3} + b.\frac{\Theta^5}{2.3.4.5} - \int^5\partial\Theta^5\int x\partial\Theta\,,$$

$$\partial z''' = x'''\partial\Theta = b''\Theta\partial\Theta - b'.\frac{\Theta^3}{2.3}\partial\Theta + b.\frac{\Theta^5}{2.3.4.5}\partial\Theta - \partial\Theta\int^5\partial\Theta^5\int x\partial\Theta$$

$$z''' = b''.\frac{\Theta^2}{2} - b'.\frac{\Theta^4}{2.3.4} + b.\frac{\Theta^6}{2.3..6} - \int^6\partial\Theta^6\int x\partial\Theta\,.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen. Wir haben demnach folgende Formeln:

$$z = \int x\partial\Theta$$

$$x' = b\Theta - \int\partial\Theta\int x\partial\Theta$$

$$z' = b.\frac{\Theta^2}{2} - \int^2 \partial\Theta^2\int x\partial\Theta$$

$$x'' = b'\Theta - b.\frac{\Theta^3}{2.3} + \int^3 \partial\Theta^3\int x\partial\Theta$$

$$z'' = b'.\frac{\Theta^2}{2} - b.\frac{\Theta^4}{2.3.4} + \int^4 \partial\Theta^4\int x\partial\Theta$$

$$x''' = b''\Theta - b'.\frac{\Theta^3}{2.3} + b.\frac{\Theta^5}{2.3.4.5} - \int^5 \partial\Theta^5\int x\partial\Theta$$

$$z''' = b''.\frac{\Theta^2}{2} - b'.\frac{\Theta^4}{2.3.4} + b.\frac{\Theta^6}{2.3.4.5.6} - \int^6 \partial\Theta^6\int x\partial\Theta$$

u. s. f. u. s. f.

wo alle Integrale so bestimmt werden müssen, daß sie für $\Theta = 0$ verschwinden. Der größte Werth von x ist $= a$. Also ist offenbar

$$\int x\partial\Theta < \int a\partial\Theta,\ \int x\partial\Theta < \Theta a,$$

woraus ferner leicht folgt, daß die Integrale

$$\int\partial\Theta\int x\partial\Theta,\ \int^2\partial\Theta^2\int x\partial\Theta,\ \int^3\partial\Theta^3\int x\partial\Theta,\ \int^4\partial\Theta^4\int x\partial\Theta,\ \ldots$$

respective kleiner als

$$\frac{\Theta^2}{2}a,\ \frac{\Theta^3}{2.3}a,\ \frac{\Theta^4}{2.3.4}a,\ \frac{\Theta^5}{2.3.4.5}a,\ \frac{\Theta^6}{2.3\ldots6}a,\ \ldots$$

sind. Da nun Θ nie größer als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so werden diese Brüche bald sehr klein, und man kann also näherungsweise setzen:

$$x^{(n)} = b^{(n-1)}.\Theta - b^{(n-2)}.\frac{\Theta^3}{2.3} + b^{(n-3)}.\frac{\Theta^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$\ldots \mp b'.\frac{\Theta^{2n-3}}{2.3..(2n-3)} \pm b.\frac{\Theta^{2n-1}}{2.3..(2n-1)},$$

$$z^{(n)} = b^{(n-1)}.\frac{\Theta^2}{2} - b^{(n-2)}.\frac{\Theta^4}{2.3.4} + b^{(n-3)}.\frac{\Theta^6}{2.3.4..6} - \ldots$$

$$\ldots \mp b'.\frac{\Theta^{2n-2}}{2.3..(2n-2)} \pm b.\frac{\Theta^{2n}}{2.3\ldots2n},$$

mit desto größerer Genauigkeit, je größer n ist. Es ist also nach dem Obigen, wenn man der Kürze wegen $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ setzt:

$$a^{(n)} = b^{(n-1)}.\alpha - b^{(n-2)}.\frac{\alpha^3}{2.3} + b^{(n-3)}.\frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \ldots$$
$$\ldots \mp b'.\frac{\alpha^{2n-3}}{2.3..(2n-3)} \pm b.\frac{\alpha^{2n-1}}{2.3..(2n-1)},$$
$$b^{(n)} = b^{(n-1)}.\frac{\alpha^2}{2} - b^{(n-2)}.\frac{\alpha^4}{2.3.4} + b^{(n-3)}.\frac{\alpha^6}{2.3.4..6} - \ldots$$
$$\ldots \mp b'.\frac{\alpha^{2n-2}}{2.3..(2n-2)} \pm b.\frac{\alpha^{2n}}{2.3...2n}.$$

Bezeichnen wir nun die Werthe der Integrale

$$\int^2 \partial\Theta^2 \int x\partial\Theta,\ \int^4 \partial\Theta^4 \int x\partial\Theta,\ \int^6 \partial\Theta^6 \int x\partial\Theta,\ \text{u. s. f.};$$

welche dieselben erhalten, wenn man sie so bestimmt, daß sie für $\Theta = 0$ verschwinden, und dann $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ setzt, nach der Reihe durch A_2, A_4, A_6, u. s. f., und verwandeln die gebrochene Function

$$\frac{b - A_2 y + A_4 y^2 - A_6 y^3 + A_8 y^4 - \ldots}{1 - \frac{\alpha^2}{2} y + \frac{\alpha^4}{2.3.4} y^2 - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6} y^3 + \ldots} = Q$$

in die Reihe

$$\beta + \beta' y + \beta'' y^2 + \beta''' y^3 + \beta^{IV} y^4 + \ldots;$$

so erhalten wir zur Bestimmung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$\beta = b$$
$$\beta' = \beta\frac{\alpha^2}{2} - A_2$$
$$\beta'' = \beta'\frac{\alpha^2}{2} - \beta\frac{\alpha^4}{2.3.4} + A_4$$
$$\beta''' = \beta''\frac{\alpha^2}{2} - \beta'\frac{\alpha^4}{2.3.4} + \beta\frac{\alpha^6}{2.3..6} - A_6$$
$$\beta^{IV} = \beta'''\frac{\alpha^2}{2} - \beta''\frac{\alpha^4}{2.3.4} + \beta'\frac{\alpha^6}{2.3..6} - \beta\frac{\alpha^8}{2...8} + A_8$$

u. s. f. u. s. f.

aus denen, wenn man sie mit den aus dem Obigen folgenden Gleichungen:

$$b = b$$
$$b' = b\frac{\alpha^2}{2} - A_2$$
$$b'' = b'\frac{\alpha^2}{2} - b\frac{\alpha^4}{2.3.4} + A_4$$
$$b''' = b''\frac{\alpha^2}{2} - b'\frac{\alpha^4}{2.3.4} + b\frac{\alpha^6}{2.3..6} - A_6$$
$$b^{IV} = b'''\frac{\alpha^2}{2} - b''\frac{\alpha^4}{2.3.4} + b'\frac{\alpha^6}{2.3..6} - b\frac{\alpha^8}{2...8} + A_8$$

u. s. f. u. s. f.

vergleicht, sich ergiebt:

$$\beta = b,\ \beta' = b',\ \beta'' = b'',\ \beta''' = b''', \ldots.$$

Da aber $A_2, A_4, A_6, A_8, \ldots$. bald sehr klein werden, wie wir vorher gesehen haben, so wollen wir, wie oben, diese Größen von A_{2n} an vernachlässigen, indem wir

$$A_{2n} = A_{2n+2} = A_{2n+4} = \ldots = 0$$

setzen. Dann entspringen also, wie aus dem Obigen erhellet, die Größen

$$b,\ b',\ b'',\ b''', \ldots b^{(n-1)},\ b^{(n)},\ b^{(n+1)}, \ldots.$$

aus der Entwickelung der gebrochenen Function

$$Q' = \frac{b - A_2 y + A_4 y^2 - A_6 y^3 + \ldots \pm A_{2n-2} y^{n-1}}{1 - \frac{\alpha^2}{2} y + \frac{\alpha^4}{2.3.4} y^2 - \frac{\alpha^6}{2.3.4..6} y^3 + \ldots}$$

in eine Reihe, mit desto größerer Genauigkeit, je größer n ist.

Der Nenner dieser gebrochenen Function ist $= \cos(\alpha \sqrt{y})$ (s. d. Art. Cyklometrie in d. Zus. 10.); also nach demselben Art. (42.):

$$Q' = \frac{b - A_2 y + A_4 y^2 - A_6 y^3 + \ldots \pm A_{2n-2} y^{n-1}}{(1-y)\left(1 - \frac{y}{3^2}\right)\left(1 - \frac{y}{5^2}\right)\left(1 - \frac{y}{7^2}\right) \ldots\ldots}$$

$$= b + b'y + b''y^2 + b'''y^3 + \ldots + b^{(n-1)} y^{n-1} + b^{(n)} y^n + \ldots.$$

Denken wir uns nun die gebrochene Function Q' in einfache Brüche zerlegt, und setzen zu dem Ende

$$Q' = \frac{C}{1-y} + \frac{C_1}{1 - \frac{y}{3^2}} + \frac{C_2}{1 - \frac{y}{5^2}} + \frac{C_3}{1 - \frac{y}{7^2}} + \ldots,$$

so erhalten wir durch Verwandlung dieser Brüche in Reihen:

$$\begin{aligned} Q' = \quad & C + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \ldots. \\ + & \{C + C_1 (\tfrac{1}{3})^2 + C_2 (\tfrac{1}{5})^2 + C_3 (\tfrac{1}{7})^2 + \ldots.\} y \\ + & \{C + C_1 (\tfrac{1}{3})^4 + C_2 (\tfrac{1}{5})^4 + C_3 (\tfrac{1}{7})^4 + \ldots.\} y^2 \\ + & \{C + C_1 (\tfrac{1}{3})^6 + C_2 (\tfrac{1}{5})^6 + C_3 (\tfrac{1}{7})^6 + \ldots.\} y^3 \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so daß also allgemein

$$b^{(n)} = C + C_1 (\tfrac{1}{3})^{2n} + C_2 (\tfrac{1}{5})^{2n} + C_3 (\tfrac{1}{7})^{2n} + \ldots.$$

ist. Wenn nun, wie wir hier annehmen, n sehr groß ist; so sind

$$(\tfrac{1}{3})^{2n},\ (\tfrac{1}{5})^{2n},\ (\tfrac{1}{7})^{2n},\ (\tfrac{1}{9})^{2n}, \ldots.$$

sehr kleine Größen, und es ist folglich nahe $b^{(n)} = C$, d. i. $b^{(n)}$ ist nahe eine constante Größe, oder nahe

$$\ldots = b^{(n+2)} = b^{(n+1)} = b^{(n)} = b^{(n-1)} = b^{(n-2)} = \ldots.$$

Die Glieder der obigen Reihen für $x^{(n)}$ und $z^{(n)}$ werden bald sehr klein, so daß es also vorzüglich auf die erstern Glieder die-

ser Reihen ankommt, und demnach mit desto größerer Genauigkeit, je größer n ist, gesetzt werden kann:

$$x^{(n)} = b^{(n)} \left\{ \Theta - \frac{\Theta^3}{2.3} + \frac{\Theta^5}{2.3.4.5} - \frac{\Theta^7}{2.3\ldots7} + \ldots \right\}$$

$$z^{(n)} = b^{(n)} \left\{ \frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^4}{2.3.4} + \frac{\Theta^6}{2.3..6} - \frac{\Theta^8}{2.3..8} + \ldots \right\},$$

d. i. nach bekannten Sätzen:

$$x^{(n)} = b^{(n)} \sin \Theta, \quad z^{(n)} = b^{(n)}(1 - \cos \Theta).$$

In einer beliebigen Cykloide denke man sich jetzt einen beliebigen Punkt M, und bezeichne die Bogen der Cykloide von diesem Punkte bis zur Basis und bis zum Scheitel respective durch s und s'; so ist, wenn a den Halbmesser des erzeugenden Kreises, φ den Wälzungswinkel bezeichnet, nach dem Art. Cykloide. XIII.

$$s = 4a(1 - \cos \tfrac{1}{2}\varphi), \quad s' = 4a \cos \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Denkt man sich nun ferner durch den Punkt M eine Berührende gezogen, und bezeichnet den von derselben mit der Basis eingeschlossenen Winkel durch Θ'; so folgt aus den Eigenschaften der Cykloide (a. a. O. X.) leicht, daß $\Theta' = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$, $\sin \Theta' = \cos \frac{1}{2}\varphi$, also

$$s = 4a(1 - \sin \Theta'), \quad s' = 4a \sin \Theta'$$

ist.

Bei den Linien CB, ED, GF, ... nehme man nun C, E, G, ... als Scheitel, AB als Basis an; so ist, wie sogleich erhellet, $x^{(n)} = s'$, $\Theta = \Theta'$ zu setzen, und es ist also für ein sehr großes n

$$s' = b^{(n)} \sin \Theta'.$$

Daher nähern sich also die in Rede stehenden Linien immer mehr und mehr einer halben Cykloide, deren Basis AB ist. Der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist $= \frac{1}{2} b^{(n)}$.

Bei den Linien CD, EF, GH, ... nehme man D, F, H, ... als Scheitel, AB als Basis an; so ist $z^{(n)} = s$, $90^0 - \Theta = \Theta'$ zu setzen, wie leicht erhellet. Also ist

$$s = b^{(n)}\{1 - \cos(90^0 - \Theta')\} = b^{(n)}(1 - \sin \Theta'),$$

so daß sich folglich diese Linien ebenfalls einer halben Cykloide immer mehr und mehr nähern, deren Basis AB, oder vielmehr der AB parallel ist. Der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist wieder $= \frac{1}{2} b^{(n)}$.

Der Erfinder dieses merkwürdigen Satzes ist Johann Bernoulli (Opp. T. IV. p. 98.) Euler hat zuerst einen Beweis gegeben (Nov. Comm. Petrop. T. X.). Auch s. m. Legendre Exercices de Calcul intégral. T. II. Paris. 1817. p. 541.

Noch einige Eigenschaften der Cykloide s. m. im Art. Variationsrechnung (51. 52. 54. 61.).

Cyklische Functionen, gleichbedeutend mit Kreis-Functionen, s. diesen Artikel und vergl. die Artikel Hyperbolische Functionen und Potenzial-Functionen.

Cyklometrie. Die von Klügel gegebene Darstellung dieses überaus wichtigen Artikels ist so veraltet und zum Theil auch unvollständig, daß eine fast ganz neue Bearbeitung desselben nöthig zu seyn scheint.

I. Entwickelung der trigonometrischen Linien in Reihen nach den Potenzen der Bogen.

1. Es kommt zunächst auf die Entwickelung des Sinus und Cosinus in Reihen an, wobei wir, die Binomial-Coefficienten der nten Potenz der Kürze wegen hier bloß durch A, B, C, D, E, ... bezeichnend, von folgendem geometrischen Satze ausgehen. Wenn n eine positive ganze Zahl ist; so ist immer:

$$\begin{aligned}\sin(x+n\Theta) = \sin x &+ A\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\ &- B\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\ &- C\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\ &+ D\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x+n\Theta) = \cos x &- A\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\ &- B\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\ &+ C\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\ &+ D\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\ &- \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Daß diese Formeln für $n = 1$ gelten, ist leicht zu zeigen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\sin(x+\Theta) &= \sin x\cos\Theta + \cos x\sin\Theta\\ &= \sin x\{1-2(\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\} + 2\cos x\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta\\ &= \sin x + \{\cos x\cos\tfrac{1}{2}\Theta - \sin x\sin\tfrac{1}{2}\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\ &= \sin x + \cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x+\Theta) &= \cos x\cos\Theta - \sin x\sin\Theta\\ &= \cos x\{1-2(\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\} - 2\sin x\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta\\ &= \cos x - \{\sin x\cos\tfrac{1}{2}\Theta + \cos x\sin\tfrac{1}{2}\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\ &= \cos x - \sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta).\end{aligned}$$

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß die Formeln für $n+1$ gelten, wenn sie für n gelten. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\sin(x+(n+1)\Theta) = \sin(x+n\Theta)\cos\Theta + \cos(x+n\Theta)\sin\Theta$$
$$= \sin x\cos\Theta + \cos x\sin\Theta$$
$$+ A\{\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\cos\Theta - \sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\sin\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$- B\{\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\cos\Theta + \cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\sin\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$
$$- C\{\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\cos\Theta - \sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\sin\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \sin(x+\Theta)$$
$$+ A\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$- B\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$
$$- C\cos(x+\tfrac{5}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$\cos(x+(n+1)\Theta) = \cos(x+n\Theta)\cos\Theta - \sin(x+n\Theta)\sin\Theta$$
$$= \cos x\cos\Theta - \sin x\sin\Theta$$
$$- A\{\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\cos\Theta + \cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\sin\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$- B\{\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\cos\Theta - \sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\sin\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$
$$+ C\{\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\cos\Theta + \cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\sin\Theta\}(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \cos(x+\Theta)$$
$$- A\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$- B\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$
$$+ C\sin(x+\tfrac{5}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Allgemein ist aber:

$$\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\Theta\right) = \sin\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta+\Theta\right)$$
$$= \sin\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\cos\Theta + \cos\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\sin\Theta$$
$$= \sin\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\left\{1-2(\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\right\} + 2\cos\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$
$$= \sin\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right) + \cos\left(x+\frac{\alpha-1}{2}\Theta\right)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta),$$

$$\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\Theta\right) = \cos\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta+\Theta\right)$$
$$= \cos\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\cos\Theta - \sin\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\sin\Theta$$
$$= \cos\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\left\{1-2(\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\right\} - 2\sin\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right)\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$
$$= \cos\left(x+\frac{\alpha-2}{2}\Theta\right) - \sin\left(x+\frac{\alpha-1}{2}\Theta\right)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta).$$

Mittelst dieser Ausdrücke erhält man leicht:

$$\sin(x+(n+1)\Theta) =$$
$$\sin x + \cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$+ A\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta) - A\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$

$$
\begin{aligned}
&- B\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2 - B\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&- C\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3 + C\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&+ \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\\
&\quad = \sin x + (1+A)\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\
&\qquad - (A+B)\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\
&\qquad - (B+C)\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&\qquad + (C+D)\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\\
&\quad = \sin x + A'\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\
&\qquad - B'\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\
&\qquad - C'\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&\qquad + D'\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

wenn wir die Coefficienten der $(n+1)$ten Potenz eines Binomiums durch A', B', C', D', E', ... bezeichnen, nach einem bekannten Satze von den Binomial-Coefficienten (s. d. Art. 5.). Eben so ist

$$
\begin{aligned}
&\cos(x+(n+1)\Theta) =\\
&\cos x - \sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\
&- A\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta) - A\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\
&- B\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2 + B\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&+ C\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3 + C\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&+ \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\\
&\quad = \cos x - (1+A)\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\
&\qquad - (A+B)\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\
&\qquad + (B+C)\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&\qquad + (C+D)\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&\qquad - \ldots\ldots\ldots\\
&\quad = \cos x - A'\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\
&\qquad - B'\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\
&\qquad + C'\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&\qquad + D'\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&\qquad - \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Unser Satz gilt also für $n+1$, wenn er für n gilt, und ist daher allgemein, weil er oben für $n=1$ als richtig erkannt worden ist. Wir haben also

$$
\begin{aligned}
\sin(x+n\Theta) = \sin x &+ \frac{n}{1}\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\\
&- \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\\
&- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\\
&+ \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder

$$\sin(x+n\Theta)=\sin x+\frac{n\Theta}{1}\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)$$
$$-\frac{n\Theta(n\Theta-\Theta)}{1.2}\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^2$$
$$-\frac{n\Theta(n\Theta-\Theta)(n\Theta-2\Theta)}{1.2.3}\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^3$$
$$+\frac{n\Theta(n\Theta-\Theta)(n\Theta-2\Theta)(n\Theta-3\Theta)}{1.2.3.4}\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^4$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn wir $n\Theta=i$ setzen, wo i jede Größe bedeuten kann, ungeachtet, daß n immer eine ganze positive Zahl seyn muß, da Θ jede Größe bezeichnen kann:

$$\sin(x+i)=\sin x+\frac{i}{1}\cos(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)$$
$$-\frac{i(i-\Theta)}{1.2}\sin(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^2$$
$$-\frac{i(i-\Theta)(i-2\Theta)}{1.2.3}\cos(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^3$$
$$+\frac{i(i-\Theta)(i-2\Theta)(i-3\Theta)}{1.2.3.4}\sin(x+\tfrac{4}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^4$$
$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Größen i und Θ sind nur der einzigen Bedingung unterworfen, daß $\frac{i}{\Theta}$ eine positive ganze Zahl ist.

Eben so ist

$$\cos(x+n\Theta)=\cos x-\frac{n}{1}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4$$
$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\cos x-\frac{n\Theta}{1}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)$$
$$-\frac{n\Theta(n\Theta-\Theta)}{1.2}\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^2$$
$$+\frac{n\Theta(n\Theta-\Theta)(n\Theta-2\Theta)}{1.2.3}\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^3$$
$$+\frac{n\Theta(n\Theta-\Theta)(n\Theta-2\Theta)(n\Theta-3\Theta)}{1.2.3.4}\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^4$$
$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos(x+i)=\cos x-\frac{i}{1}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)$$
$$-\frac{i(i-\Theta)}{1.2}\cos(x+\tfrac{2}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^2$$
$$+\frac{i(i-\Theta)(i-2\Theta)}{1.2.3}\sin(x+\tfrac{3}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^3$$
$$+\frac{i(i-\Theta)(i-2\Theta)(i-3\Theta)}{1.2.3.4}\cos(x+\tfrac{4}{2}\Theta)\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta}{\Theta}\right)^4$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $x=0$, und schreibt dann x für i, so wird, indem man zugleich 2Θ statt Θ setzt:

$$\sin x=\frac{x}{1}\cos\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)$$
$$-\frac{x(x-2\Theta)}{1.2}\sin 2\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^2$$
$$-\frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)}{1.2.3}\cos 3\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^3$$
$$+\frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)(x-6\Theta)}{1.2.3.4}\sin 4\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^4$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x}{1}\sin\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)$$
$$-\frac{x(x-2\Theta)}{1.2}\cos 2\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^2$$
$$+\frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)}{1.2.3}\sin 3\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^3$$
$$+\frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)(x-6\Theta)}{1.2.3.4}\cos 4\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^4$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo x ganz willkührlich ist, und Θ nur ein solches Verhalten zu x hat, daß $\frac{x}{2\Theta}$ eine positive ganze, oder $\frac{x}{\Theta}$ eine positive gerade ganze Zahl ist.

2. Bevor wir weiter gehen, ist es nöthig, einige Begriffe und Sätze von den Gränzen vorauszuschicken. Zugleich wollen wir die folgenden abkürzenden Bezeichnungen gebrauchen. N soll immer eine positive Größe bezeichnen, welche zwar als gegeben, aber stets als beliebig klein gedacht wird. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$, sollen immer gegebene positive Größen bezeichnen. Die kleinste unter diesen Größen soll durch M $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$ bezeichnet werden. Den positiven oder absoluten Werth einer Größe, wo es auf denselben besonders ankommt, wollen wir durch Vorsetzung eines p vor das Symbol der in Rede stehenden Größe andeuten, so daß also in dem zunächst Folgenden p nie einen

Coefficienten oder Factor bezeichnen soll. x wollen wir uns immer als positiv vorstellen.

Ist nun $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x, und L eine constante Größe von solcher Beschaffenheit, daß der positive Werth der Differenz $L-\varphi(x)$ für jedes x, welches kleiner als eine gewisse positive Größe α genommen wird, kleiner ist als eine gegebene noch so kleine positive Größe N; so heißt L die Gränze der Function $\varphi(x)$ für abnehmende x. Die Größe N kann beliebig klein angenommen werden, und α muß sich dann, wenn L die Gränze von $\varphi(x)$ seyn soll, so bestimmen lassen, daß der in Rede stehenden Bedingung genügt wird. Man kann also statt N natürlich auch $\frac{1}{2}N$, $\frac{1}{4}N$, $\frac{1}{4}N$, $\frac{1}{6}N$, ... setzen.

Soll also für abnehmende x die constante Größe L die Gränze der Function $\varphi(x)$ seyn; so muß sich, wenn N eine beliebige gegebene noch so kleine positive Größe bezeichnet, die positive Größe α so bestimmen lassen, daß für jedes x, welches $<\alpha$ ist, $p\{L-\varphi(x)\}<N$ ist.

3. Wenn L die Gränze von $\varphi(x)$, L_1 die Gränze von $\varphi_1(x)$ ist; so ist $L+L_1$ die Gränze von $\varphi(x)+\varphi_1(x)$.

Nach der Voraussetzung und nach (2.) lassen sich α und β so bestimmen, daß $p\{L-\varphi(x)\}<\frac{1}{2}N$ für $x<\alpha$, $p\{L_1-\varphi_1(x)\}<\frac{1}{2}N$ für $x<\beta$. Beide Bedingungen werden zugleich erfüllt, wenn man $x<M(\alpha,\beta)$ nimmt. Also ist

$$p\{L-\varphi(x)\}+p\{L_1-\varphi_1(x)\}<N$$

für $x<M(\alpha,\beta)$. Aber offenbar immer

$$p\{L-\varphi(x)\}+p\{L_1-\varphi_1(x)\} \overline{\overline{>}} p\{L-\varphi(x)+L_1-\varphi_1(x)\}$$
$$\overline{\overline{>}} p\{L+L_1-\varphi(x)-\varphi_1(x)\}.$$

Also

$$p\{L+L_1-\varphi(x)-\varphi_1(x)\}<N$$

für $x<M(\alpha,\beta)$. Folglich $L+L_1$ die Gränze von $\varphi(x)+\varphi_1(x)$ für abnehmende x (2.). Der Satz gilt, wie aus dem Beweise erhellet, die Functionen und ihre Gränzen mögen positiv oder negativ seyn.

Ist L_1 die Gränze von $\varphi_1(x)$, so ist offenbar $-L_1$ die Gränze von $-\varphi_1(x)$. Folglich ist $L+(-L_1)$ die Gränze von $\varphi(x)+(-\varphi_1(x))$, d. i. $L-L_1$ die Gränze von $\varphi(x)-\varphi_1(x)$.

Sind $L, L_1, L_2, \ldots L_n$ respective die Gränzen von $\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$; so folgt mittelst wiederholter Anwendung unsers Satzes augenblicklich, daß $\pm L \pm L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$, wo sich die obern und untern Zeichen nicht auf einander zu beziehen brauchen, die Gränze von $\pm\varphi(x) \pm\varphi_1(x) \pm\varphi_2(x) \pm \ldots \pm\varphi_n(x)$ ist.

4. Wenn L, L_1 die Gränzen von $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ sind; so ist LL_1 die Gränze vo $\varphi(x).\varphi_1(x)$.

Sey

$$L-\varphi(x)=X,\quad L_1-\varphi_1(x)=X_1\ ;$$
$$L-X=\varphi(x),\quad L_1-X_1=\varphi_1(x)\ ;$$

so ist

$$LL_1-L_1X-LX_1+XX_1=\varphi(x).\varphi_1(x)\ .$$
$$LL_1-\varphi(x).\varphi(x)=L_1X+LX_1-XX_1\ .$$

Nach der Voraussetzung ist es verstattet, zu setzen:

$$pX<p\left(\frac{N}{3L_1}\right),\ \text{für}\ x<\alpha\ ;$$
$$pX_1<p\left(\frac{N}{3L}\right),\ \text{für}\ x<\beta\ ;$$
$$pX<\tfrac{1}{3},\ \text{für}\ x<\gamma\ ;$$
$$pX_1<N,\ \text{für}\ x<\delta\ .$$

Diese Bedingungen erfüllt man zugleich, wenn man $x<M(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ setzt. Also ist zugleich:

$$p(L_1X)<\frac{N}{3},\ p(LX_1)<\frac{N}{3}\ ,$$
$$p(XX_1)<\frac{N}{3}$$

für $x<M(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Also auch

$$p(L_1X)+p(LX_1)+p(XX_1)<N$$

für $x<M(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Offenbar ist aber immer:

$$p(L_1X)+p(LX_1)+p(XX_1)\overline{\overline{>}}\,p(L_1X+LX_1-XX_1)\ .$$

Folglich ist auch

$$p(L_1X+LX_1-XX_1)<N$$

für $x<M(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, d. i.

$$p\{LL_1-\varphi(x).\varphi_1(x)\}<N$$

für $x<M(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Also ist LL_1 die Gränze von $\varphi(x).\varphi_1(x)$.

5. Ist L die Gränze von $\varphi(x)$, und a eine constante Größe; so ist $\frac{L}{a}$ die Gränze von $\frac{\varphi(x)}{a}$.

Nach der Voraussetzung ist man berechtigt zu setzen:

$$p\{L-\varphi(x)\}<p(aN),\ \text{für}\ x<\alpha\ .$$

Also offenbar auch:

$$p\left\{\frac{L-\varphi(x)}{a}\right\}<N,\ \text{für}\ x<\alpha\ ;$$
$$p\left\{\frac{L}{a}-\frac{\varphi(x)}{a}\right\}<N,\ \text{für}\ x<\alpha\ .$$

Folglich ist $\frac{L}{a}$ die Gränze von $\frac{\varphi(x)}{a}$. Setzt man $\frac{1}{a}$ für a; so folgt augenblicklich, daß aL die Gränze von $a\,\varphi(x)$ ist, wel-

ches man übrigens auch auf ganz ähnliche Art, wie vorher, beweisen könnte.

6. Man habe nun die Function

$$\frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)..(x-2\lambda\Theta)}{1.2.3.4.5...(\lambda+1)}\cos(\lambda+1)\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\lambda+1},$$

wo wir x und λ als constant, Θ als veränderlich betrachten. x, so wie also auch Θ (1.), sey positiv. Wenn Θ fortwährend abnimmt, d. i. sich immer mehr und mehr der Null nähert; so nähern sich

$$x-2\Theta,\ x-4\Theta,\ x-6\Theta,\ \ldots\ x-2\lambda\Theta$$

sämmtlich immer mehr und mehr der Gränze x, so wie

$$\cos(\lambda+1)\Theta \text{ und } \frac{\sin\Theta}{\Theta}$$

immer mehr und mehr der Einheit, wie aus ganz einfachen trigonometrischen und geometrischen Gründen augenblicklich erhellet. Daher ist, wie aus den in (3.) — (5.) bewiesenen Sätzen unmittelbar folgt

$$\frac{x^{\lambda+1}}{1.2.3.4\ldots(\lambda+1)}$$

die Gränze der obigen Function für abnehmende Θ.

Eben so leicht erhellet, daß die Gränze der Function

$$\frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)\ldots(x-2\lambda\Theta)}{1.2.3.4.5\ldots(\lambda+1)}\sin(\lambda+1)\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\lambda+1}$$

$=0$ ist, weil, wenn Θ abnimmt, $\sin(\lambda+1)\Theta$ der Null sich immer mehr und mehr nähert.

Setzen wir also

$$\begin{aligned} S = &\ \frac{x}{1}\cos\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right) \\ &- \frac{x(x-2\Theta)}{1.2}\sin 2\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^2 \\ &- \frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)}{1.2.3}\cos 3\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pm \frac{x(x-2\Theta)..(x-2\lambda\Theta)}{1.2.3\ldots(\lambda+1)}\begin{Bmatrix}\cos(\lambda+1)\Theta\\ \sin(\lambda+1)\Theta\end{Bmatrix}\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\lambda+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma = 1 &- \frac{x}{1}\sin\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right) \\ &- \frac{x(x-2\Theta)}{1.2}\cos 2\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^2 \\ &+ \frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)}{1.2.3}\sin 3\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pm \frac{x(x-2\Theta)..(x-2\lambda\Theta)}{1.2.3\ldots.(\lambda+1)}\begin{Bmatrix}\sin(\lambda+1)\Theta\\ \cos(\lambda+1)\Theta\end{Bmatrix}\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\lambda+1} \end{aligned}$$

wo die doppelten Zeichen in der zweiten Reihe keine Beziehung zu den doppelten Zeichen in der ersten haben; so folgt aus dem Vorhergehenden und dem in (3.) bewiesenen Satze, daß, für abnehmende Θ, die Gränze von S

$$=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots5}-\frac{x^7}{1\ldots7}+\ldots\pm\frac{x^{\lambda+1}}{1\ldots(\lambda+1)}\cdot\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},$$

und die Gränze von Σ

$$=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots4}-\frac{x^6}{1\ldots6}+\ldots\pm\frac{x^{\lambda+1}}{1\ldots(\lambda+1)}\cdot\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$$

ist, wobei man zu bemerken hat, daß in den letzten Gliedern die obern oder untern Multiplikatoren zu nehmen sind, jenachdem $\lambda+1$ eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

7. Die Größe x ist, wie schon erinnert, stets als gegeben und constant zu betrachten. Es läßt sich also leicht eine Zahl $\mu>2x$ angeben. Für eine solche Zahl ist, wie augenblicklich erhellet:

$$\frac{x^\mu}{1\ldots\mu}>\frac{2x^{\mu+1}}{1\ldots(\mu+1)}$$
$$\frac{x^{\mu+1}}{1\ldots(\mu+1)}>\frac{2x^{\mu+2}}{1\ldots(\mu+2)}$$
$$\frac{x^{\mu+2}}{1\ldots(\mu+2)}>\frac{2x^{\mu+3}}{1\ldots(\mu+3)}$$
u. s. f. u. s. f.

oder

$$\frac{x^{\mu+1}}{1\ldots(\mu+1)}<\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^\mu}{1\ldots\mu}$$
$$\frac{x^{\mu+2}}{1\ldots(\mu+2)}<\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^{\mu+1}}{1\ldots(\mu+1)}$$
$$\frac{x^{\mu+3}}{1\ldots(\mu+3)}<\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^{\mu+2}}{1\ldots(\mu+2)}$$
u. s. f. u. s. f.

so daß man also nach dem ersten Satze des zehnten Buchs der Elemente des Euclides immer endlich auf ein Glied

$$\frac{x^\nu}{1\ldots\nu}<\tfrac{1}{2}N,$$

wo also $\nu>\mu$ ist, kommen muß. Da $\nu>\mu$, d. i. $>2x$ ist; so ist

$$\frac{x^\nu}{1\ldots\nu}>\frac{2x^{\nu+1}}{1\ldots(\nu+1)}$$
$$\frac{x^{\nu+1}}{1\ldots(\nu+1)}>\frac{2x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)}$$
$$\frac{x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)}>\frac{2x^{\nu+3}}{1\ldots(\nu+3)}$$
u. s. f. u. s. f.

Folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$\frac{x^\nu}{1\ldots\nu} > \frac{x^{\nu+1}}{1\ldots(\nu+1)} + \frac{x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{1\ldots(\nu+3)} + \ldots\ldots$$

$$\frac{2x^\nu}{1\ldots\nu} > \frac{x^\nu}{1\ldots\nu} + \frac{x^{\nu+1}}{1\ldots(\nu+1)} + \frac{x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{1\ldots(\nu+3)} + \ldots$$

d. i. nach dem Obigen:

$$\frac{x^\nu}{1\ldots\nu} + \frac{x^{\nu+1}}{1\ldots(\nu+1)} + \frac{x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{1\ldots(\nu+3)} + \ldots < N.$$

8. Da die Vielfachen von Θ, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht, die Größe x nie übersteigen, oder vielmehr die Glieder, wo dies der Fall ist, sämmtlich verschwinden, und x sowohl, als auch Θ, positiv ist; da ferner weder der Sinus, noch der Cosinus, jemals > 1, und $\frac{\sin\Theta}{\Theta}$ immer < 1 ist; so ist klar, daß

$$p\left\{\frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2(\nu-1)\Theta)}{1.2.3.4\ldots\nu}\begin{pmatrix}\cos\nu\Theta\\ \sin\nu\Theta\end{pmatrix}\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^\nu\right\} < \frac{x^\nu}{1\ldots\nu}$$

$$p\left\{\frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2\nu\Theta)}{1.2.3.4\ldots(\nu+1)}\begin{pmatrix}\sin(\nu+1)\Theta\\ \cos(\nu+1)\Theta\end{pmatrix}\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\nu+1}\right\} < \frac{x^{\nu+1}}{1\ldots(\nu+1)}$$

$$p\left\{\frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2(\nu+1)\Theta)}{1.2.3.4\ldots(\nu+2)}\begin{pmatrix}\cos(\nu+2)\Theta\\ \sin(\nu+2)\Theta\end{pmatrix}\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\nu+2}\right\} < \frac{x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)}$$

$$p\left\{\frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2(\nu+2)\Theta)}{1.2.3.4\ldots(\nu+3)}\begin{pmatrix}\sin(\nu+3)\Theta\\ \cos(\nu+3)\Theta\end{pmatrix}\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{\nu+3}\right\} < \frac{x^{\nu+3}}{1\ldots(\nu+3)}$$

u. s. f. u. s. f.

ist. Bezeichnen wir also die Summe der Größen auf der linken Seite durch Ω, die Summe der Größen auf der rechten Seite durch Ω'; so ist

$$\Omega < \Omega'.$$

Nehmen wir nun, wie es nach (7.) immer möglich ist, ν so an, daß $\Omega' < \frac{1}{2}N$ ist, so ist auch $\Omega < \frac{1}{2}N$. Folglich $\Omega + \Omega' < N$. Also um so mehr:

$$\Omega + \frac{x^\nu}{1\ldots\nu} + \frac{x^{\nu+2}}{1\ldots(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+4}}{1\ldots(\nu+4)} + \ldots < N,$$

da die zu Ω addirte Reihe offenbar kleiner als die durch Ω' bezeichnete Reihe ist.

Die Glieder der Größe auf der linken Seite sind sämmtlich positiv, so daß also der absolute Werth dieser Größe um so mehr $< N$ seyn wird, wenn man auf ganz willkührliche Weise einige ihrer Glieder negativ nimmt, wie sogleich in die Augen fällt.

Auch erhellet aus (7.) unmittelbar, daß man sich immer ν zugleich so angenommen denken kann, daß es, wie es gerade der Zweck der Betrachtung erheischet, eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, weil mittelst der Betrachtungen in (7.) der Werth dieser Größe nicht auf absolute Weise, sondern nur auf eine solche

Art bestimmt worden ist, daß man dieselbe größer als eine gewisse gegebene Größe zu nehmen hat.

9. Man denke sich nun zuerst ν so bestimmt, daß es eine ungerade Zahl, $= 2\lambda + 1$, ist, und daß, indem man

$$\begin{aligned}\Phi = \quad & (-1)^\lambda . \frac{x(x-2\Theta)..(x-4\lambda\Theta)}{1.2.3...(2\lambda+1)} \cos(2\lambda+1)\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda+1} \\ & + (-1)^{\lambda+1} . \frac{x(x-2\Theta)..(x-2(2\lambda+1)\Theta)}{1.2.3...(2\lambda+2)} \sin(2\lambda+2)\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda+2} \\ & + (-1)^{\lambda+1} . \frac{x(x-2\Theta)..(x-4(\lambda+1)\Theta)}{1.2.3...(2\lambda+3)} \cos(2\lambda+3)\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda+3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi' = \quad & (-1)^\lambda . \frac{x^{2\lambda+1}}{1...(2\lambda+1)} \\ & + (-1)^{\lambda+1} . \frac{x^{2\lambda+3}}{1...(2\lambda+3)} \\ & + (-1)^{\lambda+2} . \frac{x^{2\lambda+5}}{1...(2\lambda+5)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

setzt,

$$p(\Phi - \Phi') < \tfrac{1}{2}N$$

ist, welches nach (8.) immer möglich ist, wobei man nur die wegen der Vorzeichen in (8.) gemachte Bemerkung wohl zu berücksichtigen hat. Nachdem man $\nu = 2\lambda + 1$ auf diese Weise bestimmt hat, nehme man Θ so klein, daß, indem man

$$\begin{aligned}S = \quad & \frac{x}{1} \cos\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right) \\ & - \frac{x(x-2\Theta)}{1.2} \sin 2\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^2 \\ & - \frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)}{1.2.3} \cos 3\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^\lambda . \frac{x(x-2\Theta)...(x-2(2\lambda-1)\Theta)}{1.2.3.....2\lambda} \sin 2\lambda\Theta \left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda} .\end{aligned}$$

$$S' = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \frac{x^7}{1...7} + \ldots + (-1)^{\lambda-1} . \frac{x^{2\lambda-1}}{1..,(2\lambda-1)}$$

setzt,

$$p(S - S') < \tfrac{1}{2}N$$

ist, welches nach (6.) ebenfalls immer möglich ist, wobei man zu bemerken hat, daß bei der Bestimmung von $\nu = 2\lambda + 1$ die Größe Θ noch ganz unbestimmt bleibt.

Man kann also Θ jederzeit so bestimmen, daß

$$p(S - S') + p(\Phi - \Phi') < N$$

ist. Es ist aber, wie augenblicklich erhellet, immer

$$p(S-S') + p(\Phi - \Phi') \overline{\overline{>}} p(S - S' + \Phi - \Phi')$$
$$\overline{\overline{>}} p\{(S+\Phi) - (S'+\Phi')\},$$

so daß man also um so mehr Θ immer so bestimmen kann, daß

$$p\{(S+\Phi) - (S'+\Phi')\} < N$$

ist.

Da man sich nun mittelst (1.) sogleich überzeugt, daß

$$S + \Phi = \sin x$$

ist; so kann man also Θ immer so bestimmen, daß

$$p\{\sin x - (S'+\Phi')\} < N$$

ist. Aber

$$S'+\Phi' = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots.$$

Also kann man immer Θ so klein nehmen, daß der absolute Werth der Differenz

$$\Delta = \sin x - \left\{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots\right\}$$

kleiner wird, als jede gegebene, noch so kleine, Größe. Nun ist aber Δ von Θ ganz unabhängig. Also muß der absolute Werth der Differenz Δ an sich kleiner als jede gegebene, noch so kleine, Größe seyn, woraus man augenblicklich schließt, daß $\Delta = 0$, folglich

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots.$$

ist. Wir haben vorausgesetzt, daß x positiv sey. Bekanntlich ist aber allgemein $\sin(-x) = -\sin x$; also

$$\sin(-x) = -\left\{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots\right\}$$
$$= \frac{(-x)}{1} - \frac{(-x)^3}{1.2.3} + \frac{(-x)^5}{1\ldots5} - \frac{(-x)^7}{1\ldots7} + \ldots$$

so daß also in völliger Allgemeinheit für jedes x:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots.$$

ist.

10. Ferner denke man sich ν so bestimmt, daß es eine gerade Zahl, $=2\lambda$, ist, und daß, indem man

$$\Psi' = (-1)^\lambda \cdot \frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2(2\lambda-1)\Theta)}{1.2.3\ldots.2\lambda}\cos 2\lambda\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda}$$
$$+ (-1)^{\lambda+1} \cdot \frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-4\lambda\Theta)}{1.2.3\ldots(2\lambda+1)}\sin(2\lambda+1)\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda+1}$$
$$+ (-1)^{\lambda+1} \cdot \frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2(2\lambda+1)\Theta)}{1.2.3\ldots(2\lambda+2)}\cos(2\lambda+2)\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda+2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Psi' = (-1)^\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda}}{1\ldots 2\lambda} + (-1)^{\lambda+1} \cdot \frac{x^{2\lambda+2}}{1\ldots(2\lambda+2)} + (-1)^{\lambda+2} \cdot \frac{x^{2\lambda+4}}{1\ldots(2\lambda+4)} + \ldots\ldots\ldots$$

setzt,

$$p(\Psi' - \Psi') < \tfrac{1}{2}N$$

wird, welches nach (8.) immer möglich ist.

Hierauf bestimme man Θ so, daß, indem man:

$$\begin{aligned}\Sigma = 1 &- \frac{x}{1}\sin\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right) \\ &- \frac{x(x-2\Theta)}{1.2}\cos 2\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^2 \\ &+ \frac{x(x-2\Theta)(x-4\Theta)}{1.2.3}\sin 3\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^3 \\ &+ (-1)^\lambda \cdot \frac{x(x-2\Theta)\ldots(x-2(2\lambda-2)\Theta)}{1.2.3\ldots(2\lambda-1)}\sin(2\lambda-1)\Theta\left(\frac{\sin\Theta}{\Theta}\right)^{2\lambda-1}\end{aligned}$$

$$\Sigma' = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1\ldots 6} + \ldots + (-1)^{\lambda-1} \cdot \frac{x^{2\lambda-2}}{1\ldots(2\lambda-2)}$$

setzt,

$$p(\Sigma - \Sigma') < \tfrac{1}{2}N$$

ist, welches nach (6.) immer möglich ist.

Man kann also Θ immer so bestimmen, daß

$$p(\Sigma - \Sigma') + p(\Psi' - \Psi') < N$$

ist. Es ist aber immer

$$\begin{aligned}p(\Sigma - \Sigma') + p(\Psi' - \Psi') &\overline{\overline{>}}\, p(\Sigma - \Sigma' + \Psi' - \Psi') \\ &\overline{\overline{>}}\, p\{(\Sigma + \Psi') - (\Sigma' + \Psi')\},\end{aligned}$$

so daß man also um so mehr Θ immer so bestimmen kann, daß

$$p\{(\Sigma + \Psi') - (\Sigma' + \Psi')\} < N$$

ist. Aus (1.) erhellet aber sogleich, daß

$$\Sigma + \Psi' = \cos x$$

ist, und man kann folglich Θ immer so klein nehmen, daß

$$p\{\cos x - (\Sigma + \Psi')\} < N$$

ist. Da nun offenbar

$$\Sigma' + \Psi' = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots 4} - \frac{x^6}{1\ldots 6} + \frac{x^8}{1\ldots 8} - \ldots$$

ist; so kann man immer Θ so klein nehmen, daß der absolute Werth der Differenz

$$\Delta' = \cos x - \left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots 4} - \frac{x^6}{1\ldots 6} + \frac{x^8}{1\ldots 8} - \ldots\right\}$$

kleiner wird, als jede gegebene, noch so kleine, Größe. Da aber diese Differenz von Θ ganz unabhängig ist, so muß der absolute Werth derselben an sich kleiner als jede gegebene, noch so kleine, Größe seyn, d. i. es muß $\Delta = 0$ seyn. Also

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \ldots$$

für jedes positive x. Ist x negativ, so ist bekanntlich allgemein $\cos(-x) = \cos x$; also

$$\cos(-x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \ldots$$

$$= 1 - \frac{(-x)^2}{1.2} + \frac{(-x)^4}{1\ldots4} - \frac{(-x)^6}{1\ldots6} + \frac{(-x)^8}{1\ldots8} - \ldots,$$

d. i. allgemein

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \ldots$$

11. Die beiden Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \ldots$$

sind für die ganze Analysis von der größten Wichtigkeit, wodurch die Mittheilung des obigen Beweises derselben, welcher allerdings nicht zu den kürzesten gehört, gerechtfertigt erscheinen mag. Einen andern auf die Theorie der Gränzen gegründeten Beweis der erstern Reihe, den ich auch jetzt noch für völlig streng halte, findet man in meinen Mathematischen Abhandlungen. Altona. 1822. S. 1. ff. An diesem Orte ist auch gezeigt, wie vermittelst der goniometrischen Gleichung

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

die Reihe für den Cosinus aus der Reihe für den Sinus hergeleitet werden kann. Einen Beweis mittelst der unbestimmten Coefficienten s. m. in dem Artikel Unbestimmte Coefficienten. (24.). Dieser Beweis setzt die Möglichkeit der Entwickelung in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe voraus, welches im Allgemeinen in Bezug auf jede Function unter gewissen Modificationen a. a. O. (7.) zu rechtfertigen versucht worden ist. Einen Beweis durch die Differentialrechnung s. im Art. Taylors Lehrsatz (17.), welcher aber auf derselben Voraussetzung beruhen möchte. Ein sehr genügender Beweis nach Cauchy ist im Art. Unmögliche Größe. (41.) gegeben worden, welchem nur vorzuwerfen seyn möchte, daß er den Gebrauch der imaginären Größen, an die doch bei einer an sich so elementaren Betrachtung unmittelbar gar nicht zu denken ist, implicirt. Die von Klügel (Thl. I. S. 620. ff.) gegebene Darstellung möchte die wenigste Befriedigung gewähren. Wenn

auch unsere obige Darstellung nicht zu den einfachsten gehört, so scheint doch der völlig strenge und evidente Beweis solcher wichtigen elementaren Sätze um keinen zu hohen Preis erkauft werden zu können, und in der That mag ein einfacherer völlig strenger Beweis nicht leicht zu führen seyn.

12. Wir gehen nun zu der Entwickelung der Cotangente über, welche wir am leichtesten mittelst der leicht zu beweisenden goniometrischen Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{2\sin x}$$

gewinnen. Nach dieser Formel ist nämlich, wenn wir für $\sin x$ und $\cos x$ die vorher gefundenen Reihen setzen:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{x^2}{2.1.2}+\frac{x^4}{2.1\ldots4}-\frac{x^6}{2.1\ldots6}+\frac{x^8}{2.1\ldots8}-\ldots}{1-\frac{x^2}{1\ldots3}+\frac{x^4}{1\ldots5}-\frac{x^6}{1\ldots7}+\frac{x^8}{1\ldots9}-\ldots}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots\right\}.$$

Multiplicirt man mit dem Nenner, und setzt die Coefficienten einander gleich; so erhält man folgende Gleichungen:

$$1 = A$$

$$-\frac{1}{2.1..2} = B - \frac{1}{1..3}$$

$$\frac{1}{2.1..4} = C - \frac{B}{1..3} + \frac{1}{1..5}$$

$$-\frac{1}{2.1..6} = D - \frac{C}{1..3} + \frac{B}{1..5} - \frac{1}{1..7}$$

$$\frac{1}{2.1..8} = E - \frac{D}{1..3} + \frac{C}{1..5} - \frac{B}{1..7} + \frac{1}{1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

welche sich leicht auf folgende Form bringen lassen:

$$0 = B + \frac{1}{2.1..3}$$

$$0 = C - \frac{B}{1..3} - \frac{3}{2.1..5}$$

$$0 = D - \frac{C}{1..3} + \frac{B}{1..5} + \frac{5}{2.1..7}$$

$$0 = E - \frac{D}{1..3} + \frac{C}{1..5} - \frac{B}{1..7} - \frac{7}{2.1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

oder

$$0 = (-B) - \frac{1}{2.1..3}$$

$$0 = (-C) - \frac{(-B)}{1..3} + \frac{3}{2.1..5}$$

$$0 = (-D) - \frac{(-C)}{1..3} + \frac{(-B)}{1..5} - \frac{5}{2.1..7}$$

$$0 = (-E) - \frac{(-D)}{1..3} + \frac{(-C)}{1..5} - \frac{(-B)}{1..7} + \frac{7}{2.1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

Vergleicht man diese Gleichungen mit den in diesen Zusätzen im Art. Bernoullische Zahlen (1.) aufgestellten Gleichungen; so ist klar, daß in der dortigen Bezeichnung:

$$-B = \alpha,\ -C = \beta,\ -D = \gamma,\ -E = \delta,\ \ldots;$$

also, wenn wir wie a. a. O. die Bernoullischen Zahlen durch

$$\overset{1}{B},\ \overset{3}{B},\ \overset{5}{B},\ \overset{7}{B},\ \overset{9}{B},\ \ldots$$

bezeichnen:

$$\overset{1}{B} = -1.2\,B$$

$$\overset{3}{B} = -1.2.3.4\,C$$

$$\overset{5}{B} = -1.2.3.4.5.6\,D$$

$$\overset{7}{B} = -1.2.3.4.5.6.7.8\,E$$

$$\overset{9}{B} = -1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\,F$$

u. s. f. u. s. f.

ist. Folglich

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{\overset{1}{B}x^2}{1.2} - \frac{\overset{3}{B}x^4}{1..4} - \frac{\overset{5}{B}x^6}{1..6} - \frac{\overset{7}{B}x^8}{1..8} - \ldots\right\}$$

d. i., wenn man $2x$ für x setzt:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2.\overset{1}{B}x}{1.2} - \frac{2^4.\overset{3}{B}x^3}{1..4} - \frac{2^6.\overset{5}{B}x^5}{1..6} - \frac{2^8.\overset{7}{B}x^7}{1..8} - \ldots$$

Daß aus dieser Entwickelung selbst zugleich die Statthaftigkeit der Annahme der Reihe

$$A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots$$

hervorgeht, fällt in die Augen. Zur Berechnung der Bernoullischen Zahlen ertheilt der angeführte Artikel ausführliche Anleitung.

13. Setzt man in die leicht zu beweisende goniometrische Gleichung:

$$\tan g\,x = \cot x - 2\cot 2x$$

für $\cot x$ und $\cot 2x$ die entsprechenden Reihen nach (12.); so findet man nach einigen leichten Reductionen der Coefficienten:

$$\tan x = \frac{2^2.(2^2-1)\overset{1}{B}x}{1.2} + \frac{2^4.(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{1..4} + \frac{2^6.(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{1..6}$$
$$+ \frac{2^8.(2^8-1)\overset{7}{B}x^7}{1..8} + \ldots\ldots$$

14. Ferner überzeugt man sich leicht, daß

$$\operatorname{cosec} x = \tan \tfrac{1}{2}x + \cot x$$

ist. Setzt man nun für $\tan \frac{1}{2}x$ und $\cot x$ die entsprechenden Reihen aus dem Vorhergehenden; so wird

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\overset{1}{B}x}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\overset{3}{B}x^3}{1..4} + \frac{2(2^5-1)\overset{5}{B}x^5}{1..6}$$
$$+ \frac{2(2^7-1)\overset{7}{B}x^7}{1..8} + \ldots\ldots$$

15. Setzt man

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1..4}-\frac{x^6}{1..6}+\frac{x^8}{1..8}-\ldots}$$
$$= B + \frac{\overset{2}{B}}{1.2}x^2 + \frac{\overset{4}{B}}{1..4}x^4 + \frac{\overset{6}{B}}{1..6}x^6 + \ldots\ldots;$$

so erhält man, wenn man mit dem Nenner multiplicirt, zur Bestimmung der Coefficienten B, $\overset{2}{B}$, $\overset{4}{B}$, ... leicht folgende Gleichungen:

$$1 = B$$
$$0 = \overset{2}{B} - B$$
$$0 = \overset{4}{B} - 6\overset{2}{B} + B$$
$$0 = \overset{6}{B} - 15\overset{4}{B} + 15\overset{2}{B} - B$$
$$0 = \overset{8}{B} - 28\overset{6}{B} + 70\overset{4}{B} - 28\overset{2}{B} + B$$

u. s. f. u. s. f.

Die bestimmten Coefficienten in diesen Gleichungen sich, wie sogleich erhellen wird, die Binomial-Coefficienten der geraden Potenzen. Das Gesetz näher zu erörtern ist um so weniger nöthig, da in dem Art. Bernoullische Zahlen. (10.) in diesen Zusätzen von der independenten Bestimmung der Sekanten-Coefficienten ausführlich gehandelt worden ist. Auch s. m. Scherk Mathematische Abhandlungen. Berlin. 1825. Erste Abh. über den Zusammenhang der Sekanten-Coefficienten mit den Bernoullischen Zahlen.

16. Da

$$\operatorname{sinvers} x = 1 - \cos x$$

ist; so ist

$$\sin\text{vers}\,x = \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1\ldots4} + \frac{x^6}{1\ldots6} - \frac{x^8}{1\ldots8} + \ldots\ldots$$

17. Bezeichnet, wie gewöhnlich, e die Basis der natürlichen Logarithmen, und setzen wir der Kürze wegen $\sqrt{-1}=i$; so ist bekanntlich:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \frac{ix^5}{1\ldots5} - \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \ldots + i\left\{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \ldots\right\}$$

d. i., wenn man auch $-x$ für x setzt:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x\,.$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen $\sin x$, $\cos x$; so erhält man:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

und hieraus ferner:

$$\tang x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{e^{2ix} - 1}{i(e^{2ix} + 1)} = \frac{1 - e^{-2ix}}{i(1 + e^{-2ix})}$$

$$\cot x = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{i(e^{2ix} + 1)}{e^{2ix} - 1} = \frac{i(1 + e^{-2ix})}{1 - e^{-2ix}}\,.$$

18. Diese imaginären Ausdrücke sind für die ganze Analysis von der größten Wichtigkeit, und leisten bei Beweisen und Summirungen von Reihen oft vortreffliche Dienste. Die nach Moivre benannten Formeln sind eine unmittelbare Folge aus denselben, indem nämlich für jedes n:

$$\cos nx + i\sin nx = e^{nix} = (e^{ix})^n = (\cos x + i\sin x)^n$$

$$\cos nx - i\sin nx = e^{-nix} = (e^{-ix})^n = (\cos x - i\sin x)^n$$

ist.

19. Wäre z. B. die Summe der Reihe

$$y = 1 + \frac{n}{1}x\cos\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2\cos 2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3\cos 3\varphi + \ldots\ldots$$

zu finden; so giebt man dieser Reihe mittelst der gefundenen imaginären Ausdrücke leicht folgende Form:

$$y = 1 + \frac{n}{1}x\,.\,\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^2\,.\,\frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3\,.\,\frac{e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi}}{2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2y = 1 + \frac{n}{1} x e^{i\varphi} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 e^{2i\varphi} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 e^{3i\varphi} + \ldots$$

$$+ 1 + \frac{n}{1} x e^{-i\varphi} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 e^{-2i\varphi} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 e^{-3i\varphi} + \ldots\ldots$$

d. i. nach dem Binomischen Lehrsatze:

$$2y = (1 + xe^{i\varphi})^n + (1 + xe^{-i\varphi})^n$$

d. i. nach (17.):

$$2y = (1 + x\cos\varphi + ix\sin\varphi)^n + (1 + x\cos\varphi - ix\sin\varphi)^n .$$

Setzt man

$$1 + x\cos\varphi = \alpha\cos\Theta, \quad x\sin\varphi = \alpha\sin\Theta ;$$

so wird:

$$2y = \alpha^n(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n + \alpha^n(\cos\Theta - i\sin\Theta)^n$$

$$= \alpha^n(e^{in\Theta} + e^{-in\Theta})$$

$$y = \alpha^n . \frac{e^{in\Theta} + e^{-in\Theta}}{2} = \alpha^n \cos n\Theta .$$

Aber

$$\alpha^2 = (1 + x\cos\varphi)^2 + x^2\sin\varphi^2 = 1 + 2x\cos\varphi + x^2$$

$$\tang\Theta = \frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi}, \quad \Theta = \text{Arc}\tang\frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi} .$$

Folglich:

$$y = (1 + 2x\cos\varphi + x^2)^{\frac{n}{2}} \cos n\,\text{Arc}\tang\frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi} .$$

Wäre die Reihe gegeben:

$$y = x\sin\varphi + \tfrac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}x^4\sin 4\varphi + \ldots.$$

so wäre

$$y = x . \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} + \tfrac{1}{2}x^2 . \frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{2i}$$

$$+ \tfrac{1}{3}x^3 . \frac{e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}}{2i}$$

$$+ \tfrac{1}{4}x^4 . \frac{e^{4i\varphi} - e^{-4i\varphi}}{2i}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$2iy = x e^{i\varphi} + \tfrac{1}{2}x^2 e^{2i\varphi} + \tfrac{1}{3}x^3 e^{3i\varphi} + \tfrac{1}{4}x^4 e^{4i\varphi} + \ldots.$$

$$- x e^{-i\varphi} - \tfrac{1}{2}x^2 e^{-2i\varphi} - \tfrac{1}{3}x^3 e^{-3i\varphi} - \tfrac{1}{4}x^4 e^{-4i\varphi} - \ldots.$$

d. i.

$$2iy = -\text{logn}(1 - xe^{i\varphi}) + \text{logn}(1 - xe^{-i\varphi}) = \text{logn}\frac{1 - xe^{-i\varphi}}{1 - xe^{i\varphi}} .$$

Folglich

$$e^{2iy} = \frac{1 - xe^{-i\varphi}}{1 - xe^{i\varphi}}$$

$$\frac{e^{2iy} - 1}{e^{2iy} + 1} = \frac{x(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2 - x(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$$

$$\frac{e^{2iy}-1}{i(e^{2iy}+1)} = \frac{x\,.\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}}{1-x\,.\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}}$$

$$\tang y = \frac{x \sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$$

und demnach

$$y = \text{Arc}\tang \frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}\,.$$

Für

$$y = 1 + x\cos\varphi + \frac{x^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{1.2.3}\cos 3\varphi + \ldots.$$

findet man:

$$2y = 1 + \frac{x}{1}e^{i\varphi} + \frac{x^2}{1.2}e^{2i\varphi} + \frac{x^3}{1.2.3}e^{3i\varphi} + \ldots.$$

$$+ 1 + \frac{x}{1}e^{-i\varphi} + \frac{x^2}{1.2}e^{-2i\varphi} + \frac{x^3}{1.2.3}e^{-3i\varphi} + \ldots.$$

d. i.

$$2y = e^{xe^{i\varphi}} + e^{xe^{-i\varphi}}$$
$$= e^{x\cos\varphi + ix\sin\varphi} + e^{x\cos\varphi - ix\sin\varphi}$$
$$= e^{x\cos\varphi}(e^{ix\sin\varphi} + e^{-ix\sin\varphi})$$

oder

$$y = e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi)\,.$$

Eben so ist für

$$2y = x\sin\varphi + \frac{x^2}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{x^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \ldots.$$

$$2iy = e^{xe^{i\varphi}} - e^{xe^{-i\varphi}}$$
$$= e^{x\cos\varphi}(e^{ix\sin\varphi} - e^{-ix\sin\varphi})$$

oder

$$y = e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi)\,.$$

Aehnliche Beispiele würden sich leicht mehrere finden lassen. Ueberall, wo die Coefficienten der Reihen Sinus und Cosinus vielfacher Winkel enthalten, leisten die imaginären Ausdrücke der Sinus und Cosinus vortreffliche Dienste bei der Summation. M. s. u. A. eine Abhandlung von Clausen in Crelles Journal IV. 3. S. 281.

II. Entwickelung der Bogen in Reihen nach Potenzen ihrer trigonometrischen Linien.

20. Wenn man eine, in eine Reihe entwickelte, Function φx von x finden kann, welche der Gleichung

$$x = \varphi x - \frac{(\varphi x)^3}{1.2.3} + \frac{(\varphi x)^5}{1\ldots5} - \frac{(\varphi x)^7}{1\ldots7} + \ldots.$$

genügt; so ist, weil nach (9.)

$$\sin \varphi x = \varphi x - \frac{(\varphi x)^3}{1.2.3} + \frac{(\varphi x)^5}{1\ldots5} - \frac{(\varphi x)^7}{1\ldots7} + \ldots.$$

ist,

$$x = \sin \varphi x \text{ ,}$$

und folglich φx ein Werth des Bogens, dessen Sinus $= x$ ist, wobei aber vorausgesetzt wird, daß auch in der That jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmter Werth von φx entspricht, welches im Allgemeinen nur dann statt finden wird, wenn die für φx erhaltene Reihe convergirt, weil bekanntlich divergirende Reihen nur eine analytische Summe haben, d. h. bloß als das Resultat einer allgemeinen analytischen Entwickelung zu betrachten sind. φx muß nämlich deshalb einen bestimmten arithmetischen Werth haben, weil diese Function als ein Bogen betrachtet wird, dem ein bestimmter Sinus entspricht.

21. Zuerst wollen wir untersuchen, ob überhaupt eine solche Bestimmung der Function φx möglich ist, daß im Allgemeinen der Gleichung

$$x = \varphi x - \frac{(\varphi x)^3}{1.2.3} + \frac{(\varphi x)^5}{1\ldots5} - \frac{(\varphi x)^7}{1\ldots7} + \ldots.$$

durch dieselbe genügt wird. Da dem Werthe $\varphi x = 0$ der Werth $x = 0$ entspricht, so wollen wir

$$\varphi x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots.$$

setzen. Wenn man diese Reihe nach und nach durch gemeine Multiplication auf die zweite, dritte, vierte, fünfte u. s. f. Potenz erhebt, und überhaupt

$$(\varphi x)^n = A_n x^n + B_n x^{n+1} + C_n x^{n+2} + D_n x^{n+3} + \ldots.$$

setzt; so überzeugt man sich sehr leicht, daß $A_n = A^n$ ist; daß B_n nur die Coefficienten A, B, und B bloß in der ersten Potenz; daß C_n nur die Coefficienten A, B, C, und C nur in der ersten Potenz enthält, u. s. f. Führt man nun die Potenzen von φx in die obige Gleichung ein; so wird

$$\begin{aligned} x = \; & Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots \\ & - \frac{1}{1.2.3}\left\{A_3 x^3 + B_3 x^4 + C_3 x^5 + D_3 x^6 + \ldots\right\} \\ & + \frac{1}{1\ldots5}\left\{A_5 x^5 + B_5 x^6 + C_5 x^7 + D_5 x^8 + \ldots\right\} \\ & - \frac{1}{1\ldots7}\left\{A_7 x^7 + B_7 x^8 + C_7 x^9 + D_7 x^{10} + \ldots\right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = \; & Ax + Bx^2 \\ & + \left\{C - \frac{1}{1.2.3} A_3\right\} x^3 \\ & + \left\{D - \frac{1}{1.2.3} B_3\right\} x^4 \end{aligned}$$

$$+ \left\{E - \frac{1}{1.2.3}C_3 + \frac{1}{1\ldots5}A_5\right\}x^5$$

$$+ \left\{F - \frac{1}{1.2.3}D_3 + \frac{1}{1\ldots5}B_5\right\}x^6$$

$$+ \left\{G - \frac{1}{1.2.3}E_3 + \frac{1}{1\ldots5}C_5 - \frac{1}{1\ldots7}A_7\right\}x^7$$

$$+ \left\{H - \frac{1}{1.2.3}F_3 + \frac{1}{1\ldots5}D_5 - \frac{1}{1\ldots7}B_7\right\}x^8$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und wir werden also unserer allgemeinen Gleichung genügen, wenn sich die Coefficienten A, B, C, D, E, ... so bestimmen lassen, daß

$$1 = A$$

$$0 = B$$

$$0 = C - \frac{1}{1.2.3}A_3$$

$$0 = D - \frac{1}{1.2.3}B_3$$

$$0 = E - \frac{1}{1.2.3}C_3 + \frac{1}{1\ldots5}A_5$$

$$0 = F - \frac{1}{1.2.3}D_3 + \frac{1}{1\ldots5}B_5$$

$$0 = G - \frac{1}{1.2.3}E_3 + \frac{1}{1\ldots5}C_5 - \frac{1}{1\ldots7}A_7$$

$$0 = H - \frac{1}{1.2.3}F_3 + \frac{1}{1\ldots5}D_5 - \frac{1}{1\ldots7}B_7$$

u. s. f. u. s. f.

ist. Die Möglichkeit einer solchen Bestimmung fällt aber sogleich in die Augen, wenn man bedenkt, daß mittelst der beiden ersten Gleichungen A und B bestimmt sind, daß nach dem Vorhergehenden

$$A = A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 1$$

ist, daß B_3, B_5, B_7, ... nur A und B, so wie C_3, C_5, C_7, ... nur A, B und C; D_3, D_5, D_7, ... nur A, B, C, D enthalten, u. s. f. Die wirkliche Bestimmung der Coefficienten mittelst obiger Gleichungen würde zu Weitläufigkeiten führen, weshalb wir, nachdem wir die Möglichkeit einer solchen Bestimmung gezeigt, nun einen andern Weg einschlagen wollen, wozu folgende vorläufige Begriffe nöthig sind.

22. Wenn

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

ist; so heißt die Reihe, welche man erhält, wenn man in jedem Gliede vorstehender Reihe den Exponenten von x um Eins vermindert, und das Glied selbst mit dem Exponenten multiplicirt,

die derivirte Function von y. Es ist also, wenn wir die derivirte Function mit Dy bezeichnen:

$$Dy = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots\ldots,$$

indem man sich $A = Ax^0$ gesetzt denkt.

23. Setzt man in der Reihe

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$$

$x + x'$ für x, und entwickelt nach Potenzen von x'; so erhält man, wenn der entsprechende Werth von y durch y_1 bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} y_1 &= A + B(x+x') + C(x+x')^2 + D(x+x')^3 + \ldots\ldots \\ &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots \\ &\quad + (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots\ldots)x' \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d. i.

$$y_1 = y + Dy.x' + \ldots\ldots$$

24. Wenn

$$\begin{aligned} y &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots \\ x &= A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

ist; so ist immer

$$Dx.Dy = 1.$$

Man setze $x + x'$ für x, und nehme an, daß dadurch y in $y + y'$ übergehe; so ist nach (23.):

$$\begin{aligned} y + y' &= y + Dy.x' + \ldots\ldots \\ x + x' &= x + Dx.y' + \ldots\ldots \end{aligned}$$

oder

$$y' = Dy.x' + \ldots\ldots, \quad x' = Dx.y' + \ldots\ldots$$

Folglich wenn man in die zweite Gleichung für y' seinen Werth aus der ersten setzt:

$$x' = Dx.Dy.x' + \ldots\ldots$$

für jedes x'. Also

$$Dx.Dy = 1.$$

25. Für $\varphi x = y$ ist nach (21.)

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots\ldots,$$

$$x = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1\ldots5} - \frac{y^7}{1\ldots7} + \ldots\ldots,$$

so daß also der in (24.) bewiesene Satz seine Anwendung findet. Nach (22.) ist

$$Dy = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} Dx &= 1 - \frac{3y^2}{1.2.3} + \frac{5y^4}{1\ldots5} - \frac{7y^6}{1\ldots7} + \ldots\ldots \\ &= 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1\ldots4} - \frac{y^6}{1\ldots6} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

d. i. nach (10.)

$$Dx = \cos y = \sqrt{1-x^2},$$

da nach (9.)

$$\sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1\ldots5} - \frac{y^7}{1\ldots7} + \ldots = x$$

ist. Folglich ist nach (24.)

$$1 = \sqrt{1-x^2}.(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots.$$

und folglich, wenn wir die Binomial-Coefficienten für den Exponenten $-\frac{1}{2}$ nach der Reihe bloß durch

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_5, \ldots\ldots$$

bezeichnen, da $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ im Allgemeinen zwei Werthe hat:

$$\pm\{1 + \mathfrak{B}_1 x^2 + \mathfrak{B}_2 x^4 - \mathfrak{B}_3 x^6 + \mathfrak{B}_4 x^8 - \ldots\}$$
$$= \pm 1 \mp \mathfrak{B}_1 x^2 \pm \mathfrak{B}_2 x^4 \mp \mathfrak{B}_3 x^6 \pm \mathfrak{B}_4 x^8 \mp \ldots$$
$$= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots,$$

woraus

$$B = D = F = H = \ldots = 0;$$

$$A = \pm 1,\ C = \mp \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}_1,\ E = \pm \tfrac{1}{5}\mathfrak{B}_2,\ G = \mp \tfrac{1}{7}\mathfrak{B}_3, \ldots$$

Nach (21.) ist aber $A = 1$. Also muß man die obern Zeichen nehmen, so daß folglich

$$y = x - \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}_1 x^3 + \tfrac{1}{5}\mathfrak{B}_2 x^5 - \tfrac{1}{7}\mathfrak{B}_3 x^7 + \tfrac{1}{9}\mathfrak{B}_4 x^9 - \ldots$$

ist. Da nun

$$\mathfrak{B}_n = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}(-1)^n$$

ist, so ist

$$y = \varphi x = x + \tfrac{1}{2}.\frac{x^3}{3}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9}$$
$$+ \ldots$$

und die Function φx ist also durch diese Reihe im Allgemeinen so bestimmt, daß der Gleichung

$$x = \varphi x - \frac{(\varphi x)^3}{1.2.3} + \frac{(\varphi x)^5}{1\ldots5} - \frac{(\varphi x)^7}{1\ldots7} + \ldots$$

durch dieselbe genügt wird. Nach dem Obigen muß nun aber die Convergenz der gefundenen Reihe noch besonders untersucht

werden. Betrachten wir zu dem Ende zunächst die geometrische Reihe

$$1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ \ldots\ldots,$$

so läßt sich leicht zeigen, daß diese Reihe jederzeit convergirt, wenn der absolute Werth von $p < 1$ ist. Sey nämlich überhaupt

$$s_n = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots p^{n-1},$$

so ist

$$s_{n+m} - s_n = p^n + p^{n+1} + p^{n+2} + \ldots + p^{n+m-1}$$
$$= p^n\{1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1}\} = p^n . \frac{1-p^m}{1-p}.$$

Ist nun der absolute Werth von $p < 1$, so nähert sich, für jedes beliebige bestimmte noch so große m, offenbar $s_{n+m} - s_n$, wenn n wächst, der Null fortwährend, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n groß genug nimmt, woraus man also sieht, daß s_n, wenn n wächst, sich einer bestimmten Gränze nähert, und die Reihe daher convergirt, immer vorausgesetzt, daß der absolute Werth von $p < 1$ ist. Uebrigens erhellet dies auch augenblicklich daraus, weil

$$s_n = \frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$$

ist, und der Bruch $\frac{p^n}{1-p}$ unter der obigen Voraussetzung offenbar der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt. Daß das so eben Bewiesene auch für die Reihe

$$p + p^3 + p^5 + p^7 + \ldots = p\{1 + p^2 + p^4 + p^6 + \ldots\}$$

gilt, versteht sich von selbst.

Da nun die Coefficienten der oben für φx gefundenen Reihe sämmtlich < 1 sind, und die Reihe

$$x,\ x^3,\ x^5,\ x^7,\ x^9,\ \ldots.$$

convergirt, wenn der absolute Werth von $x < 1$ ist, so ist klar, daß die für φx gefundene Reihe für jedes x, welches > -1, < 1 ist, convergirt. Man kann hier auch den in dem Art. Convergenz der Reihen (21.) i. d. Z. bewiesenen allgemeinen Satz anwenden. Setzen wir nämlich

$$\varphi x = x\left\{\begin{aligned} &1 + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{3} \\ &+ \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^4}{5} \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^6}{7} \\ &+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{9} \\ &+ \ldots. \end{aligned}\right\},$$

so ist in der dortigen Bezeichnung

$$a_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6......2n} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{1.3.5..(2n+1)}{2.4.6..(2n+2)} \cdot \frac{1}{2n+3}.$$

Folglich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}.$$

Wächst nun n, so nähert sich dieser Quotient offenbar immer mehr und mehr der Einheit, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n groß genug nimmt. Daher ist a. a. O. $A = 1$, und die obige Reihe convergirt oder divergirt also, jenachdem x zwischen den Gränzen $x = -1$, $x = +1$, oder außerhalb dieser Gränzen liegt.

Für $x = \pm 1$ wird unsere Reihe

$$\pm \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \tfrac{1}{7} + \ldots\ldots \right\}.$$

Auch diese Reihe convergirt, wie sich auf folgende Art zeigen läßt. Setzen wir

$$t_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6.....2n}, \quad t_{n+1} = \frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6...(2n+2)};$$

so ist

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}},$$

und dieser Quotient kann also, wenn n wächst, der Einheit beliebig nahe gebracht werden. Daher ist (Convergenz der Reihen. 21.) die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \ldots.$$

convergent für jedes zwischen den Gränzen $x = -1$, $x = +1$ enthaltene x, oder, wenn wir x positiv nehmen, für jedes $x < 1$. Bezeichnen wir also der Kürze wegen die Coefficienten, welche fortwährend abnehmen, durch a_0, a_1, a_2, a_3, ..., und setzen

$$s_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so kann n immer so groß angenommen werden, daß für jedes gegebene noch so kleine N und jedes m

$$s_{n+m} - s_n < N$$

ist. Nun kann man aber offenbar ν so groß nehmen, daß zugleich

$$\frac{1}{2\nu+1} < x^{n+m-1}, \quad a_\nu < a_{n+m-1}$$

ist, und es ist folglich, weil

$$\frac{1}{2\nu+1} \text{ und } a_\nu$$

unter den Größen

$$\frac{1}{2\nu+1}, \frac{1}{2\nu+3}, \frac{1}{2\nu+5}, \ldots \frac{1}{2\nu+2m-1};$$

$$a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots a_{\nu+m-1}$$

respective die größten, dagegen

$$x^{n+m-1} \text{ und } a_{n+m-1}$$

unter

$$x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots x^{n+m-1};$$

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+m-1}$$

respective die kleinsten sind, offenbar

$$\frac{1}{2\nu+1} < x^n, \quad a_\nu < a_n;$$

$$\frac{1}{2\nu+3} < x^{n+1}, \quad a_{\nu+1} < a_{n+1};$$

$$\frac{1}{2\nu+5} < x^{n+2}, \quad a_{\nu+2} < a_{n+2};$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{1}{2\nu+2m-1} < x^{n+m-1}, \quad a_{\nu+m-1} < a_{n+m-1};$$

also auch

$$a_\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1} + a_{\nu+1} \cdot \frac{1}{2\nu+3} + a_{\nu+2} \cdot \frac{1}{2\nu+5} + \ldots + a_{\nu+m-1} \cdot \frac{1}{2\nu+2m-1}$$
$$< a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_{n+m-1} x^{n+m-1},$$

d. i., wenn wir

$$S_\nu = a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{3} + a_2 \cdot \tfrac{1}{5} + \ldots + a_{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

setzen,

$$S_{\nu+m} - S_\nu < s_{n+m} - s_n,$$

d. i. nach dem Obigen

$$S_{\nu+m} - S_\nu < N,$$

so daß sich also diese Differenz für jedes m, wenn man nur ν groß genug annimmt, der Null beliebig nahe bringen läßt, weshalb folglich die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \tfrac{1}{7} + \ldots,$$

d. i, die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^4}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^6}{7} + \ldots$$

für $x = \pm 1$ convergent ist (Convergenz der Reihen. 1.).

Es fragt sich nun bloß noch, welcher Werth der Function Arc sin x durch diese noch mit x multiplicirte Reihe, die wir wieder durch φx bezeichnen wollen, dargestellt wird, da bekanntlich zu ein und demselben Sinus mehrere Bogen gehören, eine Frage, die sich, wie

es mir scheint, leicht auf folgende Art beantworten läßt. Nach dem Obigen ist die in Rede stehende Reihe für jedes x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ und für $x = \pm 1$ convergent, so daß man also die Function φx zwischen diesen Gränzen gewissermaßen als eine ganze rationale Function von x betrachten kann, woraus denn auch unmittelbar hervorgeht, daß diese Function zwischen den angegebenen Gränzen eine stetige Function von x ist. Für $x = 0$ ist $\varphi x = 0$ und auch $\operatorname{Arc}\sin x = 0$, wenn wir den kleinsten Werth von $\operatorname{Arc}\sin x$ in's Auge fassen. Läßt man nun x von Null an, ohne die Gränzen -1 und $+1$ zu überschreiten, sich stetig verändern, so wird nach dem Obigen auch φx und offenbar auch $\operatorname{Arc}\sin x$ von Null an sich stetig verändern, immer aber wird φx einen Werth von $\operatorname{Arc}\sin x$ darstellen, wenn nur $x \geqq -1$, $x \leqq +1$ ist, wie hier immer vorausgesetzt wird. Hieraus geht, wie es uns scheint, mit völliger Deutlichkeit hervor, daß für $x \geqq -1$, $x \leqq +1$ durch φx der Werth von $\operatorname{Arc}\sin x$ dargestellt wird, welcher ohne Rücksicht auf sein Zeichen $\leqq \frac{1}{2}\pi$ ist. Auch kann man hierbei noch bemerken, daß die gleichen positiven und negativen Werthen von x entsprechenden Werthe von φx einander gleich aber entgegengesetzt sind, welches eben so bei $\operatorname{Arc}\sin x$ der Fall ist.

Für jedes ganze positive oder negative n ist

$$\begin{aligned} \sin(2n\pi + \varphi x) &= \sin 2n\pi \cos\varphi x + \cos 2n\pi \sin\varphi x \\ &= \sin\varphi x = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)\pi - \varphi x) &= \sin(2n+1)\pi \cos\varphi x - \cos(2n+1)\pi \sin\varphi x \\ &= \sin\varphi x = x. \end{aligned}$$

Also ist für jedes ganze positive oder negative n

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc}\sin x = 2n\pi &+ x \\ &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} \\ &+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} \\ &+ \ldots\ldots \\ = (2n+1)\pi - x &- \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} \\ &- \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} \\ &- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} \\ &- \ldots\ldots \end{aligned}$$

immer für $x \geqq -1$, $x \leqq +1$.

26. Einen merkwürdigen Ausdruck für das Quadrat der Reihe

$$\begin{aligned}\operatorname{Arc}\sin x = x &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\\ &+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}\\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}\\ &+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9}\\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

hat Stainville (Mélanges d'Analyse. 1815.) gefunden. Man gelangt zu diesem merkwürdigen Ausdruck am leichtesten auf folgende Weise, wobei wir uns jedoch der Kürze wegen der Differentialrechnung bedienen wollen.

Sey die Function

$$\{\operatorname{logn}(x+\sqrt{x^2-1})\}^n = V$$

zu entwickeln.

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{n\{\operatorname{logn}(x+\sqrt{x^2-1})\}^{n-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n(n-1)\{\operatorname{logn}(x+\sqrt{x^2-1})\}^{n-2}}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = n(n-1)\{\operatorname{logn}(x+\sqrt{x^2-1})\}^{n-2} - x\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Setzen wir nun

$$V = \varphi n + \varphi_1 n.x + \varphi_2 n.x^2 + \varphi_3 n.x^3 + \varphi_4 n.x^4 + \ldots,$$

entwickeln die Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, und setzen deren Ausdrücke in obige Gleichung; so erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}&-2\varphi_2 n - 2.3\varphi_3 n.x - 3.4\varphi_4 n.x^2 - 4.5\varphi_5 n.x^3 - 5.6\varphi^6 n.x^4 - \ldots\\ &\qquad\qquad + 1.2\varphi_2 n.x^2 + 2.3\varphi_3 n.x^3 + 3.4\varphi_4 n.x^4 + \ldots\\ &= n(n-1)\varphi(n-2) + n(n-1)\varphi_1(n-2).x + n(n-1)\varphi_2(n-2).x^2 + \ldots\\ &\qquad\qquad - \varphi_1 n.x - 2\varphi_2 n.x^2 - \ldots\end{aligned}$$

Also allgemein

$$-(\varkappa+1)(\varkappa+2)\varphi_{\varkappa+2}n + (\varkappa-1)\varkappa\varphi_\varkappa n = n(n-1)\varphi_\varkappa(n-2) - \varkappa\varphi_\varkappa$$

$$(\varkappa+1)(\varkappa+2)\varphi_{\varkappa+2}n = \varkappa^2\varphi_\varkappa n - n(n-1)\varphi_\varkappa(n-2),$$

oder

$$\varphi_{\varkappa+2}n = \frac{\varkappa^2\varphi_\varkappa n - n(n-1)\varphi_\varkappa(n-2)}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}.$$

Man sieht also, daß, wenn man nur

$$\operatorname{logn}(x+\sqrt{x^2-1})$$

in eine Reihe nach Potenzen von x entwickeln kann, auch alle übrigen Potenzen dieser Function mittelst obiger Relation in Reihen entwickelt werden können. Man setze zu dem Ende

$$\log n(x+\sqrt{x^2-1}) = v,\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = u\ ;$$

so erhält man leicht durch Differentiation:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}u\ ,$$

wenn wir wieder $\sqrt{-1} = i$ setzen. Also ist

$$\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{q+1}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial^q u}{\partial x^q}\ ,$$

und folglich auch für $x = 0$:

$$\left(\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{q+1}}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial^q u}{\partial x^q}\right).$$

Setzen wir nun

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \mathfrak{B}_1 x^2 + \mathfrak{B}_2 x^4 - \mathfrak{B}_3 x^6 + \mathfrak{B}_4 x^8 - \ldots.$$

so ergiebt sich leicht:

$$\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = \{2.3..2p.\mathfrak{B}_p - 3.4..(2p+2).\mathfrak{B}_{p+1}x^2 + \ldots.\}(-1)^p$$

$$\frac{\partial^{2p+1} u}{\partial x^{2p+1}} = -\{2.3.4..(2p+2).\mathfrak{B}_{p+1}x - \ldots.\}(-1)^p\ .$$

Folglich für $x = 0$:

$$\left(\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}\right) = 1.2.3\ldots2p.\mathfrak{B}_p.(-1)^p,\ \left(\frac{\partial^{2p+1} u}{\partial x^{2p+1}}\right) = 0\ .$$

Aber

$$\mathfrak{B}_p = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2p}(-1)^p\ .$$

Folglich, weil $(-1)^p.(-1)^p = (-1)^{2p} = +1$ ist:

$$\left(\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}\right) = 1^2.3^2.5^2.7^2\ldots(2p-1)^2\ ,$$

und demnach

$$\left(\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{q+1}}\right) = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2\ldots(q-1)^2}{i}\ ,$$

wenn q eine gerade Zahl ist. Für ein ungerades q sind alle entsprechende Differentialquotienten $= 0$.

Nach der nach Maclaurin benannten Reihe ist nun:

$$v = (v) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{x}{1} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\cdot\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Folglich, weil

$$(v) = \log n\sqrt{-1} = \log n\, i = i'$$

ist, nach dem Vorhergehenden:

$$\log n (x + \sqrt{x^2 - 1}) = i' + \frac{1}{i} \cdot \frac{x}{1} + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{i} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{i} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

woraus man leicht schließt (25.):

$$i \log n (x + \sqrt{x^2 - 1}) = ii' + \text{Arc} \sin x .$$

Man hat hierbei zu bemerken, daß

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{i}(u) = \frac{1}{i}$$

ist.

Für $n = 2$ ist $n - 2 = 0$; also

$$\{ \log n (x + \sqrt{x^2 - 1} \}^{n-2} = 1 ,$$

und demnach in diesem Falle für $\varkappa > 0$:

$$\varphi(n-2) = 1, \; \varphi_\varkappa(n-2) = 0 .$$

Auch ist, wie sogleich erhellet, für $n = 2$:

$$\varphi n = (\log n\, i)^2 = i'^2 .$$

Ferner ist

$$\varphi_1 n = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{n(\log n\, i)^{n-1}}{i} = \frac{n i'^{n-1}}{i} ,$$

d. i. für $n = 2$:

$$\varphi_1 n = \frac{2i'}{i} .$$

Auch folgt aus der obigen allgemeinen Relation leicht:

$$\varphi_2 n = \frac{-2.1.1}{1.2} = -1$$

für $n = 2$. Indem man sich nun immer $n = 2$ gesetzt denkt, ist allgemein für $\varkappa > 0$:

$$\varphi_{\varkappa+2} n = \frac{\varkappa^2 \varphi_\varkappa n}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)} ,$$

woraus man erhält:

$$\varphi n = (\log n\, i)^2 = i'^2$$

$$\varphi_1 n = \frac{2 \log n\, i}{i} = \frac{2i'}{i}$$

$$\varphi_2 n = -1$$

$$\varphi_3 n = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{2i'}{i}$$

$$\varphi_4 n = -\frac{2^2}{3.4}$$

$$\varphi_5 n = \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{2i'}{i}$$

$$\varphi_6 n = -\frac{2^2.4}{3.5.6}$$

$$\varphi_7 n = \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \frac{2i'}{i}$$

$$\varphi_8 n = -\frac{2^2.4.6}{3.5.7.8}$$

$$\varphi_9 n = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} \cdot \frac{2i'}{i}$$

$$\varphi_{10} n = -\frac{2^2.4.6.8}{3.5.7.9.10}$$

u. s. f. u. s. f.

Hieraus erhält man

$$\{\log n(x+\sqrt{x^2-1})\}^2 = i'^2 + \frac{2i'}{i}\left\{x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\right\}$$
$$-\left\{x^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{x^8}{4} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{x^{10}}{5} + \ldots\right\}$$

d. i. nach (25.)

$$\{i\log n(x+\sqrt{x^2-1})\}^2 = -i'^2 + 2ii'\operatorname{Arc}\sin x + x^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{x^8}{4} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{x^{10}}{5} + \ldots$$

Weil aber nach dem Vorhergehenden

$$i\log n(x+\sqrt{x^2-1}) = ii' + \operatorname{Arc}\sin x$$

ist; so ist

$$\{i\log n(x+\sqrt{x^2-1})\}^2 = -i'^2 + 2ii'\operatorname{Arc}\sin x + (\operatorname{Arc}\sin x)^2$$

woraus, mit dem Vorhergehenden verglichen:

$$(\mathrm{Arc}\sin x)^2 = x^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{x^8}{4} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{x^{10}}{5} + \ldots\ldots$$

welches die von Stainville gefundene Reihe ist. Die Methode des Erfinders ist von der vorhergehenden wahrscheinlich ganz verschieden. Entwickelt man nach den hier gegebenen allgemeinen Formeln die höhern Potenzen von $i \log n(x + \sqrt{x^2-1})$, so erhält man auch zugleich Reihen für die höhern Potenzen von $\mathrm{Arc}\sin x$. Das Fortschreitungsgesetz dieser Reihen wird aber bald sehr zusammengesetzt. M. vergl. eine Abhandlung von Scholtz in Crelles Journal. III. 1. S. 70., wo ebenfalls eine von der hier angedeuteten verschiedene Methode angewandt worden ist.

27. Um nun auch $\mathrm{Arc\,tang}\, x$ nach Potenzen von x zu entwickeln, beweisen wir vorläufig noch einen Satz von den derivirten Functionen. Sind nämlich y, z Reihen, welche nach den Potenzen von x fortschreiten; so ist

$$D\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z\,Dy - y\,Dz}{z^2}.$$

Man setze $x + x'$ für x; so ist nach (23.)

$$\left(\frac{y}{z}\right)_1 = \frac{y + Dy.x' + \ldots.}{z + Dz.x' + \ldots.}$$

Um diese gebrochene Function nach Potenzen von x' zu entwickeln, setze man dieselbe

$$= A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3 + \ldots.,$$

so ist

$$y + Dy.x' + \ldots = (z + Dz.x' + \ldots)(A + Bx' + \ldots)$$
$$= Az + (ADz + Bz)x' + \ldots.$$

Folglich

$$Az = y,\ ADz + Bz = Dy,$$

und hieraus:

$$A = \frac{y}{z},\ B = \frac{z\,Dy - y\,Dz}{z^2}$$

Nach (23.) ist aber

$$\left(\frac{y}{z}\right)_1 = \frac{y}{z} + D\left(\frac{y}{z}\right).x' + \ldots = A + Bx' + \ldots$$

Also

$$D\left(\frac{y}{z}\right) = B = \frac{z\,Dy - y\,Dz}{z^2}.$$

28. Nach einfachen goniometrischen Gründen ist

$$\sin(\text{Arc tang}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, wenn, wie wir hier annehmen wollen, der absolute Werth von Arc tang x den Bogen $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigt. Also ist nach (25.), da für jedes endliche bestimmte x der absolute Werth von

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

immer < 1 ist:

$$\begin{aligned}\text{Arc tang}\, x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &+ \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3 \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^5 \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^7 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

woraus mittelst des binomischen Lehrsatzes augenblicklich erhellet, daß Arc tang x in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden kann. Auch ist klar, daß diese Reihe in allen Gliedern x enthält.

29. Man ist also berechtigt, zu setzen:

$$\text{Arc tang}\, x = y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots.$$

woraus (22.):

$$\text{D Arc tang}\, x = Dy = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots.$$

Da nun

$$x = \text{tang}\, y = \frac{\sin y}{\cos y}$$

ist; so ist nach (28.)

$$Dx = \frac{\cos y\, D\sin y - \sin y\, D\cos y}{\cos y^2}$$

Nach (9.) und (10.) ist aber

$$\sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1\ldots5} - \frac{y^7}{1\ldots7} + \ldots.$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1\ldots4} - \frac{y^6}{1\ldots6} + \ldots.$$

woraus sogleich

$$D\sin y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1\ldots4} - \ldots = \cos y$$

$$D\cos y = -y + \frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^5}{1\ldots5} + \ldots = -\sin y.$$

Also

$$Dx = \frac{\cos y^2 + \sin y^2}{\cos y^2} = \frac{1}{\cos y^2}.$$

Da nun

$$\sin y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \cos y^2 = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

ist; so ist

$$Dx = 1 + x^2.$$

Endlich ist nach (24.)

$$Dx . D \operatorname{Arc} \operatorname{tang} x = 1.$$

Folglich

$$D \operatorname{Arc} \operatorname{tang} x = \frac{1}{Dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots.$$

und demnach:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots$$

woraus sogleich:

$$B = D = F = H = \ldots. = 0$$

$$A = 1, \ C = -\tfrac{1}{3}, \ E = \tfrac{1}{5}, \ G = -\tfrac{1}{7}, \ \ldots.$$

Also

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tang} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots.$$

Ueberhaupt ist, für jedes ganze positive oder negative n:

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tang} x = n\pi + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

Wir wollen nun auch die Convergenz und Divergenz der Reihe

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tang} x = x \{ 1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4 - \tfrac{1}{7}x^6 + \tfrac{1}{9}x^8 - \ldots. \}$$

näher untersuchen. Nehmen wir bloß auf die absoluten Werthe der Coefficienten Rücksicht, so ist (Convergenz der Reihen. 21.)

$$a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2n+3};$$

also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}},$$

woraus man sieht, daß für wachsende n dieser Quotient sich der Einheit immer mehr und mehr nähert, und dieser Gränze, wenn man nur n groß genug nimmt, beliebig nahe gebracht werden kann. Daher ist unsere Reihe convergent, jenachdem x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten ist, oder außerhalb dieser Gränzen liegt (a. a. O.).

Für $x = \pm 1$ ist die eingeschlossene Reihe

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots,$$

und diese Reihe ist nach dem Artikel Convergenz der Reihen (15.) convergent. Also ist die Reihe

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tang} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

convergent oder divergent, jenachdem $x \overset{=}{>} -1$, $x \overset{=}{<} +1$ ist, oder x außerhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt.

30. Setzt man in der vorher gefundenen Reihe für den Bogen durch die Tangente $x = 1$, welches verstattet ist, da, wie wir gesehen haben, die Reihe in diesem Falle convergirt, so erhält man:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots.$$

Aehnliche Reihen würden sich leicht mehrere finden lassen. Eine merkwürdige Umformung der Reihe für Arc tang x s. m. im Art. Umformung der Reihen (16.). Setzt man in der Reihe für Arc sin x, wie verstattet ist, $x = 1$, so erhält man eine Reihe für $\tfrac{1}{2}\pi$.

III. Zerfällung der Exponential-Größen und trigonometrischen Linien in Factoren.

31. Wir gehen bei dieser Untersuchung von der folgenden Summation einiger Reihen aus.

Es ist

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta).$$

Folglich, für $\alpha = nx$, $\beta = x$:

$$\cos(n+1)x = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x$$

und demnach:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos x \\
-\cos 2x &= -2\cos x\cos x + 1 \\
\cos 3x &= 2\cos 2x\cos x - \cos x \\
-\cos 4x &= -2\cos 3x\cos x + \cos 2x \\
\cos 5x &= 2\cos 4x\cos x - \cos 3x \\
&\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Also, wenn man das Aggregat der Größen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen $= S$ setzt:

$$S = \cos x - 2S\cos x + 1 - S,$$

woraus man sogleich erhält:

$$S = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \ldots = \tfrac{1}{2}.$$

Nach (10.) ist aber

$$\begin{aligned}
S = \tfrac{1}{2} = \; & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots \\
& - (1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots).\frac{x^2}{1.2} \\
& + (1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \ldots).\frac{x^4}{1\ldots4} \\
& - (1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - \ldots).\frac{x^6}{1\ldots6} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

woraus augenblicklich folgt:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \tfrac{1}{2}$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots = 0$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \ldots = 0$$
$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - \ldots = 0$$
u. s. f. u. s. f.

Ferner ist auf ganz ähnliche Weise:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\,.$$

Folglich, für $\alpha = nx$, $\beta = x$:

$$\sin(n+1)x = 2\sin nx\cos x - \sin(n-1)x\,,$$

und demnach:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x \\ -\sin 2x &= -2\sin x\cos x \\ \sin 3x &= 2\sin 2x\cos x - \sin x \\ -\sin 4x &= -2\sin 3x\cos x + \sin 2x \\ \sin 5x &= 2\sin 4x\cos x - \sin 3x \end{aligned}$$
u. s. f. u. s. f.

Also, wenn wir das Aggregat der Größen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen durch S' bezeichnen:

$$S' = \sin x - 2S'\cos x - S'\,,$$

woraus

$$2S' = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{2\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \tang\tfrac{1}{2}x$$
$$S' = \tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}x\,.$$

Aber nach (9.)

$$\begin{aligned} S' = &\ (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots).\frac{x}{1} \\ &- (1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \ldots).\frac{x^3}{1.2.3} \\ &+ (1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \ldots).\frac{x^5}{1\ldots5} \\ &- (1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - \ldots).\frac{x^7}{1\ldots7} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und nach (13.)

$$\tfrac{1}{2}\tang\tfrac{1}{2}x = \frac{(2^2-1)\overset{1}{B}x}{1.2} + \frac{(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{1\ldots4} + \frac{(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{1\ldots6} + \ldots$$

Folglich, durch Vergleichung der einzelnen Glieder:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots = \frac{(2^2-1)\overset{1}{B}}{2}$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \ldots = -\frac{(2^4-1)\overset{3}{B}}{4}$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - \ldots = \frac{(2^6-1)\overset{5}{B}}{6}$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - \ldots = -\frac{(2^8-1)\overset{7}{B}}{8}$$

u. s. f. u. s. f.

32. Setzen wir jetzt

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} - \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \ldots = \Sigma \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}$$

so ist nach (9.)

$$\begin{aligned}\Sigma \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = &\left\{1 - \frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{3^{2n-2}} - \frac{1}{4^{2n-2}} + \ldots\right\}.\frac{x}{1}\\ &- \left\{1 - \frac{1}{2^{2n-4}} + \frac{1}{3^{2n-4}} - \frac{1}{4^{2n-4}} + \ldots\right\}.\frac{x^3}{1.2.3}\\ &+ \left\{1 - \frac{1}{2^{2n-6}} + \frac{1}{3^{2n-6}} - \frac{1}{4^{2n-6}} + \ldots\right\}.\frac{x^5}{1\ldots5}\\ &- \left\{1 - \frac{1}{2^{2n-8}} + \frac{1}{3^{2n-8}} - \frac{1}{4^{2n-8}} + \ldots\right\}.\frac{x^7}{1\ldots7}\\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{1}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1\ldots5}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-6}} - \ldots$$

$$= \frac{x}{1}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \ldots \mp \frac{x^{2n-3}}{1\ldots(2n-3)}\Sigma \pm \frac{1}{y^2}$$

$$\pm \frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}\Sigma \pm y^0 \mp \frac{x^{2n+1}}{1\ldots(2n+1)}\Sigma \pm y^2 \pm \ldots$$

d. i. nach (31.)

$$\Sigma \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}$$

$$= \frac{x}{1}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}} + \ldots \mp \frac{x^{2n-3}}{1\ldots(2n-3)}\Sigma \pm \frac{1}{y^2}$$

$$\pm \frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}.\tfrac{1}{2}$$

33. Setzt man in dieser Gleichung $\pi - x$ für x; so erhält man, weil

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x\\ \sin(2\pi - 2x) &= -\sin 2x\\ \sin(3\pi - 3x) &= \sin 3x\\ \sin(4\pi - 4x) &= -\sin 4x\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

ist:

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} + \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \ldots = \Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}$$

$$= (\pi - x)\,\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}}$$

$$- \frac{(\pi - x)^3}{1.2.3}\,\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}}$$

$$+ \frac{(\pi - x)^5}{1\ldots.5}\,\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-6}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm \frac{(\pi - x)^{2n-3}}{1\ldots(2n-3)}\,\Sigma \pm \frac{1}{y^2}$$

$$\pm \frac{(\pi - x)^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)} \cdot \tfrac{1}{2}\,.$$

Denkt man sich die Potenzen des Binomiums $\pi - x$ entwickelt; so fällt sogleich in die Augen, daß

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = a + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{2n-1} x^{2n-1}$$

ist. Für $x = 0$ ist offenbar $\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = 0$. Also $a = 0$. Folglich

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots + A_{2n-1} x^{2n-1}\,.$$

Ferner ist

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n-1}} + \frac{\sin 4x}{4^{2n-1}} + \ldots.$$

$$\frac{1}{2^{2n-2}}\,\Sigma \frac{\sin 2yx}{y^{2n-1}} = \frac{\sin 2x}{2^{2n-2}} + \frac{\sin 4x}{2.4^{2n-2}} + \frac{\sin 6x}{3.6^{2n-2}} + \ldots.$$

woraus sogleich

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n-2}}\,\Sigma \frac{\sin 2yx}{y^{2n-1}} = \Sigma \pm \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}$$

folgt. Da nun

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{2n-1} x^{2n-1}$$

$$\Sigma \frac{\sin 2yx}{y^{2n-1}} = 2A_1 x + 4A_2 x^2 + 8A_3 x^3 + \ldots\, 2^{2n-1} A_{2n-1} x^{2n-1}$$

ist; so ergiebt sich aus obiger Gleichung mittelst der in (32.) bewiesenen Relation:

$$A_1 \left\{1 - \frac{1}{2^{2n-3}}\right\} x = x\,\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-2}}$$

$$+ A_2 \left\{1 - \frac{1}{2^{2n-4}}\right\} x^2 \quad - \frac{x^3}{1.2.3}\,\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-4}}$$

$$+ A_3 \left\{1 - \frac{1}{2^{2n-5}}\right\} x^3 \quad + \frac{x^5}{1\ldots5}\,\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n-6}}$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$+ A_{2n-3}\{1-\tfrac{1}{2}\}x^{2n-3} \qquad \pm\frac{x^{2n-5}}{1\ldots(2n-5)}\Sigma\pm\frac{1}{y^4}$$

$$+ A_{2n-2}\{1-1\}x^{2n-2} \qquad \mp\frac{x^{2n-3}}{1\ldots(2n-3)}\Sigma\pm\frac{1}{y^2}$$

$$+ A_{2n-1}\{1-2\}x^{2n-1} \qquad \pm\frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}\cdot\tfrac{1}{2}$$

woraus augenblicklich:

$$A_2 = A_4 = A_6 = \ldots = A_{2n-4} = 0$$

$$A_1\left\{1-\frac{1}{2^{2n-3}}\right\} = A_1\cdot\frac{2^{2n-3}-1}{2^{2n-3}} = \Sigma\pm\frac{1}{y^{2n-2}}$$

$$A_3\left\{1-\frac{1}{2^{2n-5}}\right\} = A_3\cdot\frac{2^{2n-5}-1}{2^{2n-5}} = -\frac{1}{1.2.3}\Sigma\pm\frac{1}{y^{2n-4}}$$

$$A_5\left\{1-\frac{1}{2^{2n-7}}\right\} = A_5\cdot\frac{2^{2n-7}-1}{2^{2n-7}} = \frac{1}{1\ldots5}\Sigma\pm\frac{1}{y^{2n-6}}$$

u. s. f. u. s. f.

$$A_{2n-3}\{1-\tfrac{1}{2}\} = A_{2n-3}\cdot\frac{2-1}{2} = \pm\frac{1}{1\ldots(2n-3)}\Sigma\pm\frac{1}{y^2}$$

$$A_{2n-1}\{1-2\} = -A_{2n-1} = \pm\frac{1}{1\ldots(2n-1)}\cdot\tfrac{1}{2}.$$

Der Coefficient A_{2n-2} ist $=\frac{0}{0}$, und bedarf also einer besondern Bestimmung.

Da nun allgemein

$$1+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\frac{1}{3^{2\alpha}}+\frac{1}{4^{2\alpha}}+\frac{1}{5^{2\alpha}}+\ldots = \Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}$$

$$1-\frac{1}{2^{2\alpha}}+\frac{1}{3^{2\alpha}}-\frac{1}{4^{2\alpha}}+\frac{1}{5^{2\alpha}}-\ldots = \Sigma\pm\frac{1}{y^{2\alpha}}$$

$$\frac{1}{2^{2\alpha}} \qquad +\frac{1}{4^{2\alpha}} \qquad +\ldots = \frac{1}{2^{2\alpha}}\Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}$$

ist; so ist

$$2\left\{1+\frac{1}{3^{2\alpha}}+\frac{1}{5^{2\alpha}}+\ldots\right\} = \Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}+\Sigma\pm\frac{1}{y^{2\alpha}}$$

$$1+\frac{1}{3^{2\alpha}}+\frac{1}{5^{2\alpha}}+\ldots = \Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}-\frac{1}{2^{2\alpha}}\Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}},$$

woraus sogleich:

$$\Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}+\Sigma\pm\frac{1}{y^{2\alpha}} = 2\Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}-\frac{1}{2^{2\alpha-1}}\Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}$$

$$\Sigma\pm\frac{1}{y^{2\alpha}} = \frac{2^{2\alpha-1}-1}{2^{2\alpha-1}}\Sigma\frac{1}{y^{2\alpha}}.$$

Folglich

$$A_1 = \Sigma\frac{1}{y^{2n-2}}$$

$$A_3 = -\frac{1}{1.2.3}\Sigma\frac{1}{y^{2n-4}}$$

$$A_5 = \frac{1}{1\ldots5}\Sigma\frac{1}{y^{2n-6}}$$

. . . .

$$A_{2n-3} = \mp \frac{1}{1\ldots(2n-3)} \Sigma \frac{1}{y^2}$$

$$A_{2n-1} = \mp \frac{1}{1\ldots(2n-1)} \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Denkt man sich in dem Obigen die Potenzen von $x - \pi$ wirklich entwickelt, so erhellet augenblicklich, daß der Coefficient von x^{2n-2}, d. i. A_{2n-2},

$$= \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\ldots(2n-1)} \cdot \frac{2n-1}{1} \cdot \pi = \pm \frac{\pi}{1\ldots(2n-2)} \cdot \tfrac{1}{2}$$

ist. Daher sind nun alle Coefficienten bestimmt, und es ist:

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}}$$

$$= \frac{x}{1} \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{x^3}{1.2.3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} + \frac{x^5}{1\ldots5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-6}} - \ldots \mp \frac{x^{2n-3}}{1\ldots(2n-3)} \Sigma \frac{1}{y^2}$$
$$\pm \frac{x^{2n-2}}{1\ldots(2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \mp \frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)} \cdot \tfrac{1}{2},$$

oder

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n+1}}$$

$$= \frac{x}{1} \Sigma \frac{1}{y^{2n}} - \frac{x^3}{1.2.3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} + \frac{x^5}{1\ldots5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} - \ldots \mp \frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)} \Sigma \frac{1}{y^2}$$
$$\pm \frac{x^{2n}}{1\ldots2n} \cdot \frac{\pi}{2} \mp \frac{x^{2n+1}}{1\ldots(2n+1)} \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Daß die erste Gleichung nur für $n > 1$, die zweite nur für $n > 0$ gilt, fällt in die Augen.

34. Für $x = \pi$ ist offenbar

$$\Sigma \frac{\sin yx}{y^{2n-1}} = 0.$$

Folglich für jedes $n > 0$:

$$0 = \Sigma \frac{1}{y^{2n}} - \frac{\pi^2}{1.2.3} \Sigma \frac{1}{y^{2n-2}} + \frac{\pi^4}{1\ldots5} \Sigma \frac{1}{y^{2n-4}} - \ldots \mp \frac{\pi^{2n-2}}{1\ldots(2n-1)} \Sigma \frac{1}{y^2}$$
$$\mp \frac{n\pi^{2n}}{1\ldots(2n+1)},$$

welches eine der wichtigsten und merkwürdigsten cyklometrischen Gleichungen ist.

35. Setzt man in dieser Gleichung nach und nach $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$, und dividirt durch $\pi^2, \pi^4, \pi^6, \pi^8, \ldots\ldots$, so erhält man:

$$0 = \pi^{-2} \Sigma \frac{1}{y^2} - \frac{1}{1.2.3}$$

$$0 = \pi^{-4} \Sigma \frac{1}{y^4} - \pi^{-2} \Sigma \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{1.2.3} + \frac{2}{1\ldots5}$$

$$0 = \pi^{-6}\Sigma\frac{1}{y^6} - \pi^{-4}\Sigma\frac{1}{y^4}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \pi^{-2}\Sigma\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{1\ldots5} - \frac{3}{1\ldots7}$$

$$0 = \pi^{-8}\Sigma\frac{1}{y^8} - \pi^{-6}\Sigma\frac{1}{y^6}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \pi^{-4}\Sigma\frac{1}{y^4}\cdot\frac{1}{1\ldots5} - \pi^{-2}\Sigma\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{1\ldots7} + \frac{4}{1\ldots9}$$

u. s. f. u. s. f.

Vergleicht man diese Gleichungen mit den im Art. Bernoullische Zahlen (5.) in diesen Zusätzen bewiesenen Relationen der Bernoullischen Zahlen:

$$0 = \frac{2\overset{1}{B}}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}$$

$$0 = \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{2}{1..5}$$

$$0 = \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6} - \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{3}{1..7}$$

$$0 = \frac{2^7.\overset{7}{B}}{1..8} - \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{1..5} - \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{1}{1..7} + \frac{4}{1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

so ergiebt sich augenblicklich:

$$\pi^{-2}\Sigma\frac{1}{y^2} = \frac{2\overset{1}{B}}{1.2}, \quad \Sigma\frac{1}{y^2} = \frac{2\pi^2\overset{1}{B}}{1.2}$$

$$\pi^{-4}\Sigma\frac{1}{y^4} = \frac{2^3.\overset{3}{B}}{1..4}, \quad \Sigma\frac{1}{y^4} = \frac{2^3.\pi^4\overset{3}{B}}{1\ldots4}$$

$$\pi^{-6}\Sigma\frac{1}{y^6} = \frac{2^5.\overset{5}{B}}{1\ldots6}, \quad \Sigma\frac{1}{y^6} = \frac{2^5.\pi^6\overset{5}{B}}{1\ldots6}$$

$$\pi^{-8}\Sigma\frac{1}{y^8} = \frac{2^7.\overset{7}{B}}{1\ldots8}, \quad \Sigma\frac{1}{y^8} = \frac{2^7.\pi^8\overset{7}{B}}{1\ldots8}$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. allgemein:

$$\Sigma\frac{1}{y^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}\overset{2n-1}{B}}{1.2.3.4\ldots2n}$$

die Summenformel für die geraden reciproken Potenzen.

36. Da

$$\frac{1}{2^{2n}}\Sigma\frac{1}{y^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \ldots$$

ist; so ist nach (35.)

$$\frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots$$

$$\frac{\overset{3}{B}}{1\ldots4}\cdot\frac{\pi^4}{2} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \ldots$$

$$\frac{\overset{5}{B}}{1\ldots6}\cdot\frac{\pi^6}{2} = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \ldots$$

$$\frac{\overset{7}{B}}{1\ldots8}\cdot\frac{\pi^8}{2} = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

$$\frac{\overset{2n-1}{B}}{1\ldots2n}\cdot\frac{\pi^{2n}}{2} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \ldots$$

37. Sey

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \ldots = \Sigma\frac{1}{y^{2n}}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} + \ldots = S\,;$$

so ist

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \ldots = \Sigma\frac{1}{y^{2n}} - S = S'\,.$$

Also nach (35.) und (36.)

$$S' = \frac{(4^n - 1)\overset{2n-1}{B}}{1.2.3\ldots2n}\cdot\frac{\pi^{2n}}{2}$$

d. i.

$$\frac{(4-1)\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

$$\frac{(4^2-1)\overset{3}{B}}{1\ldots4}\cdot\frac{\pi^4}{2} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots.$$

$$\frac{(4^3-1)\overset{5}{B}}{1\ldots6}\cdot\frac{\pi^6}{2} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots.$$

$$\frac{(4^4-1)\overset{7}{B}}{1\ldots8}\cdot\frac{\pi^8}{2} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \ldots.$$

u. s. f. u. s. f.

38. In (33.) haben wir gesehen, daß

$$\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n}} = \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-1}}\,\Sigma\frac{1}{y^{2n}}$$

ist. Folglich ist nach (35.):

$$\Sigma \pm \frac{1}{y^{2n}} = \frac{(2^{2n-1} - 1)\,\pi^{2n}\,\overset{2n-1}{B}}{1.2.3.4\ldots2n}\,,$$

d. i.

$$\frac{(2-1)\pi^2 \overset{1}{B}}{1.2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

$$\frac{(2^3-1)\pi^4 \overset{3}{B}}{1\ldots4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots.$$

$$\frac{(2^5-1)\pi^6 \overset{5}{B}}{1\ldots6} = 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \ldots.$$

$$\frac{(2^7-1)\pi^8 \overset{7}{B}}{1\ldots8} = 1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \ldots.$$

u. s. f. u. s. f.

Wir werden nachher auf die Summation noch einiger Reihen dieser Art zurückkommen.

39. Entwickelt man das Product

$$Y = (1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x) \ldots.$$

durch wirkliche Multiplication seiner Factoren in eine Reihe; so wird man offenbar eine Reihe von der Form

$$Y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

erhalten. Bezeichnen wir nun hier der Kürze wegen die derivirte Function irgend einer Function y überhaupt bloß durch y'; so ist (22.)

$$Y' = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots.$$

Setzt man

$$Q = (1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x) \ldots.$$
$$= A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + D_1 x^3 + E_1 x^4 + \ldots.;$$

so findet zwischen Q, Q' und Y' folgende Relation statt:

$$Y' = (1+\alpha x)Q' + \alpha Q.$$

Da nämlich

$$Y = (1+\alpha x)Q$$

ist; so ist

$$Y - Q = \alpha Q x$$

d. i.

$$A - A_1 + (B-B_1)x + (C-C_1)x^2 + (D-D_1)x^3 + \ldots.$$
$$= \alpha A_1 x + \alpha B_1 x^2 + \alpha C_1 x^3 + \alpha D_1 x^4 + \ldots.$$

woraus

$$A - A_1 = 0,\ B - B_1 = \alpha A_1,\ C - C_1 = \alpha B_1,\ D - D_1 = \alpha C_1, \ldots$$

Aber

$$Y' - Q' = B - B_1 + 2(C-C_1)x + 3(D-D_1)x^2 + 4(E-E_1)x^3 + \ldots$$
$$= \alpha A_1 + 2\alpha B_1 x + 3\alpha C_1 x^2 + 4\alpha D_1 x^3 + \ldots$$

und

$$\alpha Q = \alpha A_1 + \alpha B_1 x + \alpha C_1 x^2 + \alpha D_1 x^3 + \ldots.$$
$$\alpha Q' x = \qquad \alpha B_1 x + 2\alpha C_1 x^2 + 3\alpha D_1 x^3 + \ldots.$$
$$Q\alpha + \alpha Q' x = \alpha A_1 + 2\alpha B_1 x + 3\alpha C_1 x^2 + 4\alpha D_1 x^3 + \ldots.$$

Folglich

$$Y' - Q' = \alpha Q + \alpha Q'x, \quad Y' = (1+\alpha x)Q' + \alpha Q\,.$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned}
(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)\ldots\ldots &= Y\\
(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)\ldots\ldots &= Q\\
(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x)\ldots\ldots &= Q_1\\
(1+\delta x)(1+\varepsilon x)(1+\zeta x)\ldots\ldots &= Q_2\\
(1+\varepsilon x)(1+\zeta x)(1+\eta x)\ldots\ldots &= Q_3\\
\text{u. s. f.} \qquad & \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

und bezeichnen immer die derivirten Functionen wie vorher; so ist

$$\begin{aligned}
Y' &= (1+\alpha x)Q' + \alpha Q\\
Q' &= (1+\beta x)Q'_1 + \beta Q_1\\
Q'_1 &= (1+\gamma x)Q'_2 + \gamma Q_2\\
Q'_2 &= (1+\delta x)Q'_3 + \delta Q_3\\
Q'_3 &= (1+\varepsilon x)Q'_4 + \varepsilon Q_4\\
\text{u. s. f.} \qquad & \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Folglich, wie hieraus durch successive Substitution augenblicklich folgt:

$$\begin{aligned}
Y' = \;& \alpha Q\\
&+ (1+\alpha x)\beta Q_1\\
&+ (1+\alpha x)(1+\beta x)\gamma Q_2\\
&+ (1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)\delta Q_3\\
&+ (1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)\varepsilon Q_4\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{Y}{1+\alpha x}\\
Q_1 &= \frac{Y}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}\\
Q_2 &= \frac{Y}{(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)}\\
Q_3 &= \frac{Y}{(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)}\\
\text{u. s. f.} \qquad & \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Folglich

$$Y' = \frac{\alpha Y}{1+\alpha x} + \frac{\beta Y}{1+\beta x} + \frac{\gamma Y}{1+\gamma x} + \frac{\delta Y}{1+\delta x} + \ldots\ldots$$

$$= Y\left\{\begin{array}{l}
\alpha - \alpha^2x + \alpha^3x^2 - \alpha^4x^3 + \alpha^5x^4 - \ldots\\
+\beta - \beta^2x + \beta^3x^2 - \beta^4x^3 + \beta^5x^4 - \ldots\\
+\gamma - \gamma^2x + \gamma^3x^2 - \gamma^4x^3 + \gamma^5x^4 - \ldots\\
+\delta - \delta^2x + \delta^3x^2 - \delta^4x^3 + \delta^5x^4 - \ldots\\
\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{array}\right.$$

$$= Y\{S\alpha - xS\alpha^2 + x^2S\alpha^3 - x^3S\alpha^4 + x^4S\alpha^5 - \ldots\}$$

d. i.

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \ldots,$$
$$= \{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\}\{S\alpha - xS\alpha^2 + x^2S\alpha^3 - x^3S\alpha^4 + \ldots\}$$

Multiplicirt man, und setzt die Coefficienten auf beiden Seiten gleich; so erhält man, weil offenbar $A = 1$ ist, folgende Gleichungen:

$$0 = B - S\alpha$$
$$0 = 2C - BS\alpha + S\alpha^2$$
$$0 = 3D - CS\alpha + BS\alpha^2 - S\alpha^3$$
$$0 = 4E - DS\alpha + CS\alpha^2 - BS\alpha^3 + S\alpha^4$$
$$0 = 5F - ES\alpha + DS\alpha^2 - CS\alpha^3 + BS\alpha^4 - S\alpha^5$$

u. s. f. u. s. f.

40. Sey nun

$$Y = \left(1 + \frac{1}{1}x\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}x\right)\ldots$$

so ist nach (39.), wenn wir

$$Y = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

setzen:

$$0 = B - \Sigma\frac{1}{y^2}$$
$$0 = 2C - B\Sigma\frac{1}{y^2} + \Sigma\frac{1}{y^4}$$
$$0 = 3D - C\Sigma\frac{1}{y^2} + B\Sigma\frac{1}{y^4} - \Sigma\frac{1}{y^6}$$
$$0 = 4E - D\Sigma\frac{1}{y^2} + C\Sigma\frac{1}{y^4} - B\Sigma\frac{1}{y^6} + \Sigma\frac{1}{y^8}$$

u. s. f. u. s. f.

oder

$$0 = \Sigma\frac{1}{y^2} - B$$
$$0 = \Sigma\frac{1}{y^4} - B\Sigma\frac{1}{y^2} + 2C$$
$$0 = \Sigma\frac{1}{y^6} - B\Sigma\frac{1}{y^4} + C\Sigma\frac{1}{y^2} - 3D$$
$$0 = \Sigma\frac{1}{y^8} - B\Sigma\frac{1}{y^6} + C\Sigma\frac{1}{y^4} - D\Sigma\frac{1}{y^2} + 4E$$

u. s. f. u. s. f.

Vergleicht man diese Gleichungen mit den aus (34.) sich ergebenden Gleichungen:

$$0 = \Sigma\frac{1}{y^2} - \frac{\pi^2}{1.2.3}$$
$$0 = \Sigma\frac{1}{y^4} - \frac{\pi^2}{1.2.3}\Sigma\frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^4}{1..5}$$

$$0 = \Sigma\frac{1}{y^6} - \frac{\pi^2}{1.2.3}\Sigma\frac{1}{y^4} + \frac{\pi^4}{1..5}\Sigma\frac{1}{y^2} - \frac{3\pi^6}{1..7}$$

$$0 = \Sigma\frac{1}{y^8} - \frac{\pi^2}{1.2.3}\Sigma\frac{1}{y^6} + \frac{\pi^4}{1..5}\Sigma\frac{1}{y^4} - \frac{\pi^6}{1..7}\Sigma\frac{1}{y^2} + \frac{4\pi^8}{1..9}$$

u. s. f. u. s. f.

so ergiebt sich augenblicklich:

$$B = \frac{\pi^2}{1.2.3},\ C = \frac{\pi^4}{1..5},\ D = \frac{\pi^6}{1..7},\ E = \frac{\pi^8}{1..9}, \ldots.$$

Also

$$Y = \left(1 + \frac{1}{1}x\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}x\right)\ldots.$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{1.2.3}x + \frac{\pi^4}{1..5}x^2 + \frac{\pi^6}{1..7}x^3 + \frac{\pi^8}{1..9}x^4 + \ldots.$$

und, wenn man $\frac{x^2}{\pi^2}$ statt x schreibt:

$$\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{2^2.\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{3^2.\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4^2.\pi\pi}\right)\ldots.$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1..5} + \frac{x^6}{1..7} + \frac{x^8}{1..9} + \ldots.$$

41. Bezeichnet, wie gewöhnlich, e die Basis der natürlichen Logarithmen; so ergiebt sich aus den bekannten Reihen sogleich:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left\{1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1..5} + \frac{x^6}{1..7} + \frac{x^8}{1..9} + \ldots\right\}.$$

Es ist also nach (40.)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{2^2.\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{3^2.\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4^2.\pi\pi}\right)\ldots.$$

$$= x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\ldots.$$

Ferner ist

$$e^x + e^{-x} = \frac{(e^{2x} - e^{-2x}):2}{(e^x - e^{-x}):2}$$

$$= \frac{2x\left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{16\pi\pi}\right)\ldots..}{x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\ldots..}$$

$$= 2\left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi}\right)\ldots..$$

Also

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi}\right)\ldots$$

42. Mittelst der in (17.) bewiesenen Formeln ergiebt sich hieraus leicht die Zerlegung von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ in Factoren. Es ist nämlich

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$= \frac{1}{i}\, i\varphi \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi\varphi}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi\varphi}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi\varphi}{16\pi\pi}\right)\ldots.$$

$$= \varphi\left(\frac{\pi\pi - \varphi\varphi}{\pi\pi}\right)\left(\frac{4\pi\pi - \varphi\varphi}{4\pi\pi}\right)\left(\frac{9\pi\pi - \varphi\varphi}{9\pi\pi}\right)\left(\frac{16\pi\pi - \varphi\varphi}{16\pi\pi}\right)\ldots.$$

$$= \varphi\left(\frac{\pi - \varphi}{\pi}\right)\left(\frac{\pi + \varphi}{\pi}\right)\left(\frac{2\pi - \varphi}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi + \varphi}{2\pi}\right)\left(\frac{3\pi - \varphi}{3\pi}\right)\left(\frac{3\pi + \varphi}{3\pi}\right)\ldots.$$

$$= \varphi\left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{3\pi}\right)\ldots.$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$= \left(1 - \frac{4\varphi\varphi}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4\varphi\varphi}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4\varphi\varphi}{25\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4\varphi\varphi}{49\pi\pi}\right)\ldots.$$

$$= \left(\frac{\pi\pi - 4\varphi\varphi}{\pi\pi}\right)\left(\frac{9\pi\pi - 4\varphi\varphi}{9\pi\pi}\right)\left(\frac{25\pi\pi - 4\varphi\varphi}{25\pi\pi}\right)\left(\frac{49\pi\pi - 4\varphi\varphi}{49\pi\pi}\right)\ldots.$$

$$= \left(\frac{\pi - 2\varphi}{\pi}\right)\left(\frac{\pi + 2\varphi}{\pi}\right)\left(\frac{3\pi - 2\varphi}{3\pi}\right)\left(\frac{3\pi + 2\varphi}{3\pi}\right)\left(\frac{5\pi - 2\varphi}{5\pi}\right)\left(\frac{5\pi + 2\varphi}{5\pi}\right)\ldots$$

$$= \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2\varphi}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2\varphi}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2\varphi}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2\varphi}{5\pi}\right)\ldots.$$

Setzt man $\varphi = \frac{m\pi}{2n}$; so erhält man:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\left(\frac{2n - m}{2n}\right)\left(\frac{2n + m}{2n}\right)\left(\frac{4n - m}{4n}\right)\left(\frac{4n + m}{4n}\right)\left(\frac{6n - m}{6n}\right)\ldots.$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n - m}{n}\right)\left(\frac{n + m}{n}\right)\left(\frac{3n - m}{3n}\right)\left(\frac{3n + m}{3n}\right)\left(\frac{5n - m}{5n}\right)\ldots.$$

und hieraus, wenn man $n - m$ für m setzt:

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{(n - m)\pi}{2n}\left(\frac{n + m}{2n}\right)\left(\frac{3n - m}{2n}\right)\left(\frac{3n + m}{4n}\right)\left(\frac{5n - m}{4n}\right)\ldots.$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n - m}{n}\right)\left(\frac{2n + m}{3n}\right)\left(\frac{4n - m}{3n}\right)\left(\frac{4n + m}{5n}\right)\left(\frac{6n - m}{5n}\right)\ldots.$$

Aus der ersten dieser vier Formeln ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\left(\frac{2n}{2n - m}\right)\left(\frac{2n}{2n + m}\right)\left(\frac{4n}{4n - m}\right)\left(\frac{4n}{4n + m}\right)\ldots.$$

woraus für $m = n = 1$:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{10}{9}\cdot\tfrac{10}{11}\ldots.$$

welches der von Wallis gefundene Ausdruck für den vierten Theil der Peripherie ist.

Ferner ergiebt sich aus den obigen Formeln leicht:

$$\text{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdots$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\cdots$$

Aehnliche Ausdrücke würden sich auch für die Sekante und Cosekante leicht aus dem Obigen ableiten lassen.

Setzt man x für m; so ergiebt sich leicht:

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{x\pi}{2n}}=\frac{m}{x}\left(\frac{2n-m}{2n-x}\right)\left(\frac{2n+m}{2n+x}\right)\left(\frac{4n-m}{4n-x}\right)\left(\frac{4n+m}{4n+x}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{x\pi}{2n}}=\frac{m}{n-x}\left(\frac{2n-m}{n+x}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-x}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+x}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-x}\right)\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{x\pi}{2n}}=\left(\frac{n-m}{n-x}\right)\left(\frac{n+m}{n+x}\right)\left(\frac{3n-m}{3n-x}\right)\left(\frac{3n+m}{3n+x}\right)\left(\frac{5n-m}{5n-x}\right)\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{x\pi}{2n}}=\left(\frac{n-m}{x}\right)\left(\frac{n+m}{2n-x}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+x}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-x}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+x}\right)\cdots$$

43. Nach (42.) ist

$$\text{lognat}\frac{\sin x}{x}=\text{logn}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\text{logn}\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)+\text{logn}\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)$$

$$+\text{logn}\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)+\cdots$$

$$=-\frac{x^2}{\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^8}{\pi^8}-\cdots$$

$$-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{2^4\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{2^6\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^8}{2^8\pi^8}-\cdots$$

$$-\frac{x^2}{3^2\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3^4\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{3^6\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^8}{3^8\pi^8}-\cdots$$

$$-\frac{x^2}{4^2\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4^4\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{4^6\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^8}{4^8\pi^8}-\cdots$$

$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= -\frac{x^2}{\pi^2}\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\pi^4}\left\{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{\pi^6}\left\{1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^8}{\pi^8}\left\{1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots\right\}$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus nach (35.)

$$\operatorname{logn}\frac{\sin x}{x} = -\frac{2\overset{1}{B}}{1.2}x^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2^3\overset{3}{B}}{1\ldots4}x^4$$
$$-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{2^5\overset{5}{B}}{1\ldots6}x^6$$
$$-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{2^7\overset{7}{B}}{1\ldots8}x^8$$
$$-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{2^9\overset{9}{B}}{1\ldots10}x^{10}$$
$$-\ \ldots\ldots$$

Auf ähnliche Art ist:

$$\operatorname{lognat}\cos x = \operatorname{logn}\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)+\operatorname{logn}\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)+\operatorname{logn}\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)$$
$$+\operatorname{logn}\left(1-\frac{4x^2}{7^2\pi^2}\right)+\ldots$$
$$= -\frac{4x^2}{\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^4}{\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{4^3x^6}{\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{4^4x^8}{\pi^8}-\ldots$$
$$-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^4}{3^4\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{4^3x^6}{3^6\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{4^4x^8}{3^8\pi^8}-\ldots$$
$$-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^4}{5^4\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{4^3x^6}{5^6\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{4^4x^8}{5^8\pi^8}-\ldots$$
$$-\frac{4x^2}{7^2\pi^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^4}{7^4\pi^4}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{4^3x^6}{7^6\pi^6}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{4^4x^8}{7^8\pi^8}-\ldots$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= -\frac{4x^2}{\pi^2}\left\{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^4}{\pi^4}\left\{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{4^3x^6}{\pi^6}\left\{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{4^4x^8}{\pi^8}\left\{1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\ldots\right\}$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. i. nach (37.)

$$\log n \cos x = -\frac{4(4-1)\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{x^2}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4^2(4^2-1)\overset{3}{B}}{1\ldots4}\cdot\frac{x^4}{2}$$
$$- \tfrac{1}{3}\cdot\frac{4^3(4^3-1)\overset{5}{B}}{1\ldots6}\cdot\frac{x^6}{2}$$
$$- \tfrac{1}{4}\cdot\frac{4^4(4^4-1)\overset{7}{B}}{1\ldots8}\cdot\frac{x^8}{2}$$
$$- \tfrac{1}{5}\cdot\frac{4^5(4^5-1)\overset{9}{B}}{1\ldots10}\cdot\frac{x^{10}}{2}$$
$$- \ldots\ldots\ldots$$

Weitere Anwendungen auf die Berechnung der Logarithmen s. Thl. I. S. 635. ff.

44. Setzt man in (42.) $\varphi = \pi x$; so wird

$$\sin \pi x = \pi x\left(\frac{1-x}{1}\right)\left(\frac{1+x}{1}\right)\left(\frac{2-x}{2}\right)\left(\frac{2+x}{2}\right)\left(\frac{3-x}{3}\right)\left(\frac{3+x}{3}\right)\ldots$$

$$\cos \pi x = \left(\frac{1-2x}{1}\right)\left(\frac{1+2x}{1}\right)\left(\frac{3-2x}{3}\right)\left(\frac{3+2x}{3}\right)\left(\frac{5-2x}{5}\right)\ldots$$

$$\log n \sin \pi x = \log n\, \pi x + \log n\left(\frac{1-x}{1}\right) + \log n\left(\frac{1+x}{1}\right)$$
$$+ \log n\left(\frac{2-x}{2}\right) + \log n\left(\frac{2+x}{2}\right) + \log n\left(\frac{3-x}{3}\right) + \ldots$$

$$\log n \cos \pi x = \log n\left(\frac{1-2x}{1}\right) + \log n\left(\frac{1+2x}{1}\right) + \log n\left(\frac{3-2x}{3}\right)$$
$$+ \log n\left(\frac{3+2x}{3}\right) + \log n\left(\frac{5-2x}{5}\right) + \ldots.$$

woraus, wenn man differentiirt:

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \ldots.$$
$$\frac{\pi \sin \pi x}{2\cos \pi x} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3-2x} - \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5-2x} - \ldots.$$

und, wenn man in letzterer Reihe $\frac{1}{2}x$ für x setzt:

$$\frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{\cos \frac{1}{2}\pi x} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \ldots.$$

Addirt man dies zu der Reihe für $\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x}$; so wird

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \ldots.$$
$$= \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} + \frac{\pi \sqrt{1-\cos \pi x}}{\sqrt{1+\cos \pi x}} = \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} + \frac{\pi(1-\cos \pi x)}{\sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Folglich, wenn man $\frac{x}{\pi}$ für x setzt:

$$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x} - \ldots.$$

oder, $\frac{1}{2}\pi - x$ für x gesetzt:

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x =$$

$$= \frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} - \frac{2}{3\pi - 2x} - \frac{2}{3\pi + 2x} + \frac{2}{5\pi - 2x} + \ldots.$$

$$= \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{4.3\pi}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{4.5\pi}{25\pi^2 - 4x^2} - \frac{4.7\pi}{49\pi^2 - 4x^2} + \ldots.$$

$$= \frac{2^2}{\pi}\left\{1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots.\right\}$$

$$+ \frac{2^4x^2}{\pi^3}\left\{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots.\right\}$$

$$+ \frac{2^6x^4}{\pi^5}\left\{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots.\right\}$$

$$+ \frac{2^8x^6}{\pi^7}\left\{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \ldots.\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nach (15.) aber

$$\sec x = B + \frac{\overset{2}{B}}{1.2}x^2 + \frac{\overset{4}{B}}{1..4}x^4 + \frac{\overset{6}{B}}{1...6}x^6 + \ldots.,$$

wo wegen der Coefficienten dieser Reihe der Art. Bernoullische Zahlen (10.) in diesen Zusätzen zu vergleichen ist. Also

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots. = \frac{\pi B}{2^2}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots. = \frac{\pi^3 \overset{2}{B}}{1.2.2^4}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots. = \frac{\pi^5 \overset{4}{B}}{1..4.2^6}$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \ldots. = \frac{\pi^7 \overset{6}{B}}{1...6.2^8}$$

u. s. f. u. s. f.

so daß sich also diese Reihen mittelst der Sekanten-Coefficienten summiren lassen.

45. M. s. über die hier bewiesenen Formeln meine Mathematischen Abhandlungen. Erste Samml. Altona, 1822. S. 28 — 64., wo die hier mitgetheilten Beweise zuerst gegeben

worden sind. Außerdem vergleiche man eine Abhandlung von L'Huilier in den Mém. de Berlin. 1788. 1789. p. 326.: Sur la décomposition en facteurs de la somme et de la différence de deux puissances à exposans quelconques de la base des logarithmes hyperboliques; dans le but de dégager cette décomposition de toute idée de l'infini. Auch L'Huilier Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tub. 1795. Cap. VIII. p. 119. Lacroix Traité du calcul diff. et du calcul int. T. III. Ed. 2. Paris. 1819. p. 439. Bartels Disquisitiones quatuor ad Theoriam functionum analyticarum pertinentes. Dorpati. 1822. 4. (Disquisitio prima). Cauchy Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. I[re] Partie. Paris. 1821. p. 561. Alle diese Schriftsteller bedienen sich bei ihren Beweisen der Methode der Gränzen, und die Beweise stimmen mehr oder weniger mit einander überein. Die Zerfällung von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ hat Johann Bernoulli gefunden (Opp. T. IV. Nr. 152.). M. s. auch eine Abhandlung von Euler de summis serierum reciprocarum. Comm. Petrop. T. VI. 1734—35. p. 124. Introd. in Anal. inf. T. I. Cap. IX. §. 155. Cap. XI. Kästners Anal. des Unendl. 3 Afl. S. 364. Klügels analyt. Trig. S. 130.

46. Nach (13.) ist,

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \frac{(2^2-1)\overset{1}{B}x}{1.2} + \frac{(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{1\ldots4} + \frac{(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{1\ldots6} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}x = \frac{(2^2-1)\overset{1}{B}x}{2^2.1.2} + \frac{(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{2^4.1\ldots4} + \frac{(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{2^6.1\ldots6} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}x = \frac{(2^2-1)\overset{1}{B}x}{2^4.1.2} + \frac{(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{2^8.1\ldots4} + \frac{(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{2^{12}.1\ldots6} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{16}\operatorname{tang}\tfrac{1}{16}x = \frac{(2^2-1)\overset{1}{B}x}{2^6.1.2} + \frac{(2^4-1)\overset{3}{B}x^3}{2^{12}.1\ldots4} + \frac{(2^6-1)\overset{5}{B}x^5}{2^{18}.1\ldots6} + \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich, wenn man addirt:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}\operatorname{tang}\tfrac{1}{16}x + \ldots$$
$$= \frac{2^2\overset{1}{B}x}{1.2} + \frac{2^4\overset{3}{B}x^3}{1\ldots4} + \frac{2^6\overset{5}{B}x^5}{1\ldots6} + \frac{2^8\overset{7}{B}x^7}{1\ldots8} + \ldots$$

d. i. nach (12.)

$$\cot x = \frac{1}{x} - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}x - \ldots$$

und folglich, wenn man mit ∂x auf beiden Seiten multiplicirt:

$$\frac{\cos x\,\partial x}{\sin x} = \frac{\partial x}{x} - \frac{\sin\frac{1}{2}x\,\partial x}{2\cos\frac{1}{2}x} - \frac{\sin\frac{1}{4}x\,\partial x}{4\cos\frac{1}{4}x} - \frac{\sin\frac{1}{8}x\,\partial x}{8\cos\frac{1}{8}x} - \ldots$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \cfrac{ix}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

d. i. nach (17.)

$$i \tang x = \cfrac{ix}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

$$\tang x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

Der hier mitgetheilte schöne Beweis dieses merkwürdigen Ausdrucks ist von Legendre gegeben in den Eléments de Géométrie. Paris. 1817. p. 288. M. vergl. auch Thl. IV. S. 98. ff.

48. Ferner setze man

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+2n} - \frac{1}{x+3n} - \frac{1}{x+4n} - \ldots$$

$$f(x+n) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x+3n} - \frac{1}{x+4n} + \ldots$$

$$f(x) + f(x+n) = \frac{1}{x},\quad xf(x) + xf(x+n) = 1;$$

$$1 - xf(x) - xf(x+n) = 0$$

$$1 - xf(x) - xf(x+n) + x^2 f(x).f(x+n) = x^2 f(x).f(x+n)$$

$$1 - xf(x) - \{1 - xf(x)\}.xf(x+n) = x^2 f(x).f(x+n)$$

$$\{1 - xf(x)\}\{1 - xf(x+n)\} = x^2 f(x).f(x+n)$$

$$1 - xf(x) = \frac{x^2 f(x).f(x+n)}{1 - xf(x+n)}$$

$$\frac{1}{f(x)} - x = \frac{x^2 f(x+n)}{1 - xf(x+n)}$$

$$= \frac{x^2}{\frac{1}{f(x+n)} - x} = \frac{x^2}{n + \frac{1}{f(x+n)} - (x+n)}$$

d. i., wenn wir

$$\frac{1}{f(x)} - x = f'(x)$$

setzen:

$$f'(x) = \frac{x^2}{n + f'(x+n)}$$

$$f'(x+n) = \frac{(x+n)^2}{n + f'(x+2n)}$$

$$f'(x+2n) = \frac{(x+2n)^2}{n + f'(x+3n)}$$

$$f'(x+3n) = \frac{(x+3n)^2}{n + f'(x+4n)}$$

u. s. f. u. s. f.

woraus augenblicklich:

$$f(x) = \frac{x^2}{n} + \frac{(x+n)^2}{n} + \frac{(x+2n)^2}{n} + \frac{(x+3n)^2}{n} + \ldots\ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{x + f(x)} = \frac{1^1}{x} + \frac{x^2}{n} + \frac{(x+n)^2}{n} + \frac{(x+2n)^2}{n} + \frac{(x+3n)^2}{n} + \ldots$$

Für $n = 2$ und $x = 1$ wird

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots = \tfrac{1}{4}\pi \quad (30.)$$

Also

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \frac{81}{2} + \ldots\ldots$$

ein von Lord Brounker zuerst gefundener Ausdruck. Den obigen Beweis desselben habe ich zuerst in den angeführten Mathematischen Abhandlungen (Altona. 1822.) S. 134. 135. gegeben.

Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben wie der Sinus und Cosinus, von L. Olivier in Crelles Journal d. r. u. a. M. B. II. S. 243.

Cyklotechnie. Constructionen, durch welche eine dem ganzen Umfange oder auch einem Theile desselben sehr nahe gleich kommende gerade Linie gefunden werden kann s. m. im Art. Quadratur (55^b.). Den größten Theil der in gegenwärtigem Artikel gegebenen Formeln zur annähernden Berechnung des Kreises, die sich auf die Zerlegung eines Bogens, dessen Verhältniß zur ganzen Peripherie rational ist, in andere Bogen, deren trigonometrische Tangenten rational sind, gründen, habe ich in der Abhandlung: Ueber einige Formeln zur leichten Berechnung des Kreises (Mathematische Abhandlungen. Altona. 1822.) aus einem sehr allgemeinen, ursprünglich von J. F. Pfaff gefundenen Satze abgeleitet.

Zur Geschichte der Cyklometrie und Cyklotechnie gehört vorzüglich auch Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, wovon kürzlich eine neue Ausgabe erschienen ist.

Cylinder. Wir wollen in diesem Artikel, als Ergänzung zu dem gleichnamigen Artikel im ersten Theile, die Oberfläche eines schiefen Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche durch eine unendliche Reihe auszudrücken suchen, indem wir bei der Ent-

wickelung dieser Reihe so verfahren, daß wir die Anwendung der allgemeinen Principien des höhern Calculs vermeiden, welches deshalb als zweckmäßig erscheint, weil der schiefe Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche ein der elementaren Geometrie angehörender Körper ist.

1. In Fig. 18. sey CC' die Axe eines beliebigen schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis, und $C'C_1$ sey die Höhe desselben, so daß also die durch die Axe und Höhe gelegte Ebene $ABA'B'$ auf den parallelen Grundflächen des Cylinders senkrecht ist. Ferner sei $ACE = \alpha$ ein beliebiger Winkel und durch E an den Umfang der untern Grundfläche die Berührende ET gezogen, welche den verlängerten, durch C_1 gehenden, Diameter AB in T schneide. Zieht man nun durch C_1 in der Ebene der untern Grundfläche eine dem Radius CE parallele Linie C_1E_1, und legt durch $C'C_1$ und C_1E_1 eine Ebene, welche die obere Grundfläche in $C'E'$ schneidet, so sind die Linien $C'E'$ und C_1E_1, als Durchschnitte paralleler Ebenen mit einer dritten Ebene, einander parallel. Aber auch CE und C_1E_1 sind nach der Construction einander parallel. Folglich sind auch CE und $C'E'$ einander parallel, und das Viereck $CEC'E'$ ist also, weil CE und $C'E'$ auch einander gleich sind, ein Parallelogramm, so daß folglich EE' nach der bekannten Definition des Cylinders in dessen Oberfläche liegt. Auch ist aus dem Vorhergehenden klar, daß die Winkel ACE, $A'C'E'$ einander gleich sind, und daß folglich, wenn man durch E' in der Ebene der obern Grundfläche an deren Umfang eine Berührende zöge, dieselbe der durch E an den Umfang der untern Grundfläche gezogenen Berührenden offenbar parallel seyn würde. Endlich läßt sich auch noch zeigen, daß, wenn man $E'E_1$ zieht, diese Linie auf den beiden durch E und E' gezogenen einander parallelen Berührenden senkrecht ist, und daher deren Entfernung von einander bestimmt. Zieht man nämlich noch $C'E_1$, so ist, weil $C'C_1$ auf der Ebene der untern Grundfläche, und der Radius CE, also auch die ihm parallele C_1E_1, auf der Berührenden ET senkrecht ist, nach Elem. XI. 11. auch $C'E_1$ auf ET senkrecht, und ET ist folglich auf den beiden Linien $C'E_1$, C_1E_1 in der Ebene $C'E'C_1E_1$, also auf dieser Ebene selbst, folglich auch auf $E'E_1$ senkrecht, wie behauptet wurde.

Setzen wir nun die Linie CC_1, welche man füglich die Excentricität des schiefen Cylinders nennen könnte, $= e$, die Höhe $C'C_1 = h$, den Radius der beiden Grundflächen $= \varrho$; so ist

$$CT : ET = CC_1 : EE_1,$$

d. i.

$$\varrho \sec\alpha : \varrho \tang\alpha = e : EE_1;$$

also

$$EE_1 = e\frac{\tang\alpha}{\sec\alpha} = e\tang\alpha\cos\alpha = e\sin\alpha,$$

wie auch leicht erhellet, wenn man sich durch C_1 eine Parallele mit E_1E gezogen denkt. Aber

$$E'E_1^2 = EE'^2 - EE_1^2 = CC'^2 - EE_1^2 = C'C_1^2 + CC_1^2 - EE_1^2,$$

d. i.

$$E'E_1^2 = h^2 + e^2 - e^2 \sin\alpha^2 = h^2 + e^2 \cos\alpha^2,$$

oder auch, wenn man der Kürze wegen $h^2 + e^2 = a^2$ setzt:

$$E'E_1^2 = a^2 - e^2 \sin\alpha^2, \quad E'E_1 = \sqrt{a^2 - e^2 \sin\alpha^2}.$$

2. Man rechne jetzt alle Stücke der Cylinderfläche, welche, wie das Stück $AA'EE'$, von zwei parallelen geraden Linien, wie AA' und EE', begränzt werden, von der Linie AA' an, und setze das dem Winkel $ACE = \alpha$ entsprechende Stück $AA'EE' = S$. Den Winkel α oder den entsprechenden Bogen AE denke man sich in $2n$ gleiche Theile getheilt, deren jeder $= \varphi$ sey, und ziehe durch die Endpunkte der Bogen

$$\varphi,\ 3\varphi,\ 5\varphi,\ 7\varphi,\ \ldots\ (2n-1)\varphi$$

Berührende, so ist klar, daß man, wenn in der obern Grundfläche des Cylinders eine ganz ähnliche Construction gemacht wird, um das Stück S der Cylinderfläche eine Reihe von Parallelogrammen beschreiben kann, die alle gleiche Grundlinien haben, und zusammen ein Stück einer um die Cylinderfläche beschriebenen prismatischen Fläche bilden. Die Anzahl dieser Parallelogramme ist offenbar $= n$. Bezeichnet man ferner der Kürze wegen die Sinus der Winkel oder Bogen $\varphi, 3\varphi, 5\varphi, 7\varphi, \ldots (2n-1)\varphi$ respective bloß durch $s_1, s_3, s_5, s_7, \ldots s_{2n-1}$; so sind nach (1.) die Höhen der in Rede stehenden Parallelogramme nach der Reihe:

$$\sqrt{a^2 - e^2 s_1^2},\ \sqrt{a^2 - e^2 s_3^2},\ \sqrt{a^2 - e^2 s_5^2},\ \ldots\ \sqrt{a^2 - e^2 s^2_{2n-1}}.$$

Die gemeinschaftliche Grundlinie aller Parallelogramme sey x, der Flächenraum der ganzen um das Cylinderstück S beschriebenen prismatischen Fläche $= X$; so ist

$$X = x\{\sqrt{a^2 - e^2 s_1^2} + \sqrt{a^2 - e^2 s_3^2} + \sqrt{a^2 - e^2 s_5^2} + \ldots + \sqrt{a^2 - e^2 s^2_{2n-1}}\}.$$

Setzen wir also überhaupt

$$\sqrt{a^2 - e^2 z^2} = A + \overset{1}{A}z^2 + \overset{2}{A}z^4 + \overset{3}{A}z^6 + \overset{4}{A}z^8 + \ldots;$$

so wird

$$\begin{aligned}\frac{X}{x} = nA &+ \overset{1}{A}\{s_1^2 + s_3^2 + s_5^2 + s_7^2 + \ldots + s^2_{2n-1}\}\\ &+ \overset{2}{A}\{s_1^4 + s_3^4 + s_5^4 + s_7^4 + \ldots + s^4_{2n-1}\}\\ &+ \overset{3}{A}\{s_1^6 + s_3^6 + s_5^6 + s_7^6 + \ldots + s^6_{2n-1}\}\\ &+ \overset{4}{A}\{s_1^8 + s_3^8 + s_5^8 + s_7^8 + \ldots + s^8_{2n-1}\}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder der Kürze wegen

$$\frac{X}{x} = nA + \overset{1}{A}\Sigma s^2{}_{2n-1} + \overset{2}{A}\Sigma s^4{}_{2n-1} + \overset{3}{A}\Sigma s^6{}_{2n-1} + \overset{4}{A}\Sigma s^8{}_{2n-1} + \ldots\ldots$$

d. i. nach der vorher eingeführten Bezeichnung:

$$\frac{X}{x} = nA + \overset{1}{A}\Sigma\{\sin(2n-1)\varphi\}^2 + \overset{2}{A}\Sigma\{\sin(2n-1)\varphi\}^4$$
$$+ \overset{3}{A}\Sigma\{\sin(2n-1)\varphi\}^6$$
$$+ \overset{4}{A}\Sigma\{\sin(2n-1)\varphi\}^8$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Bezeichnen wir nun, wie im Artikel Binomischer Lehrsatz i. d. Z., den nten Binomial-Coefficienten der $\varkappa$ten Potenz durch ${}^{\varkappa}\overset{n}{B}$; so ist nach dem Artikel Goniometrie. VII.:

$$2^{2\varkappa-1}(-1)^{\varkappa}(\sin\varphi)^{2\varkappa} = \cos 2\varkappa\varphi - {}^{2\varkappa}\overset{1}{B}\cos(2\varkappa-2)\varphi + {}^{2\varkappa}\overset{2}{B}\cos(2\varkappa-4)\varphi - \ldots$$
$$\ldots + {}^{2\varkappa}\overset{\varkappa-1}{B}(-1)^{\varkappa-1}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}\,{}^{2\varkappa}\overset{\varkappa}{B}(-1)^{\varkappa}$$

$$2^{2\varkappa-1}(-1)^{\varkappa}(\sin 3\varphi)^{2\varkappa} = \cos(3.2\varkappa\varphi) - {}^{2\varkappa}\overset{1}{B}\cos 3(2\varkappa-2)\varphi + {}^{2\varkappa}\overset{2}{B}\cos 3(2\varkappa-4)\varphi - \ldots$$
$$\ldots + {}^{2\varkappa}\overset{\varkappa-1}{B}(-1)^{\varkappa-1}\cos(3.2\varphi) + \tfrac{1}{2}\,{}^{2\varkappa}\overset{\varkappa}{B}(-1)^{\varkappa}$$

$$2^{2\varkappa-1}(-1)^{\varkappa}(\sin 5\varphi)^{2\varkappa} = \cos(5.2\varkappa\varphi) - {}^{2\varkappa}\overset{1}{B}\cos 5(2\varkappa-2)\varphi + {}^{2\varkappa}\overset{2}{B}\cos 5(2\varkappa-4)\varphi - \ldots$$
$$\ldots + {}^{2\varkappa}\overset{\varkappa-1}{B}(-1)^{\varkappa-1}\cos(5.2\varphi) + \tfrac{1}{2}\,{}^{2\varkappa}\overset{\varkappa}{B}(-1)^{\varkappa}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^{2\varkappa-1}(-1)^{\varkappa}(\sin(2n-1)\varphi)^{2\varkappa} = \cos(2n-1)2\varkappa\varphi - {}^{2\varkappa}\overset{1}{B}\cos(2n-1)(2\varkappa-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + {}^{2\varkappa}\overset{\varkappa-1}{B}(-1)^{\varkappa-1}\cos(2n-1)2\varphi + \tfrac{1}{2}\,{}^{2\varkappa}\overset{\varkappa}{B}(-1)^{\varkappa}$$

Also

$$2^{2\varkappa-1}(-1)^{\varkappa}\Sigma(\sin(2n-1)\varphi)^{2\varkappa} = \Sigma\cos(2n-1)2\varkappa\varphi$$
$$- {}^{2\varkappa}\overset{1}{B}\Sigma\cos(2n-1)(2\varkappa-2)\varphi$$
$$+ {}^{2\varkappa}\overset{2}{B}\Sigma\cos(2n-1)(2\varkappa-4)\varphi$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ {}^{2\varkappa}\overset{\varkappa-1}{B}(-1)^{\varkappa-1}\Sigma\cos(2n-1)2\varphi$$
$$+ \frac{n}{2}\,{}^{2\varkappa}\overset{\varkappa}{B}(-1)^{\varkappa},$$

indem nämlich die Summen in Bezug auf n genommen werden.

Unter der Voraussetzung, daß $2n\varphi$, wie groß man auch n annehmen mag, doch stets den constanten Werth α hat, wollen wir jetzt die Summe $\Sigma\cos(2n-1)\varphi$ etwas näher betrachten. Nach der bekannten cyklometrischen Reihe, durch welche $\cos x$ nach den Potenzen von x entwickelt wird, ist:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1..4} - \frac{\varphi^6}{1..6} + \frac{\varphi^8}{1..8} - \ldots,$$

$$\cos 3\varphi = 1 - \frac{(3\varphi)^2}{1.2} + \frac{(3\varphi)^4}{1..4} - \frac{(3\varphi)^6}{1..6} + \frac{(3\varphi)^8}{1..8} - \ldots,$$

$$\cos 5\varphi = 1 - \frac{(5\varphi)^2}{1.2} + \frac{(5\varphi)^4}{1..4} - \frac{(5\varphi)^6}{1..6} + \frac{(5\varphi)^8}{1..8} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos(2n-1)\varphi = 1 - \frac{((2n-1)\varphi)^2}{1.2} + \frac{((2n-1)\varphi)^4}{1..4} - \frac{((2n-1)\varphi)^6}{1..6} + \frac{((2n-1)\varphi)^8}{1..8} - \ldots\ldots;$$

also

$$\begin{aligned}\Sigma\cos(2n-1)\varphi = n &- \frac{\varphi^2}{1.2}\left\{1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2\right\}\\ &+ \frac{\varphi^4}{1..4}\left\{1^4+3^4+5^4+7^4+\ldots+(2n-1)^4\right\}\\ &- \frac{\varphi^6}{1..6}\left\{1^6+3^6+5^6+7^6+\ldots+(2n-1)^6\right\}\\ &+ \frac{\varphi^8}{1..8}\left\{1^8+3^8+5^8+7^8+\ldots+(2n-1)^8\right\}\\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\Sigma\cos(2n-1)\varphi = n &- \frac{\varphi^2}{1.2}\Sigma(2n-1)^2 + \frac{\varphi^4}{1..4}\Sigma(2n-1)^4\\ &- \frac{\varphi^6}{1..6}\Sigma(2n-1)^6 + \frac{\varphi^8}{1..8}\Sigma(2n-1)^8 - \ldots\end{aligned}$$

Nach dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist nun bekanntlich, wenn wir jetzt der Kürze wegen die Binomial-Coefficienten bloß durch A, B, C, D, ... bezeichnen:

$$(n+1)^{x+1} - n^{x+1} = An^x + Bn^{x-1} + Cn^{x-2} + \ldots + Pn + Q;$$

folglich

$$\begin{aligned}2^{x+1} - 1^{x+1} &= A.1^x + B.1^{x-1} + C.1^{x-2} + \ldots + P.1 + Q\\ 3^{x+1} - 2^{x+1} &= A.2^x + B.2^{x-1} + C.2^{x-2} + \ldots + P.2 + Q\\ 4^{x+1} - 3^{x+1} &= A.3^x + B.3^{x-1} + C.3^{x-2} + \ldots + P.3 + Q\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (n+1)^{x+1} - n^{x+1} &= A.n^x + B.n^{x-1} + C.n^{x-2} + \ldots + P.n + Q\end{aligned}$$

also

$$(n+1)^{x+1} - 1 = A\Sigma n^x + B\Sigma n^{x-1} + \ldots + P\Sigma n + Qn,$$

oder, weil nach dem Binomischen Lehrsatze bekanntlich $A = x+1$ ist:

$$(x+1)\Sigma n^x = (n+1)^{x+1} - 1 - B\Sigma n^{x-1} - \ldots - P\Sigma n - Qn.$$

Mittelst dieser allgemeinen Relation, verbunden mit der aus den ersten Elementen der allgemeinen Arithmetik bekannten Summe

$$\Sigma n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n,$$

findet man nach und nach für Σn^x überhaupt einen Ausdruck von folgender Form:

$$\Sigma n^x = \frac{1}{x+1} n^{x+1} + \overset{x}{c}_1 n^x + \overset{x}{c}_2 n^{x-1} + \overset{x}{c}_3 n^{x-2} + \ldots + \overset{x}{c}_{x-1} n^2 + \overset{x}{c}_x n ,$$

wo es auf die besondern Werthe der durch

$$\overset{x}{c}_1 , \overset{x}{c}_2 , \overset{x}{c}_3 , \overset{x}{c}_4 , \ldots \overset{x}{c}_{x-1} , \overset{x}{c}_x$$

bezeichneten Coefficienten jetzt weiter nicht ankommt. Bloß die Form obiger Summe und ihr erstes Glied ist für das Folgende von Wichtigkeit.

Setzen wir

$$S = 1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + \ldots + (2n)^x ;$$

so ist

$$S = \begin{cases} 1^x + 3^x + 5^x + 7^x + \ldots + (2n-1)^x \\ + 2^x + 4^x + 6^x + 8^x + \ldots + (2n)^x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1^x + 3^x + 5^x + 7^x + \ldots + (2n-1)^x \\ + 2^x (1^x + 2^x + 3^x + 4^x + \ldots + n^x) \end{cases}$$

d. i.

$$S = \Sigma(2n-1)^x + 2^x \Sigma n^x ;$$

also

$$\Sigma(2n-1)^x = S - 2^x \Sigma n^x .$$

Denkt man sich nun für S und Σn^x die vorher ihrer Form nach bestimmten Ausdrücke gesetzt, so erhält man für $\Sigma(2n-1)^x$ leicht einen Ausdruck von folgender Form:

$$\Sigma(2n-1)^x = \frac{2^{x+1} - 2^x}{x+1} n^{x+1} + \overset{x}{C}_1 n^x + \overset{x}{C}_2 n^{x-1} + \ldots + \overset{x}{C}_{x-1} n^2 + \overset{x}{C}_x n ,$$

oder

$$\Sigma(2n-1)^x = \frac{2^x}{x+1} n^{x+1} + \overset{x}{C}_1 n^x + \overset{x}{C}_2 n^{x-1} + \ldots + \overset{x}{C}_{x-1} n^2 + \overset{x}{C}_x n ,$$

wo es wieder auf die besondern Werthe der durch

$$\overset{x}{C}_1 , \overset{x}{C}_2 , \overset{x}{C}_3 , \overset{x}{C}_4 , \ldots \overset{x}{C}_{x-1} , \overset{x}{C}_x .$$

bezeichneten Coefficienten jetzt weiter nicht ankommt.

Kehren wir nun wieder zu dem Obigen zurück, so wird:

$$\begin{aligned} \Sigma \cos(2n-1)\varphi = {} & n \\ & - \frac{\varphi^2}{1.2} \left\{ \frac{2^2}{3} n^3 + \overset{2}{C}_1 n^2 + \overset{2}{C}_2 n \right\} \\ & + \frac{\varphi^4}{1..4} \left\{ \frac{2^4}{5} n^5 + \overset{4}{C}_1 n^4 + \overset{4}{C}_2 n^3 + \overset{4}{C}_3 n^2 + \overset{4}{C}_4 n \right\} \\ & - \frac{\varphi^6}{1..6} \left\{ \frac{2^6}{7} n^7 + \overset{6}{C}_1 n^6 + \overset{6}{C}_2 n^5 + \overset{6}{C}_3 n^4 + \overset{6}{C}_4 n^3 + \overset{6}{C}_5 n^2 + \overset{6}{C}_6 n \right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder, weil nach der Voraussetzung $2n\varphi = \alpha$ ist:

$$\begin{aligned} \Sigma \cos(2n-1)\varphi = {} & n \\ & - \frac{n}{1.2} \left\{ \frac{\alpha^2}{3} + \overset{2}{C}_1 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \varphi + \overset{2}{C}_2 \varphi^2 \right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{n}{1..4}\left\{\frac{\alpha^4}{5}+\overset{4}{C}_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\varphi+\overset{4}{C}_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\varphi^2+\overset{4}{C}_3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi^3+\overset{4}{C}_4\varphi^4\right\}$$
$$-\frac{n}{1..6}\left\{\frac{\alpha^6}{7}+\overset{6}{C}_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5\varphi+\overset{6}{C}_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4\varphi^2+\ldots+\overset{6}{C}_6\varphi^6\right\}$$
$$+\frac{n}{1..8}\left\{\frac{\alpha^8}{9}+\overset{8}{C}_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)^7\varphi+\overset{8}{C}_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6\varphi^2+\ldots+\overset{8}{C}_8\varphi^8\right\}$$
$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. i., wenn P_φ überhaupt eine für $\varphi=0$ verschwindende Function von φ bezeichnet:

$$\Sigma\cos(2n-1)\varphi=n\left\{1-\frac{\alpha^2}{1..3}+\frac{\alpha^4}{1..5}-\frac{\alpha^6}{1..7}+\ldots+P_\varphi\right\},$$

oder, wenn auch Q_φ eine für $\varphi=0$ verschwindende Function von φ bezeichnet:

$$\Sigma\cos(2n-1)\varphi=\frac{n}{\alpha}\left\{\alpha-\frac{\alpha^3}{1..3}+\frac{\alpha^5}{1..5}-\frac{\alpha^7}{1..7}+\ldots+Q_\varphi\right\},$$

d. i.

$$\Sigma\cos(2n-1)\varphi=\frac{n}{\alpha}\left\{\sin\alpha+Q_\varphi\right\}.$$

Da $2n\varphi$ der constanten Größe α gleich ist, so ist $2n\varkappa\varphi$ der constanten Größe $\varkappa\alpha$ gleich, und folglich, wenn auch Q'_φ eine für $\varphi=0$ verschwindende Function von φ bezeichnet:

$$\Sigma\cos(2n-1)\varkappa\varphi=\frac{n}{\varkappa\alpha}\left\{\sin\varkappa\alpha+Q'_\varphi\right\}.$$

Bezeichnen also jetzt

$$Q_\varphi^{(1)},\; Q_\varphi^{(2)},\; Q_\varphi^{(3)},\; Q_\varphi^{(4)},\;\ldots\; Q_\varphi^{(\varkappa)}$$

lauter für $\varphi=0$ verschwindende Functionen von φ, so ist nach dem Obigen:

$$2^{2\varkappa-1}(-1)^\varkappa\Sigma(\sin(2n-1)\varphi)^{2\varkappa}=\frac{n}{2\varkappa\alpha}\left\{\sin 2\varkappa\alpha+Q_\varphi^{(1)}\right\}$$
$$-\frac{n}{(2\varkappa-2)\alpha}\,{}_{2\varkappa}\overset{1}{B}\left\{\sin(2\varkappa-2)\alpha+Q_\varphi^{(2)}\right\}$$
$$+\frac{n}{(2\varkappa-4)\alpha}\,{}_{2\varkappa}\overset{2}{B}\left\{\sin(2\varkappa-4)\alpha+Q_\varphi^{(3)}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{n}{2\alpha}\,{}_{2\varkappa}\overset{\varkappa-1}{B}(-1)^{\varkappa-1}\left\{\sin 2\alpha+Q_\varphi^{(\varkappa)}\right\}$$
$$+\frac{n}{2}\,{}_{2\varkappa}\overset{\varkappa}{B}(-1)^\varkappa$$

oder, wenn auch Π_φ eine für $\varphi=0$ verschwindende Function von φ bezeichnet:

$$2^{2x-1}(-1)^x \Sigma(\sin(2n-1)\varphi)^{2x} =$$

$$n\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin 2x\alpha}{2x\alpha} - \frac{\overset{1}{2xB}\sin(2x-2)\alpha}{(2x-2)\alpha} + \frac{\overset{2}{2xB}\sin(2x-4)\alpha}{(2x-4)\alpha} - \ldots \\ \ldots + \frac{\overset{x-1}{2xB}\sin 2\alpha}{2\alpha}(-1)^{x-1} + \frac{\overset{x}{2xB}}{2}(-1)^x\end{array}\right\} + n\Pi_\varphi.$$

Setzen wir nun die eingeschlossene Reihe der Kürze wegen $= \overset{x}{L}$, so ist

$$2^{2x-1}(-1)^x \Sigma(\sin(2n-1)\varphi)^{2x} = n\overset{x}{L} + n\Pi_\varphi,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{X}{x} = nA - \frac{n\overset{1}{A}\overset{1}{L}}{2} + n\Pi_\varphi^{(1)}$$

$$+ \frac{n\overset{2}{A}\overset{2}{L}}{2^3} + n\Pi_\varphi^{(2)}$$

$$- \frac{n\overset{3}{A}\overset{3}{L}}{2^5} + n\Pi_\varphi^{(3)}$$

$$+ \frac{n\overset{4}{A}\overset{4}{L}}{2^7} + n\Pi_\varphi^{(4)}$$

$$- \ldots + \ldots ;$$

wo $\Pi_\varphi^{(1)}$, $\Pi_\varphi^{(2)}$, $\Pi_\varphi^{(3)}$, $\Pi_\varphi^{(4)}$, ... sämmtlich gewisse unbestimmte Functionen von φ sind, von denen man nur weiß, daß sie für $\varphi = 0$ verschwinden. Also ist auch, wenn Ω_φ eine eben solche Function von φ bezeichnet:

$$X = nx\left\{A - \frac{\overset{1}{A}\overset{1}{L}}{2} + \frac{\overset{2}{A}\overset{2}{L}}{2^3} - \frac{\overset{3}{A}\overset{3}{L}}{2^5} + \frac{\overset{4}{A}\overset{4}{L}}{2^7} - \ldots + \Omega_\varphi\right\}.$$

Für $n = \infty$ ist aber offenbar $X = S$, nx ist dem Bogen $\varrho\alpha$ gleich, φ und folglich auch Ω_φ ist $= 0$. Also ist

$$S = \varrho\alpha\left\{A - \frac{\overset{1}{A}\overset{1}{L}}{2} + \frac{\overset{2}{A}\overset{2}{L}}{2^3} - \frac{\overset{3}{A}\overset{3}{L}}{2^5} + \frac{\overset{4}{A}\overset{4}{L}}{2^7} - \ldots\right\}.$$

α muß immer in Theilen des Radius $= 1$ ausgedrückt gedacht werden. Durch diese Reihe wird also der Flächeninhalt des dem Winkel α entsprechenden Stücks der Seitenfläche des schiefen Cylinders dargestellt. Das allgemeine Glied dieser Reihe ist $= \frac{\overset{x}{A}\overset{x}{L}}{2^{2x-1}}(-1)^x$. Nach dem Obigen ist

$$\sqrt{a^2 - e^2 z^2} = A + \overset{1}{A}z^2 + \overset{2}{A}z^4 + \overset{3}{A}z^6 + \ldots + \overset{x}{A}z^{2x} + \ldots$$

gesetzt worden, und nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$\sqrt{a^2 - e^2 z^2} = a\left\{1 - \frac{e^2 z^2}{a^2}\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$a\left\{1 - {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}\frac{e^2 z^2}{a^2} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\frac{e^4 z^4}{a^4} - {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}\frac{e^6 z^6}{a^6} + \ldots + {}^{\frac{1}{2}}\overset{x}{B}(-1)^x \frac{e^{2x} z^{2x}}{a^{2x}} + \ldots\right\};$$

also ist $A = a$ und

$$\overset{x}{A} = {}^{\frac{1}{2}}\overset{x}{B}(-1)^x \frac{e^{2x}}{a^{2x-1}};$$

folglich das allgemeine Glied der obigen Reihe

$$= \frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{x}{B} e^{2x}}{(2a)^{2x-1}} \overset{x}{L}$$

$$= \frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{x}{B} e^{2x}}{(2a)^{2x-1}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 2x\alpha}{2x\alpha} - \frac{{}^{2x}\overset{1}{B}\sin(2x-2)\alpha}{(2x-2)\alpha} + \frac{{}^{2x}\overset{2}{B}\sin(2x-4)\alpha}{(2x-4)\alpha} - \ldots \\ \qquad \ldots + \frac{{}^{2x}\overset{x-1}{B}\sin 2\alpha}{2\alpha}(-1)^{x-1} + \frac{{}^{2x}\overset{x}{B}}{2}(-1)^x \end{array} \right\}.$$

Demnach ist

$$\frac{S}{\varrho\alpha} = a + \frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}\overset{1}{L}}{2a}e^2 + \frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\overset{2}{L}}{(2a)^3}e^4 + \frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}\overset{3}{L}}{(2a)^5}e^6 + \frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B}\overset{4}{L}}{(2a)^7}e^8 + \ldots,$$

oder

$$\frac{S}{2\varrho a\alpha} = \frac{1}{2} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}\overset{1}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^2 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\overset{2}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^4 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}\overset{3}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^6 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B}\overset{4}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^8 + \ldots$$

Will man die Area der ganzen krummen Seitenfläche des Cylinders haben, so muß man $\alpha = 2\pi$ setzen, wodurch man, wenn man diese Fläche $= C$ setzt, leicht erhält:

$$\frac{C}{2\varrho a\pi} = 1 - {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}\,{}^{2}\overset{1}{B}\left(\frac{e}{2a}\right)^2 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\,{}^{4}\overset{2}{B}\left(\frac{e}{2a}\right)^4 - {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}\,{}^{6}\overset{3}{B}\left(\frac{e}{2a}\right)^6 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B}\,{}^{8}\overset{4}{B}\left(\frac{e}{2a}\right)^8 + \ldots$$

Aber

$$\frac{{}^{\frac{1}{2}}\overset{x}{B}\,{}^{2x}\overset{x}{B}}{2^{2x}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-x+1)}{1.2.3\ldots x.2^{2x}} \cdot \frac{2x(2x-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\ldots(x-1-\frac{1}{2})}{1.2.3\ldots x.2^{2x}} \cdot \frac{2x(2x-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots x}(-1)^{x-1}$$

$$= \frac{1.3.5.7\ldots(2x-3)}{1.2.3\ldots x.2^{2x}.2^x} \cdot \frac{2x(2x-1)\ldots3.2.1}{(1.2.3\ldots)^2}(-1)^{x-1}$$

$$= \frac{1.3.5.7\ldots(2x-1)}{1.2.3\ldots x.2^{2x}.2^x} \cdot \frac{2x(2x-1)\ldots3.2.1}{(1.2.3\ldots x)^2(2x-1)}(-1)^{x-1}$$

$$= \frac{\{1.3.5.7\ldots(2x-1)\}^2}{1.2.3\ldots x.2^{2x}.2^x}\cdot\frac{1.2.3\ldots x.2^x}{(1.2.3..x)^2(2x-1)}(-1)^{x-1}$$

$$= \left\{\frac{1.3.5.7\ldots(2x-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots2x}\right\}^2\cdot\frac{1}{2x-1}(-1)^{x-1}.$$

Folglich

$$\frac{C}{2\varrho a\pi} = 1 - (\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{e^2}{a^2} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{e^4}{3a^4} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{e^6}{5a^6} - \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{e^8}{7a^8} - \ldots\ldots$$

3. Nach Thl. I. S. 703. wird die Area der Cylinderfläche ausgedrückt durch das Product der Axe des Cylinders in den Umfang eines elliptischen Schnitts desselben, auf dessen Ebene die Axe des Cylinders senkrecht ist. Bezeichnen wir also den Umfang eines solchen elliptischen Schnitts durch E, so ist, weil nach dem Obigen a offenbar die Axe des Cylinders ist,

$$\frac{E}{2\varrho\pi} = 1 - (\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{e^2}{a^2} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{e^4}{3a^4} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{e^6}{5a^6} - \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{e^8}{7a^8} - \ldots\ldots$$

Die große Axe der in Rede stehenden Ellipse ist, wie aus Thl. I. S. 703. sich leicht ergiebt, $= 2\varrho$, und die kleine Axe, wenn ε den Neigungswinkel der Axe des Cylinders gegen seine Grundfläche bezeichnet, $= 2\varrho\sin\varepsilon$. Aber (s. Fig. 18.) offenbar

$$CC_1 = CC'.\cos\varepsilon,\quad e = a\cos\varepsilon,\quad \frac{e^2}{a^2} = \cos\varepsilon^2;$$

und, wenn wir die große und kleine Halbaxe der Ellipse durch a' und b' bezeichnen,

$$a' = \varrho,\quad b' = \varrho\sin\varepsilon,\quad \sin\varepsilon = \frac{b'}{a'},\quad \cos\varepsilon^2 = \frac{a'^2-b'^2}{a'^2};$$

also

$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{a'^2-b'^2}{a'^2},$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{a'^2-b'^2}{a'^2} = c^2$$

setzen:

$$\frac{E}{2a'\pi} = 1 - (\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{c^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{c^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{c^6}{5} - \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{c^8}{7} - \ldots\ldots,$$

mittelst welcher Reihe also der Umfang jeder Ellipse bloß durch ihre große und kleine Axe ausgedrückt ist.

Ist Q der elliptische Quadrant, so ist

$$\frac{2Q}{a'\pi} = 1 - (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \frac{c^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{c^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{c^6}{5}$$
$$- \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \frac{c^8}{7}$$
$$- \ldots\ldots$$

4. Eine Ellipse, deren kleine Axe $= 0$ ist, geht in eine gerade Linie über, und der elliptische Quadrant ist in diesem Falle offenbar $= a'$. Setzen wir nun $b' = 0$, so wird

$$c^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{a'^2}{a'^2} = 1;$$

also, da $Q = a'$ ist:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{5}$$
$$- \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{7}$$
$$- \ldots\ldots$$

eine merkwürdige Reihe für $\frac{2}{\pi}$, oder, wenn man durch 2 dividirt, für $\frac{1}{\pi}$.

Bemerkenswerth scheint es zu seyn, daß sich aus dieser Reihe, und also aus den obigen Principien überhaupt, auch ein Beweis für den berühmten von Wallis gefundenen Ausdruck für $\frac{\pi}{2}$ sehr leicht ableiten läßt. Es ist nämlich

$$1 - \frac{1.1}{2.2} = \frac{2.2 - 1.1}{2.2} = \frac{1.3}{2.2},$$

$$\frac{1.3}{2.2} - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} = \frac{1.3.(4.4 - 1.1)}{2.2.4.4} = \frac{1.3.3.5}{2.2.4.4},$$

$$\frac{1.3.3.5}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} = \frac{1.3.3.5.(6.6 - 1.1)}{2.2.4.4.6.6} = \frac{1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6},$$

u. s. f. u. s. f.

wo das Fortschreitungsgesetz, und wie man weiter gehen kann, schon mit völliger Deutlichkeit erhellet. Also ist

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)}{2.2.4.4.6\ldots\ldots(2n-2).2n.2n},$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6\ldots\ldots(2n-2).2n.2n}{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)},$$

mit desto mehr Genauigkeit, je größer n ist, welches bekanntlich der von Wallis gefundene Satz ist (Cyklometrie. 29.).

5. Man kann endlich mittelst des Obigen auch ohne große Schwierigkeit zu der sogenannten unbestimmten Rectification der Ellipse, d. h. zu einem Ausdruck für die Länge eines beliebigen Bogens derselben, gelangen. Man denke sich nämlich wieder

durch die Mittelpunkte C, C' (Fig. 18.) der Grundflächen Ebenen gelegt, welche auf der Axe CC' des Cylinders senkrecht sind, so sind deren Durchschnitte mit der Cylinderfläche bekanntlich Ellipsen. Bezeichnet man nun, wie oben, das dem Winkel ACE $= \alpha$ entsprechende Stück der Cylinderfläche durch S, denkt sich die Linie EE' verlängert, bis diese Linie auch die untere Ellipse schneidet, und bezeichnet den durch diese Linie von a_1 (Fig. 18.) an auf der Ellipse abgeschnittenen Bogen durch E'; so wird auf der Stelle erhellen, daß

$$S = CC'.E' = aE',\; E' = \frac{S}{a}$$

ist, wo a die Axe des Cylinders bezeichnet. Der Winkel am Mittelpunkte C der Ellipse, welchem der Bogen E' entspricht, sey $= \psi$, der Neigungswinkel der Axe des Cylinders gegen die Grundfläche, wie oben, $= \varepsilon$, der von CE mit dem entsprechenden Halbmesser der Ellipse eingeschlossene Winkel sey $= \psi'$; so ist nach Principien der sphärischen Trigonometrie in der körperlichen Ecke CAEC', da ψ offenbar der Neigungswinkel der Ebenen ACC', ECC' an der Kante CC' gegen einander ist;

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha - \cos\varepsilon\cos(90^0 - \psi')}{\sin\varepsilon\sin(90^0 - \psi')},$$

d. i.

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha - \cos\varepsilon\sin\psi'}{\sin\varepsilon\cos\psi'}.$$

Eben so leicht ergiebt sich aber auch aus Principien der sphärischen Trigonometrie, weil der an der Kante CA anliegende Neigungswinkel der in Rede stehenden Ecke offenbar ein rechter Winkel ist,

$$\cos(90^0 - \psi') = \sin\psi' = \cos\alpha\cos\varepsilon,$$

und folglich

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha\cos\varepsilon^2}{\sin\varepsilon\sqrt{1 - \cos\alpha^2\cos\varepsilon^2}} = \frac{\cos\alpha\sin\varepsilon}{\sqrt{1 - \cos\alpha^2\cos\varepsilon^2}}.$$

Also

$$\cos\alpha^2 = \frac{\cos\psi^2}{\sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2\cos\psi^2},$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{\sin\varepsilon^2\sin\psi^2}{\sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2\cos\psi^2};$$

oder

$$\cos\alpha = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 - \cos\varepsilon^2\sin\psi^2}},\; \sin\alpha = \frac{\sin\varepsilon\sin\psi}{\sqrt{1 - \cos\varepsilon^2\sin\psi^2}}.$$

Bezeichnet man jetzt die dem Winkel ψ entsprechenden Coordinaten der Ellipse durch x, y, indem die x auf der kleinen Axe genommen werden; so ist offenbar

$$x = \cos\psi\sqrt{x^2 + y^2},\; y = \sin\psi\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\; \sin\psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ferner ist, wie sich sogleich aus dem Dreieck CAa_1 (Fig. 18.) ergiebt, wenn wir wieder die große und kleine Halbaxe der Ellipse durch a' und b' bezeichnen,

$$b' = a' \cos(90^0 - \varepsilon) = a' \sin\varepsilon \;;$$

also

$$\sin\varepsilon = \frac{b'}{a'},\; \cos\varepsilon = \frac{\sqrt{a'^2 - b'^2}}{a'}\;.$$

Folglich nach dem Obigen

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{a'^2 - b'^2}{a'^2}\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{a'x}{\sqrt{a'^2x^2 + b'^2y^2}}\;.$$

Nach der Gleichung der Ellipse ist aber, weil die x auf der kleinen Axe $2b'$ genommen werden:

$$a'^2x^2 + b'^2y^2 = a'^2b'^2\;.$$

Folglich ist

$$\cos\alpha = \frac{x}{b'},\; \sin\alpha = \frac{y}{a'}\;,$$

wobei man zu bemerken hat, daß

$$1 - \frac{x^2}{b'^2} = 1 - \frac{1}{b'^2}\cdot\frac{a'^2b'^2 - b'^2y^2}{a'^2} = \frac{y}{a'^2}\;.$$

Daher ist

$$\alpha = \text{Arc}\sin\frac{y}{a'} = \text{Arc}\cos\frac{x}{b'}\;.$$

Ist nun ein beliebiger, von dem einen Scheitel der kleinen Axe an gerechneter Bogen der Ellipse gegeben, so sind auch die Coordinaten x, y des Endpunktes dieses Bogens gegeben, wobei die x auf der kleinen Axe genommen werden. Also ist auch

$$\alpha = \text{Arc}\cos\frac{x}{b'} = \text{Arc}\sin\frac{y}{a'} = \varphi$$

gegeben, und wir haben folglich zur unbestimmten Rectification der Ellipse, weil nach dem Obigen $E' = \frac{S}{a}$ ist, nach (2.) die Formel

$$\frac{E'}{2a'\varphi} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\overset{1\,1}{B}\overset{1}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\overset{1\,2}{B}\overset{2}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^4 + \tfrac{1}{2}\overset{1\,3}{B}\overset{3}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^6 + \tfrac{1}{2}\overset{1\,4}{B}\overset{4}{L}\left(\frac{e}{2a}\right)^8 + \ldots$$

wo nun bloß noch e und a zu eliminiren sind. Nach (3.) ist aber

$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = c^2\;;$$

folglich ist

$$\frac{E'}{2a'\varphi} = \tfrac{1}{2} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}\overset{1}{L}\left(\frac{c}{2}\right)^2 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\overset{2}{L}\left(\frac{c}{2}\right)^4 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}\overset{3}{L}\left(\frac{c}{2}\right)^6$$
$$+ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B}\overset{4}{L}\left(\frac{c}{2}\right)^8 + \ldots,$$

oder

$$\frac{E'}{a'\varphi} = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}\overset{1}{L}.\frac{c^2}{2} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\overset{2}{L}.\frac{c^4}{2^3} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}\overset{3}{L}.\frac{c^6}{2^5}$$
$$+ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B}\overset{4}{L}.\frac{c^8}{2^7} + \ldots,$$

wo man nun leicht noch für $\overset{1}{L}, \overset{2}{L}, \overset{3}{L}, \overset{4}{L}, \ldots$ ihre Werthe aus dem Obigen setzen könnte. Auch würde es leicht seyn, die Reihe nach den Sinussen der Vielfachen von φ zu ordnen, wobei wir aber nicht länger verweilen.

Wir sind, unserm Zwecke gemäß, zu allen diesen wichtigen und merkwürdigen Formeln gelangt, ohne uns unmittelbar der Principien und allgemeinen Formeln des höhern Calculs zu bedienen. Die krumme Seitenfläche des schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis läßt sich auf ganz ähnliche Art durch eine unendliche Reihe ausdrücken.

Zur Literatur bemerken wir noch: De la Hire: sur les quadratures des superficies cylindriques, qui ont des bases paraboliques, ellipt. et hyperboliques (Mém. de Paris. 1707. p. 330.); J. Brinkley: a theorem for finding the surface of an oblique cylinder, with is geometrical demonstration (Transact. of the Irish. Acad. Vol. IX. p. 145.); G. W. Kraft: de superficie cylindri et coni scalenorum (Comm. Petrop. T. XIV. p. 92.). J. T. Mayers praktische Geometrie. Thl. V. (Praktische Stereometrie). Gött. 1809. Drittes Kapitel. Serenus aus Antissa auf Lesbos hat eine Schrift über die Schnitte eines Cylinders und eines Kegels durch die Axe geschrieben.

6. Weil, wie schon erinnert, die Entwickelung der Oberfläche des schiefen Kegels mit der Entwickelung der Oberfläche des schiefen Cylinders auf denselben Principien beruhet, und sich überhaupt fast ganz auf dieselbe Art durchführen läßt; so erscheint es, um zugleich den Raum in dem zweiten Theile dieser Supplemente zu sparen, als zweckmäßig, die Entwickelung der Oberfläche des schiefen Kegels sogleich hier mit anzuschließen, und dann im zweiten Theile wegen derselben bloß auf gegenwärtigen Artikel zu verweisen. Sey daher in Fig. 19. ABD ein beliebiger schiefer Kegel, DF = h seine Höhe, und durch deren Fußpunkt F der Durchmesser AB = 2ϱ gezogen. Die Linie CF sey = e, und ACE sey ein beliebiger Winkel, welchen wir, oder auch den ihm entsprechenden Bogen für den Radius 1, wieder durch α bezeichnen wollen. Durch E denke man sich an den Umfang der Grundfläche eine Berührende gezogen, welche den

verlängerten Durchmesser AB in T schneidet. Von der Spitze D sey auf diese Berührende das Perpendikel DG gefällt, dessen Länge wir jetzt wieder, auf ähnliche Art wie bei'm Cylinder, zuerst bestimmen wollen. Zieht man FG, so ist diese Linie nach bekannten stereometrischen Sätzen auf der durch E gezogenen Berührenden senkrecht, und folglich dem Radius CE parallel. Daher ist

$$CT : CE = FT : FG\,,$$
$$CT : CE = CT - CF : FG\,;$$

d. i.

$$\varrho \sec\alpha : \varrho = \varrho \sec\alpha - e : FG\,,$$

$$FG = \varrho - \frac{e}{\sec\alpha} = \varrho - e\cos\alpha\,.$$

Folglich

$$DG^2 = (\varrho - e\cos\alpha)^2 + h^2$$
$$= \varrho^2 + h^2 - (2\varrho e\cos\alpha - e^2\cos\alpha^2)\,,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\varrho^2 + h^2 = a^2$ setzen:

$$DG = \sqrt{a^2 - (2\varrho e\cos\alpha - e^2\cos\alpha^2)}\,.$$

Theilen wir also wieder den Winkel α in 2n gleiche Theile, deren jeder $= \varphi$ ist, und bezeichnen der Kürze wegen die Cosinus der Winkel

$$\varphi,\ 3\varphi,\ 5\varphi,\ 7\varphi,\ \ldots\ (2n-1)\varphi$$

respective bloß durch

$$c_1,\ c_3,\ c_5,\ c_7,\ \ldots\ c_{2n-1}\,;$$

so sind die von der Spitze des Kegels auf die durch die Endpunkte der Bogen φ, 3φ, 5φ, 7φ, ... $(2n-1)\varphi$ gezogenen Berührenden gefällten Perpendikel nach der Reihe:

$$\sqrt{a^2 - (2\varrho e c_1 - e^2 c_1^2)}\,,$$
$$\sqrt{a^2 - (2\varrho e c_3 - e^2 c_3^2)}\,,$$
$$\sqrt{a^2 - (2\varrho e c_5 - e^2 c_5^2)}\,,$$
$$\sqrt{a^2 - (2\varrho e c_7 - e^2 c_7^2)}\,,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\sqrt{a^2 - (2\varrho e c_{2n-1} - e^2 c^2_{2n-1})}\,.$$

Auf ganz ähnliche Art wie bei'm Cylinder kann man nun um das dem Winkel α entsprechende Stück der Kegelfläche ein Stück einer pyramidalischen Fläche beschreiben, welches aus n Dreiecken besteht, deren Grundlinien sämmtlich einander gleich, und deren Höhen die oben bestimmten Perpendikel sind. Setzen wir also die Area dieser pyramidalischen Fläche $= X$, die gemeinschaftliche Grundlinie aller Dreiecke, aus denen dieselbe besteht, $= x$; so folgt aus den einfachsten Sätzen der ebenen Geometrie:

$$\frac{2X}{x} = \sqrt{a^2 - (2\varrho e c_1 - e^2 c_1^2)}$$
$$+ \sqrt{a^2 - (2\varrho e c_3 - e^2 c_3^2)}$$
$$+ \sqrt{a^2 - (2\varrho e c_5 - e^2 c_5^2)}$$
$$+ \sqrt{a^2 - (2\varrho e c^7 - e^2 c_7^2)}$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$+ \sqrt{a^2 - (2\varrho e c_{2n-1} - e^2 c^2{}_{2n-1})}\,.$$

Setzen wir nun wieder allgemein

$$\sqrt{a^2 - (2\varrho e z - e^2 z^2)} = A + \overset{1}{A}z + \overset{2}{A}z^2 + \overset{3}{A}z^3 + \overset{4}{A}z^4 + \ldots\,;$$

so ergiebt sich leicht

$$\frac{2X}{x} = nA + \overset{1}{A}\{c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + \ldots + c_{2n-1}\}$$
$$+ \overset{2}{A}\{c_1^2 + c_3^2 + c_5^2 + c_7^2 + \ldots + c^2{}_{2n-1}\}$$
$$+ \overset{3}{A}\{c_1^3 + c_3^3 + c_5^3 + c_7^3 + \ldots + c^3{}_{2n-1}\}$$
$$+ \overset{4}{A}\{c_1^4 + c_3^4 + c_5^4 + c_7^4 + \ldots + c^4{}_{2n-1}\}$$
$$+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$= nA + \overset{1}{A}\Sigma c_{2n-1} + \overset{2}{A}\Sigma c^2{}_{2n-1} + \overset{3}{A}\Sigma c^3{}_{2n-1} + \overset{4}{A}\Sigma c^4{}_{2n-1} + \ldots$$
$$= nA + \overset{1}{A}\Sigma\{\cos(2n-1)\varphi\} + \overset{2}{A}\Sigma\{\cos(2n-1)\varphi\}^2$$
$$+ \overset{3}{A}\Sigma\{\cos(2n-1)\varphi\}^3$$
$$+ \overset{4}{A}\Sigma\{\cos(2n-1)\varphi\}^4$$
$$+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Nach dem Artikel Goniometrie. VII. ist nun:

$$2^{2x-1}(\cos\varphi)^{2x} = \cos 2x\varphi + {}^{2x}\overset{1}{B}\cos(2x-2)\varphi + {}^{2x}\overset{2}{B}\cos(2x-4)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + {}^{2x}\overset{x-1}{B}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}\,{}^{2x}\overset{x}{B}$$

$$2^{2x-1}(\cos 3\varphi)^{2x} = \cos(3.2x\varphi) + {}^{2x}\overset{1}{B}\cos 3(2x-2)\varphi + {}^{2x}\overset{2}{B}\cos 3(2x-4)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + {}^{2x}\overset{x-1}{B}\cos(3.2\varphi) + \tfrac{1}{2}\,{}^{2x}\overset{x}{B}$$

$$2^{2x-1}(\cos 5\varphi)^{2x} = \cos(5.2x\varphi) + {}^{2x}\overset{1}{B}\cos 5(2x-2)\varphi + {}^{2x}\overset{2}{B}\cos 5(2x-4)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + {}^{2x}\overset{x-1}{B}\cos(5.2\varphi) + \tfrac{1}{2}\,{}^{2x}\overset{x}{B}$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$2^{2x-1}(\cos(2n-1)\varphi)^{2x} = \cos(2n-1)2x\varphi + {}^{2x}\overset{1}{B}\cos(2n-1)(2x-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + {}^{2x}\overset{x-1}{B}\cos(2n-1)2\varphi + \tfrac{1}{2}\,{}^{2x}\overset{x}{B}\,;$$

folglich:

$$2^{2x-1}\Sigma(\cos(2n-1)\varphi)^{2x} = \Sigma\cos(2n-1)2x\varphi + {}^{2x}\overset{1}{B}\Sigma\cos(2n-1)(2x-2)\varphi + {}^{2x}\overset{2}{B}\Sigma\cos(2n-1)(2x-4)\varphi \ldots + {}^{2x}\overset{x-1}{B}\Sigma\cos(2n-1)2\varphi + \frac{n}{2}{}^{2x}\overset{x}{B}.$$

Weil nun nach (2.)

$$\Sigma\cos(2n-1)\varphi = \frac{n}{\alpha}\left\{\sin\alpha + Q_\varphi\right\},$$

oder allgemeiner

$$\Sigma\cos(2n-1)x\varphi = \frac{n}{x\alpha}\left\{\sin x\alpha + Q'_\varphi\right\}$$

ist; so findet man auf ganz ähnliche Art wie a. a. O.

$$2^{2x-1}\Sigma(\cos(2n-1)\varphi)^{2x} = n\left\{\frac{\sin 2x\alpha}{2x\alpha} + \frac{{}^{2x}\overset{1}{B}\sin(2x-2)\alpha}{(2x-2)\alpha} + \frac{{}^{2x}\overset{2}{B}\sin(2x-4)\alpha}{(2x-4)\alpha} + \ldots \ldots + \frac{{}^{2x}\overset{x-1}{B}\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{{}^{2x}\overset{x}{B}}{2}\right\} + n\Pi_\varphi,$$

wo immer Π_φ eine für $\varphi = 0$ verschwindende Function von φ bezeichnet. Ganz eben so leicht findet man nach Goniometrie. VII. und nach (2.)

$$2^{2x}\Sigma(\cos(2n-1)\varphi)^{2x+1} = n\left\{\frac{\sin(2x+1)\alpha}{(2x+1)\alpha} + \frac{{}^{2x+1}\overset{1}{B}\sin(2x-1)\alpha}{(2x-1)\alpha} + \frac{{}^{2x+1}\overset{2}{B}\sin(2x-3)\alpha}{(2x-3)\alpha} + \ldots \ldots + \frac{{}^{2x+1}\overset{x-1}{B}\sin 3\alpha}{3\alpha} + \frac{{}^{2x+1}\overset{x}{B}\sin\alpha}{\alpha}\right\} + n\Pi'_\varphi,$$

oder der Kürze wegen

$$2^{2x-1}\Sigma(\cos(2n-1)\varphi)^{2x} = n\overset{2x}{G} + n\Pi_\varphi,$$

$$2^{2x}\Sigma(\cos(2n-1)\varphi)^{2x+1} = n\overset{2x+1}{G'} + n\Pi'_\varphi.$$

Folglich auf ganz ähnliche Art wie in (2.) nach dem Obigen:

$$\frac{2X}{x} = n\left\{A + \frac{\overset{1}{A}\overset{1}{G'}}{1} + \frac{\overset{2}{A}\overset{2}{G}}{2} + \frac{\overset{3}{A}\overset{3}{G'}}{2^2} + \frac{\overset{4}{A}\overset{4}{G}}{2^3} + \ldots + \Omega_\varphi\right\},$$

wo Ω_φ eine für $\varphi = 0$ verschwindende Function von φ ist. Also

$$X = \tfrac{1}{2}nx\left\{A + \frac{\overset{1}{A}\overset{1}{G'}}{1} + \frac{\overset{2}{A}\overset{2}{G}}{2} + \frac{\overset{3}{A}\overset{3}{G'}}{2^2} + \frac{\overset{4}{A}\overset{4}{G}}{2^3} + \ldots + \Omega_\varphi\right\}.$$

Setzt man nun $n = \infty$, so wird $\varphi = 0$, $\Omega\varphi = 0$, $nx = \varrho\alpha$, und, wenn S die Area des dem Winkel α entsprechenden Stücks der Kegelfläche bezeichnet, $X = S$. Folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\varrho\alpha \left\{ A + \frac{\overset{1}{A}\overset{1}{G'}}{1} + \frac{\overset{2}{A}\overset{2}{G}}{2} + \frac{\overset{3}{A}\overset{3}{G'}}{2^2} + \frac{\overset{4}{A}\overset{4}{G}}{2^3} + \frac{\overset{5}{A}\overset{5}{G'}}{2^4} + \ldots \right\},$$

wodurch also S gefunden. Die durch G und G′ bezeichneten Coefficienten sind schon oben entwickelt, und es kommt also jetzt bloß noch darauf an, auch die durch A bezeichneten Coefficienten zu entwickeln, welches keine Schwierigkeit hat. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\sqrt{a^2 - (2\varrho ez - e^2 z^2)} = A + \overset{1}{A}z + \overset{2}{A}z^2 + \overset{3}{A}z^3 + \overset{4}{A}z^4 + \ldots ;$$

aber nach dem binomischen Lehrsatze, wenn wir der Kürze wegen $2\varrho = \delta$ setzen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - (e\delta z - e^2 z^2)} = a &- {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B} . \frac{e\delta z - e^2 z^3}{a} \\
&+ {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B} . \frac{(e\delta z - e^2 z^2)^2}{a^3} \\
&- {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B} . \frac{(e\delta z - e^2 z^2)^3}{a^5} \\
&+ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B} . \frac{(e\delta z - e^2 z^2)^4}{a^7} \\
&- \ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& a \\
&- {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B} . \frac{e\delta z - e^2 z^3}{a} \\
&+ {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B} . \frac{e^2\delta^2 z^2 - {}^{2}\overset{1}{B} e^3 \delta z^3 + {}^{2}\overset{2}{B} e^4 z^4}{a^3} \\
&- {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B} . \frac{e^3\delta^3 z^3 - {}^{3}\overset{1}{B} e^4\delta^2 z^4 + {}^{3}\overset{2}{B} e^5\delta z^5 - {}^{3}\overset{3}{B} e^6 z^6}{a^5} \\
&+ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B} . \frac{e^4\delta^4 z^4 - {}^{4}\overset{1}{B} e^5\delta^3 z^5 + {}^{4}\overset{2}{B} e^6\delta^2 z^6 - {}^{4}\overset{3}{B} e^7 \delta z^7 + {}^{4}B e^8 z^8}{a^7} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& a \\
&- {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B} . \frac{\delta}{a} ez \\
&+ \left\{ {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B} . \frac{1}{a} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B} . \frac{\delta^2}{a^3} \right\} e^2 z^2 \\
&- \left\{ {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\, {}^{2}\overset{1}{B} . \frac{\delta}{a^3} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B} . \frac{\delta^3}{a^5} \right\} e^3 z^3 \\
&+ \left\{ {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}\, {}^{2}\overset{2}{B} . \frac{1}{a^3} + {}^{\frac{1}{2}}B\, {}^{3}\overset{1}{B} . \frac{\delta^2}{a^5} + {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B} . \frac{\delta^4}{a^7} \right\} e^4 z^4
\end{aligned}$$

$$-\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,3}{B}\,{}^{3}\overset{2}{B}\cdot\frac{\delta}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{1\,4}{B}\,{}^{4}\overset{1}{B}\cdot\frac{\delta^3}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{1\,5}{B}\cdot\frac{\delta^5}{a^9}\right\}e^5z^5$$

$$+\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,3}{B}\,{}^{3}\overset{3}{B}\cdot\frac{1}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{1\,4}{B}\,{}^{4}\overset{2}{B}\cdot\frac{\delta^2}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{1\,5}{B}\,{}^{5}\overset{1}{B}\cdot\frac{\delta^4}{a^9}+{}^{\frac12}\overset{1\,6}{B}\cdot\frac{\delta^6}{a^{11}}\right\}e^6z^6$$

$$-\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,4}{B}\,{}^{4}\overset{3}{B}\cdot\frac{\delta}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{1\,5}{B}\,{}^{5}\overset{2}{B}\cdot\frac{\delta^3}{a^9}+{}^{\frac12}\overset{1\,6}{B}\,{}^{6}\overset{1}{B}\cdot\frac{\delta^5}{a^{11}}+{}^{\frac12}\overset{1\,7}{B}\cdot\frac{\delta^7}{a^{13}}\right\}e^7z^7$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daher ist $A = a$ und

$$\frac{\overset{2x}{A}}{e^{2x}}={}^{\frac12}\overset{1\,x}{B}\,{}^{x}\overset{x}{B}\cdot\frac{1}{a^{2x-1}}+{}^{\frac12}\overset{1\,x+1}{B}\,{}^{x+1}\overset{x-1}{B}\cdot\frac{\delta^2}{a^{2x+1}}+{}^{\frac12}\overset{1\,x+2}{B}\,{}^{x+2}\overset{x-2}{B}\cdot\frac{\delta^4}{a^{2x+3}}+\ldots$$
$$\ldots+{}^{\frac12}\overset{1\,2x}{B}\cdot\frac{\delta^{2x}}{a^{4x-1}},$$

$$-\frac{\overset{2x+1}{A}}{e^{2x+1}}={}^{\frac12}\overset{1\,x+1}{B}\,{}^{x+1}\overset{x}{B}\cdot\frac{\delta}{a^{2x+1}}+{}^{\frac12}\overset{1\,x+2}{B}\,{}^{x+2}\overset{x-1}{B}\cdot\frac{\delta^3}{a^{2x+3}}+{}^{\frac12}\overset{1\,x+3}{B}\,{}^{x+3}\overset{x-2}{B}\cdot\frac{\delta^5}{a^{2x+5}}+\ldots$$
$$\ldots+{}^{\frac12}\overset{2x+1}{B}\cdot\frac{\delta^{2x+1}}{e^{4x+1}}.$$

Es ist also leicht, zwei auf einander folgende allgemeine Glieder

$$\frac{\overset{2x}{A}\,\overset{2x}{G}}{2^{2x-1}}\ \text{und}\ \frac{\overset{2x+1}{A}\,\overset{2x+1}{G'}}{2^{2x}}$$

der oben für S gefundenen Reihe zu construiren. Wir wollen bloß noch den Anfang der, wie es uns scheint, sehr merkwürdigen Reihe hierher setzen:

$$\frac{2S}{\varrho\alpha}=\quad a$$

$$-\frac{e}{1}\,{}^{\frac12}\overset{1\,1}{B}\cdot\frac{\delta}{a}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$+\frac{e^2}{2}\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,1}{B}\cdot\frac{1}{a}+{}^{\frac12}\overset{1\,2}{B}\cdot\frac{\delta^2}{a^3}\right\}\left\{\frac{\sin 2\alpha}{2a}+\frac{{}^{2}\overset{1}{B}}{2}\right\}$$

$$-\frac{e^3}{2^2}\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,2}{B}\,{}^{2}\overset{1}{B}\cdot\frac{\delta}{a^3}+{}^{\frac12}\overset{1\,3}{B}\cdot\frac{\delta^3}{a^5}\right\}\left\{\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}+\frac{{}^{3}\overset{1}{B}\sin\alpha}{\alpha}\right\}$$

$$+\frac{e^4}{2^3}\left\{\begin{array}{l}\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,2}{B}\,{}^{2}\overset{2}{B}\cdot\frac{1}{a^3}+{}^{\frac12}\overset{1\,3}{B}\,{}^{3}\overset{1}{B}\cdot\frac{\delta^2}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{1\,4}{B}\cdot\frac{\delta^4}{a^7}\right\}\\ \left\{\frac{\sin 4a}{4\alpha}+\frac{{}^{4}\overset{1}{B}\sin 2\alpha}{2\alpha}+\frac{{}^{4}\overset{2}{B}}{2}\right\}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{e^5}{2^4}\left\{\begin{array}{l}\left\{{}^{\frac12}\overset{1\,3}{B}\,{}^{3}\overset{2}{B}\cdot\frac{\delta}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{1\,4}{B}\,{}^{4}\overset{1}{B}\cdot\frac{\delta^3}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{1\,5}{B}\cdot\frac{\delta^5}{a^9}\right\}\\ \left\{\frac{\sin 5\alpha}{5\alpha}+\frac{{}^{5}\overset{1}{B}\sin 3\alpha}{3\alpha}+\frac{{}^{5}\overset{2}{B}\sin\alpha}{\alpha}\right\}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{e^6}{2^5}\left\{\begin{array}{l}\left\{{}^{\frac12}\overset{3}{B}\,{}^{3}\overset{3}{B}.\frac{1}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{4}{B}\,{}^{4}\overset{2}{B}.\frac{\delta^2}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{5}{B}\,{}^{5}\overset{1}{B}.\frac{\delta^4}{a^9}+{}^{\frac12}\overset{6}{B}.\frac{\delta^6}{a^{11}}\right\}\\ \left\{\frac{\sin 6\alpha}{6\alpha}+\frac{{}^{6}\overset{1}{B}\sin 4\alpha}{4\alpha}+\frac{{}^{6}\overset{2}{B}\sin 2\alpha}{2\alpha}+\frac{{}^{6}\overset{3}{B}}{2}\right\}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{e^7}{2^6}\left\{\begin{array}{l}\left\{{}^{\frac12}\overset{4}{B}\,{}^{4}\overset{3}{B}.\frac{\delta}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{5}{B}\,{}^{5}\overset{2}{B}.\frac{\delta^3}{a^9}+{}^{\frac12}\overset{6}{B}\,{}^{6}\overset{1}{B}.\frac{\delta^5}{a^{11}}+{}^{\frac12}\overset{7}{B}.\frac{\delta^7}{a^{13}}\right\}\\ \left\{\frac{\sin 7\alpha}{7\alpha}+\frac{{}^{7}\overset{1}{B}\sin 5\alpha}{5\alpha}+\frac{{}^{7}\overset{2}{B}\sin 3\alpha}{3\alpha}+\frac{{}^{7}\overset{3}{B}\sin\alpha}{\alpha}\right\}\end{array}\right\}$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Will man den Inhalt der ganzen Kegelfläche K haben, so muß man $\alpha = 2\pi$ setzen. Dies giebt

$$\frac{K}{\varrho\pi} = A + \frac{{}^{2}\overset{1}{B}\overset{2}{A}}{2^2} + \frac{{}^{4}\overset{2}{B}\overset{4}{A}}{2^4} + \frac{{}^{6}\overset{3}{B}\overset{6}{A}}{2^6} + \frac{{}^{8}\overset{4}{B}\overset{8}{A}}{2^8} + \ldots,$$

oder

$$\frac{K}{\varrho\pi} = \quad a$$

$$+\;{}^{2}\overset{1}{B}\left\{{}^{1}\overset{1}{B}.\frac{1}{a}+{}^{\frac12}\overset{2}{B}.\frac{\delta^2}{a^3}\right\}\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$+\;{}^{4}\overset{2}{B}\left\{{}^{\frac12}\overset{2}{B}\,{}^{2}\overset{2}{B}.\frac{1}{a^3}+{}^{\frac12}\overset{3}{B}\,{}^{3}\overset{1}{B}.\frac{\delta^2}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{4}{B}.\frac{\delta^4}{a^7}\right\}\left(\frac{e}{2}\right)^4$$

$$+\;{}^{6}\overset{3}{B}\left\{{}^{\frac12}\overset{3}{B}\,{}^{3}\overset{3}{B}.\frac{1}{a^5}+{}^{\frac12}\overset{4}{B}\,{}^{4}\overset{2}{B}.\frac{\delta^2}{a^7}+{}^{\frac12}\overset{5}{B}\,{}^{5}\overset{1}{B}.\frac{\delta^4}{a^9}+{}^{\frac12}\overset{6}{B}.\frac{\delta^6}{a^{11}}\right\}\left(\frac{e}{2}\right)^6$$

$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man

$$\overset{2x}{A} = e^{2x}\overset{2x}{C},\; -\overset{2x+1}{A} = e^{2x+1}\overset{2x+1}{C},$$

wo dann nach dem Obigen

$$\overset{2x}{C} = {}^{\frac12}\overset{x}{B}\,{}^{x}\overset{x}{B}.\frac{1}{a^{2x-1}} + {}^{\frac12}\overset{x+1}{B}\,{}^{x+1}\overset{x-1}{B}.\frac{\delta^2}{a^{2x+1}} + \ldots + {}^{\frac12}\overset{2x}{B}.\frac{\delta^{2x}}{a^{4x-1}},$$

$$\overset{2x+1}{C} = {}^{\frac12}\overset{x+1}{B}\,{}^{x+1}\overset{x}{B}.\frac{\delta}{a^{2x+1}} + {}^{\frac12}\overset{x+2}{B}\,{}^{x+2}\overset{x-1}{B}.\frac{\delta^3}{a^{2x+3}} + \ldots + {}^{\frac12}\overset{2x+1}{B}.\frac{\delta^{2x+1}}{e^{4x+1}}$$

ist; so kann man auch setzen

$$\frac{2S}{\varrho\alpha} = C - \overset{1}{C}\overset{1}{G}'.\frac{e}{1} + \overset{2}{C}\overset{2}{G}.\frac{e^2}{2} - \overset{3}{C}\overset{3}{G}'.\frac{e^3}{2^2} + \overset{4}{C}\overset{4}{G}.\frac{e^4}{2^3} - \ldots\ldots$$

für $C = A = a$, oder

$$\frac{S}{\varrho\alpha} = \tfrac12 a - \overset{1}{C}\overset{1}{G}'\left(\frac{e}{2}\right) + \overset{2}{C}\overset{2}{G}\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \overset{3}{C}\overset{3}{G}'\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \overset{4}{C}\overset{4}{G}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \ldots$$

und

$$\frac{K}{\varrho\pi} = a + {}^{2}\overset{1}{B}\overset{2}{C}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + {}^{4}\overset{2}{B}\overset{4}{C}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + {}^{6}\overset{3}{B}\overset{6}{C}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + {}^{8}\overset{4}{B}\overset{8}{C}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \ldots$$

Es würde leicht seyn, diese Reihen, statt nach den Potenzen von e, nach den Potenzen von $\frac{1}{a}$ zu ordnen, wobei wir aber nicht länger verweilen, da die Sache nicht die mindeste Schwierigkeit hat. Auch würde man den Reihen leicht noch manche andere Form geben können. Hier kam es uns vorzüglich auf das allgemeine Gesetz an, nach welchem dieselben fortschreiten.

Cylindrische Flächen heißen alle diejenigen Flächen, welche von einer geraden Linie beschrieben werden, die, über eine gegebene gerade oder krumme Linie im Raume hingleitend, bei dieser Bewegung immer einer gegebenen unbeweglichen geraden Linie parallel bleibt. Die gerade oder krumme Linie im Raume, durch welche gewissermaßen die Bewegung der erzeugenden geraden Linie bestimmt oder regulirt wird, wollen wir im Folgenden, der Kürze wegen, die Directrix nennen.

1. Seyen nun

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta$$

die Gleichungen der geraden Linie AB, welcher die erzeugende Linie bei ihrer Bewegung stets parallel bleibt, so wie

$$f(x, y, z) = 0,\ F(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der Directrix.

Die Gleichungen der erzeugenden geraden Linie in irgend einer ihrer Lagen sind, da dieselbe der Linie AB stets parallel ist:

$$x = az + \alpha',\ y = bz + \beta'.$$

Eigentlich sind dies überhaupt die Gleichungen einer jeden der Linie AB parallelen geraden Linie im Raume. Eine in der Cylinderfläche liegende, der Linie AB parallele gerade Linie muß durch einen Punkt der Directrix gehen. Sind daher x', y', z' die Coordinaten dieses Punktes, so hat man die folgenden vier Gleichungen:

$$f(x', y', z') = 0,\ F(x', y', z') = 0;$$
$$x' = az' + \alpha',\ y' = bz' + \beta'.$$

Aus diesen vier Gleichungen kann man x', y', z' eliminiren, wodurch man eine Gleichung zwischen α', β' und constanten Größen erhält, so daß also β' eine bestimmte Function von α' ist, wenn die durch die Gleichungen

$$x = az + \alpha',\ y = bz + \beta'$$

charakterisirte gerade Linie in der Cylinderfläche liegen soll. Man kann also

$$\beta' = \varphi(\alpha').$$

setzen. Es ist aber immer

$$\alpha' = x - az,\ \beta' = y - bz.$$

Folglich

$$y - bz = \varphi(x - az).$$

Dies ist offenbar die gesuchte Gleichung der Cylinderfläche, welche man also, wie aus dem Obigen sich leicht ergiebt, erhält, indem man aus den vier gegebenen Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0;$$
$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Größen x, y, z eliminirt, und in der sich hieraus ergebenden Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$.

$$\alpha = x - az, \quad \beta = y - bz$$

setzt. Daß es verstattet ist, die obigen vier Gleichungen statt der Gleichungen

$$f(x', y', z') = 0, \quad F(x', y', z') = 0;$$
$$x' = az' + \alpha', \quad y' = bz' + \beta'$$

zu setzen, fällt sogleich in die Augen.

2. Durch Differentiation erhält man aus der Gleichung

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

oder

$$y - bz - \varphi(x - az) = 0,$$

wenn alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind:

$$-\frac{\partial\varphi(x-az)}{\partial x} - \left\{b + \frac{\partial\varphi(x-az)}{\partial z}\right\}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$1 - \left\{b + \frac{\partial\varphi(x-az)}{\partial z}\right\}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Aber, wenn wir $x - az = u$ setzen,

$$\frac{\partial\varphi(x-az)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u},$$
$$\frac{\partial\varphi(x-az)}{\partial z} = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial z} = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z} = -a\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}.$$

Also, für

$$\frac{\partial\varphi(x-az)}{\partial x} = \varphi'(x-az):$$

$$-\varphi'(x-az) - \left\{b - a\varphi'(x-az)\right\}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$1 - \left\{b - a\varphi'(x-az)\right\}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

und, wenn man aus diesen Gleichungen $\varphi'(x - az)$ eliminirt indem man zugleich die partiellen Differentialquotienten jetzt mehrerer Bestimmtheit wegen in Parenthesen einschließt:

$$a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1.$$

Dieser Differentialgleichung muß also die Gleichung jeder krummen Fläche, wenn dieselbe eine Cylinderfläche seyn soll, genügen Aus der Gleichung

$$\alpha^2 (y - bz)^2 + \beta^2 (x - az)^2 = \alpha^2 \beta^2$$

ergiebt sich z. B.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\beta^2 (x - az)}{\alpha^2 b (y - bz) + \beta^2 a (x - az)},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\alpha^2 (y - bz)}{\alpha^2 b (y - bz) + \beta^2 a (x - az)},$$

woraus also mittelst des Obigen leicht folgt, daß diese Gleichung einer Cylinderfläche angehört.

3. Die Directrix sey jetzt ein Kreis in der Ebene der xy. Der Halbmesser dieses Kreises sey r, die Coordinaten seines Mittelpunktes seyen A, B; so sind die Gleichungen desselben:

$$z = 0, \ (x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2 .$$

Aus diesen zwei Gleichungen, und aus den Gleichungen

$$x = az + \alpha, \ y = bz + \beta$$

muß man nun nach (1.) die Größen x, y, z eliminiren. Dadurch erhält man sehr leicht

$$(\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 = r^2 .$$

Folglich, wenn man nach (1.)

$$\alpha = x - az, \ \beta = y - bz$$

setzt:

$$(x - az - A)^2 + (y - bz - B)^2 = r^2$$

die Gleichung der Cylinderfläche.

4. Die Directrix sey eine Ellipse in der Ebene xy, deren Gleichungen

$$z = 0, \ \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

seyen. Aus diesen Gleichungen, und aus den Gleichungen

$$x = az + \alpha, \ y = bz + \beta$$

muß man wieder x, y, z eliminiren. Dadurch erhält man sehr leicht

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{B}\right)^2 = 1 ;$$

folglich, wenn man wieder

$$\alpha = x - az, \ \beta = y - bz$$

setzt,

$$\frac{(x - az)^2}{A^2} + \frac{(y - bz)^2}{B^2} = 1 ,$$

oder

$$A^2 (y - bz)^2 + B^2 (x - az)^2 = A^2 B^2$$

die Gleichung der Cylinderfläche, womit man (2.) vergleichen kann.

5. Die Directrix sey der Durchschnitt zweier Kugeln, deren Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$x^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 = r'^2$$

seyen. Der Mittelpunkt der ersten Kugel ist der Anfang der Coordinaten, der Mittelpunkt der zweiten liegt auf der Axe der z, in der Entfernung γ vom Anfangspunkte der Coordinaten. Aus den obigen beiden Gleichungen, und aus

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

muß man x, y, z eliminiren. Durch Subtraction der beiden ersten Gleichungen von einander ergiebt sich sehr leicht:

$$z = \frac{r^2 - r'^2 - \gamma^2}{2\gamma},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen,

$$\frac{r^2 - r'^2 - \gamma^2}{2\gamma} = \Theta$$

setzen,

$$z = \Theta.$$

Folglich

$$x = a\Theta + \alpha, \quad y = b\Theta + \beta,$$

und demnach mittelst der ersten Gleichung:

$$(a\Theta + \alpha)^2 + (b\Theta + \beta)^2 = r^2 - \Theta^2;$$

also, wenn man

$$\alpha = x - az, \quad \beta = y - bz$$

setzt,

$$(a\Theta + x - az)^2 + (b\Theta + y - bz)^2 = r^2 - \Theta^2,$$

oder

$$\{x + a(\Theta - z)\}^2 + \{y + b(\Theta - z)\}^2 = r^2 - \Theta^2$$

die gesuchte Gleichung der Cylinderfläche. Entwickelt man die Quadrate, so ergiebt sich leicht

$$x^2 + y^2 + 2(ax + by)(\Theta - z) + (a^2 + b^2)(\Theta - z)^2 = r^2 - \Theta^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - 2axz - 2byz + 2a\Theta x + 2b\Theta y$$
$$- 2(a^2 + b^2)\Theta z = r^2 - \Theta^2 - (a^2 + b^2)\Theta^2$$

als Gleichung der Cylinderfläche.

Für $z = 0$ ergiebt sich

$$x^2 + y^2 + 2a\Theta x + 2b\Theta y = r^2 - \Theta^2 - (a^2 + b^2)\Theta^2,$$

welches die Gleichung des Durchschnitts der Cylinderfläche mit der Ebene der xy ist.

D.

Data. Euclids Data nach dem Griechischen, mit Robert Simsons Zusätzen herausgegeben von J. F. Wurm. Berlin. 1825.

Decimalbruch. Wucherer, Beiträge zum allgemeinern Gebrauch der Decimal=Brüche, oder Tafeln zur leichten Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimal=Brüche. Carlsruhe. 1795. Bierstedt, Decimalbruchtabellen für die gemeinen Brüche, deren Nenner zwischen 1 — 1000 fallen. Erster Theil. Fulda u. Frkft. 1812. A. Schröter, das Rechnen mit Decimal=Brüchen und Logarithmen, nebst Tafeln. Helmst. 1799.

Delische Aufgabe. Wlochatius, Elementar=geometrische Auflösung des delischen Problems und der Aufgabe vom Dreischnitt des Winkels. Königsberg. 1804. enthält größtentheils geometrischen Unsinn (s. Trisection des Winkels. 12.) Mat. Doria, nuovo metodo geometrico per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proportionali. Anversa. 1725. Slusii Mesolabum, seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infin. hyperbolas vel ellipses exhibitae. Leodii Eburon. 1668.

Derivirte Functionen, s. Differentialrechnung (3.) i. d. Z.

Descriptive Geometrie (Géométrie descriptive), s. den Artikel Geometrie, descriptive oder beschreibende im zweiten Bande dieser Zusätze.

Developpable Flächen, s. Evolution (4. ff.).

Différences mêlées, équations aux, heißen Gleichungen, welche eigentlich Differenzen= und Differential=Gleichungen zugleich sind, d. h. welche Differenzen und Differentialquotienten einer Function mit einander vermischt enthalten, wie z. B. die Gleichungen

$$a\frac{\partial y}{\partial x} + b\Delta y + cy = 0\,,$$

oder

$$a\frac{\partial \Delta y}{\partial x} + b\frac{\partial y}{\partial x} + c\Delta y + fy = 0\,.$$

Manche Aufgaben führen auf solche Gleichungen, und mehrere französische Mathematiker haben sich daher mit ihrer Integration beschäftigt, worüber Lacroix Traité du calcul diff. etc. T. III. P. 575. nachgesehen werden kann. Auch in dem Artikel Integration der Differenzen= und Differential=Gleichungen i. d. Z. wird Einiges über diesen Gegenstand vorkommen.

Differenzen=Rechnung. Es sind in neuerer Zeit mehrere höchst merkwürdige symbolische Ausdrücke aufgefunden worden, welche zur leichten Entwickelung der Differenzen überaus bequem sind. Diese Ausdrücke zusammenzustellen und zu beweisen, ist der Hauptzweck gegenwärtigen Artikels.

1. Sey zuerst $u = f(x)$ bloß eine Function der einen veränderlichen Größe x, so erhält man bekanntlich Δu, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen läßt, und von dem entsprechenden Werthe von u den primitiven Werth dieser Function abzieht, oder in Zeichen:

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) .$$

Hieraus ergiebt sich $\Delta^2 u$, wenn man, indem Δx als constant betrachtet wird, x wieder in $x + \Delta x$ übergehen läßt, und von dem entsprechenden Werthe von Δu seinen primitiven Werth abzieht, d. i.

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) \\ &\qquad - f(x + \Delta x) + f(x) \\ &= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x) .\end{aligned}$$

So wie u zu Δu, Δu zu $\Delta^2 u$ führte, führt jetzt wieder $\Delta^2 u$ zu $\Delta^3 u$, und man erhält leicht:

$$\begin{aligned}\Delta^3 u &= f(x + 3\Delta x) - 2f(x + 2\Delta x) + f(x + \Delta x) \\ &\qquad - f(x + 2\Delta x) + 2f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x) .\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt auf den ersten Blick in die Augen. Auch ist das sich sogleich darbietende Gesetz der Coefficienten leicht durch die bekannte Bernoullische Schlußart allgemein zu beweisen. Es ist nämlich, wenn wir der Kürze wegen überhaupt

$$u^{(n)} = f(x + n\Delta x)$$

setzen:

$$\Delta^n u = u^{(n)} - \frac{n}{1} u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^{(n-3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}(-1)^{n-2} u^{(2)} + \frac{n}{1}(-1)^{n-1} u^{(1)} + (-1)^n u ,$$

oder, diese Folmel auf einen bloß symbolischen Ausdruck gebracht:

$$\Delta^n u = (u - 1)^n ,$$

mit der Bemerkung, daß man alle durch die Entwickelung der Potenz nach dem binomischen Lehrsatze hervortretenden Potenz=Exponenten von u als bloße Indices betrachtet, und selbige deshalb nach der in Rede stehenden Entwickelung in Parenthesen einschließt.

2. So wie wir jetzt $\Delta^n u$ durch u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, ... $u^{(n)}$ ausgedrückt haben, wollen wir nun auch umgekehrt $u^{(n)}$ durch u, Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ... $\Delta^n u$ auszudrücken suchen. Zuvörderst bemerken wir jedoch, daß, wenn p, q, r, v, w, ... Functionen sind, und

$$u = p + q + r + v + w + \ldots .$$

ist, wie sogleich erhellet, jederzeit

$$\Delta u = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \Delta v + \Delta w + \ldots .$$

ist. Auch ist, wenn a eine constante Größe bezeichnet, und $u = av$ ist, jederzeit $\Delta u = a\Delta v$. Dies vorausgesetzt, haben wir nun nach dem Vorhergehenden, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + \Delta u\,, \\ u^{(2)} &= u^{(1)} + \Delta u^{(1)}\,, \\ u^{(3)} &= u^{(2)} + \Delta u^{(2)}\,, \\ u^{(4)} &= u^{(3)} + \Delta u^{(3)}\,, \\ &\text{u. s. f.} \quad \text{u. s. f.}\,; \end{aligned}$$

folglich nach und nach:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + \Delta u \\ u^{(2)} &= u + \Delta u \\ &\quad + \Delta u + \Delta^2 u \\ &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u \\ u^{(3)} &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u \\ &\quad + \Delta u + 2\Delta^2 u + \Delta^3 u \\ &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \\ u^{(4)} &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \\ &\quad + \Delta u + 3\Delta^2 u + 3\Delta^3 u + \Delta^4 u \\ &= u + 4\Delta u + 6\Delta^2 u + 4\Delta^3 u + \Delta^4 u \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

d. i., wie leicht allgemein bewiesen werden kann:

$$u^{(n)} = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^{n-2} u + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} u + \Delta^n u\,,$$

oder, wenn man auch diese Formel auf einen bloß symbolischen Ausdruck bringt:

$$u^{(n)} = (1 + \Delta)^n u\,,$$

ein Ausdruck, dessen eigentlicher Sinn sogleich in die Augen fallen wird.

3. Ist $u = x^m$, und m eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, so ist, wenn wir der Kürze wegen $\Delta x = h$ setzen:

$$\Delta^n . x^m = \{x + nh\}^m - \frac{n}{1}\Big\{x + (n-1)h\Big\}^m + \frac{n(n-1)}{1.2}\Big\{x + (n-2)h\Big\}^m - \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}(-1)^{n-1}\{x + h\}^m + (-1)^n x^m\,.$$

Ist aber m eine positive ganze Zahl, so ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x + h)^m - x^m \\ &= mhx^{m-1} + Ah^2 x^{m-2} + \ldots + Mh^{m-1}x + Nh^m\,; \end{aligned}$$

folglich

$$\Delta^2 u = mh\Delta . x^{m-1} + Ah^2\Delta . x^{m-2} + \ldots + Mh^{m-1}\Delta x\,,$$

und demnach, wenn man sich die Differenzen der einzelnen Potenzen von x wieder entwickelt denkt, dabei aber immer $\Delta x = h$ setzt:

$$\Delta^2 u = m(m-1)h^2 x^{m-2} + A'h^3 x^{m-3} + \ldots + L'h^{m-1}x + M'h^m.$$

Folglich ferner

$$\Delta^3 u = m(m-1)h^2 \Delta . x^{m-2} + A'h^3 \Delta . x^{m-3} + \ldots + L'h^{m-1}\Delta x\,,$$

d. i.

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)h^3 x^{m-3} + A''h^4 x^{m-4} + \ldots + K''h^{m-1}x + L''h^m.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Endlich ergiebt sich

$$\Delta^m u = 1.2.3.4 \ldots mh^m\,,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Delta^m u = 1.2.3.4 \ldots m\Delta x^m\,,$$

und folglich allgemein für jedes positive $\varkappa$, welches nicht $= 0$ ist, $\Delta^{m+\varkappa} u = 0$.

Dies führt mittelst des Obigen zu den folgenden zwei merkwürdigen Sätzen:

Für jedes x und h ist, wenn m eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$1.2.3.4.5 \ldots. mh^m =$$

$$\{x+mh\}^m - \frac{m}{1}\Big\{x+(m-1)h\Big\}^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\Big\{x+(m-2)h\Big\}^m - \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{m}{1}(-1)^{m-1}\{x+h\}^m + (-1)^m x^m\,.$$

Für jedes x und h ist aber, wenn m eine positive ganze Zahl bezeichnet, und $n > m$ ist:

$$0 = \{x+nh\}^m - \frac{n}{1}\Big\{x+(n-1)h\Big\}^m + \frac{n(n-1)}{1.2}\Big\{x+(n-2)h\Big\}^m - \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{n}{1}(-1)^{n-1}\{x+h\}^m + (-1)^n x^m\,.$$

Setzt man $x = 0$, $h = 1$; so erhält man

$$1.2.3 \ldots m = m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \ldots.\,,$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht. Dagegen ist für jedes $n > m$:

$$0 = n^m - \frac{n}{1}(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \ldots$$

Mehrere merkwürdige Relationen und Sätze über diese und ähnliche Ausdrücke s. m. in meinen Mathematischen Abhandlungen. Altona. 1822. S. 67 — 94.

4. Wie schon oben erinnert worden ist, haben wir durchaus nicht die Absicht, hier eine vollständige Darstellung der Differenzen=Rechnung, sondern bloß einige besonders wichtige Zu=

sätze zu dem entsprechenden Artikel im ersten Theile zu liefern, und gehen daher jetzt sogleich zu der nähern Betrachtung der Differenzen der Functionen mehrerer veränderlicher Größen über. Ist nämlich $u = f(x, y, z, v, \ldots)$ eine Function der beliebig vielen von einander unabhängigen veränderlichen Größen $x, y, z, v, \ldots$, so ist

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, v + \Delta v, \ldots) - f(x, y, z, v, \ldots),$$

und ganz eben so, wie Δu aus u entsteht, entsteht auch hier, indem man immer $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \ldots$ als constant betrachtet, $\Delta^2 u$ aus Δu, $\Delta^3 u$ aus $\Delta^2 u$ u. s. w. Nimmt man die Differenz von u bloß in Bezug auf eine der unabhängigen veränderlichen Größen, indem man die übrigen sämmtlich als constant betrachtet, z. B. bloß in Bezug auf x, indem $y, z, v, \ldots$ als constant betrachtet werden; so soll diese Differenz durch $\Delta_x u$ bezeichnet, und die partielle Differenz von u in Bezug auf x genannt werden. Δu durch partielle Differenzen auszudrücken, ist die Aufgabe, welche wir jetzt vorzüglich ins Auge fassen.

Sey zuerst $u = f(x, y)$ eine Function der zwei unabhängigen veränderlichen Größen x, y. Geht nun, indem y ungeändert bleibt, x in $x + \Delta x$ über, so geht u in $u + \Delta_x u$ über. Läßt man aber jetzt hierin, indem x als constant betrachtet wird, y sich in $y + \Delta y$ verändern, so erhält man offenbar:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u + \Delta_x u + \Delta_y (u + \Delta_x u) \\ &= u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_y \Delta_x u . \end{aligned}$$

Augenscheinlich kann man aber auch zuerst y in $y + \Delta y$ übergehen, und dann x sich in $x + \Delta x$ verändern lassen, wodurch man

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta_x \Delta_y u$$

erhält, welches, mit dem vorhergehenden Resultat verglichen, auf der Stelle

$$\Delta_x \Delta_y u = \Delta_y \Delta_x u$$

giebt. Es ist also

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y u .$$

Wenn ferner $u = f(x, y, z)$ eine Function dreier von einander unabhängiger veränderlicher Größen ist, so ist zunächst nach dem so eben Bewiesenen

$$f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) = u + \Delta_y u + \Delta_z u + \Delta_y \Delta_z u .$$

Folglich, wenn man nun x in $x + \Delta x$ übergehen läßt:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \quad & u + \Delta_y u + \Delta_z u + \Delta_y \Delta_z u \\ & + \Delta_x (u + \Delta_y u + \Delta_z u + \Delta_y \Delta_z u) \\ = u &+ \Delta_x u + \Delta_x \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y \Delta_z u , \\ &+ \Delta_y u + \Delta_x \Delta_z u \\ &+ \Delta_z u + \Delta_y \Delta_z u . \end{aligned}$$

woraus zugleich auf ganz ähnliche Art wie vorher erhellet, daß

$\Delta_x \Delta_y \Delta_z u$ ungeändert bleibt, wie man auch die Ordnung, in welcher die partiellen Differenzen genommen werden, verändern mag.

Für $u = f(x, y, z, v)$ ist hiernach

$$f(x, y+\Delta y, z+\Delta z, v+\Delta v)$$
$$= u + \Delta_y u + \Delta_y \Delta_z u + \Delta_y \Delta_z \Delta_v u$$
$$+ \Delta_z u + \Delta_y \Delta_v u$$
$$+ \Delta_v u + \Delta_z \Delta_v u,$$

und folglich, wenn nun x in $x + \Delta x$ übergeht:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, v+\Delta v)$$
$$= u + \Delta_x u + \Delta_x \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y \Delta_z u + \Delta_x \Delta_y \Delta_z \Delta_v u$$
$$+ \Delta_y u + \Delta_x \Delta_z u + \Delta_x \Delta_y \Delta_v u$$
$$+ \Delta_z u + \Delta_x \Delta_v u + \Delta_x \Delta_z \Delta_v u$$
$$+ \Delta_v u + \Delta_y \Delta_z u + \Delta_y \Delta_z \Delta_v u$$
$$+ \Delta_y \Delta_v u$$
$$+ \Delta_z \Delta_v u.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und man überzeugt sich mit Hülfe einiger aus der combinatorischen Analysis bekannten Betrachtungen sehr leicht von der Richtigkeit des folgenden merkwürdigen symbolischen Ausdrucks, dessen eigentlicher Sinn leicht in die Augen fallen wird:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, v+\Delta v, \ldots.)$$
$$= \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots.\} u.$$

Da ferner immer

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, v+\Delta v, \ldots) - u$$

ist; so ist auch allgemein für jede Anzahl veränderlicher Größen

$$\Delta u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots. - 1\} u.$$

Auch ergiebt sich hieraus sehr leicht, daß $\Delta_x \Delta_y \Delta_z \Delta_v \ldots. u$ ungeändert bleibt, wie man auch die Ordnung, in welcher die partiellen Differenzen in Bezug auf $x, y, z, v, \ldots.$ genommen werden, verändern mag.

Setzt man Δu für u, so erhält man:

$$\Delta^2 u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\} \Delta u.$$

Aber

$$\Delta u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\} u,$$

und folglich, wenn man sich den ersten Ausdruck wirklich entwickelt, und dann in allen Gliedern für Δu den letztern Ausdruck gesetzt denkt, offenbar

$$\Delta^2 u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\}^2 u.$$

Folglich

$$\Delta^3 u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\}^2 \Delta u.$$

Aber

$$\Delta u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\}u.$$

Also nach einer ganz ähnlichen Betrachtungsweise wie vorher:

$$\Delta^3 u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\}^3 u.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist also allgemein:

$$\Delta^n u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\}^n u,$$

wobei man nur nie die durchaus bloß symbolische Natur dieser Ausdrücke aus den Augen verlieren darf.

5. Wir wollen nun auch die Differenzen durch die Differentialquotienten zu entwickeln versuchen, wobei wir wieder mit Functionen einer veränderlichen Größe beginnen. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist bekanntlich

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und, wenn e, wie gewöhnlich, die Basis der natürlichen Logarithmen, welche in der Folge immer bloß durch l angedeutet werden sollen, bezeichnet:

$$e^{\frac{\partial}{\partial x}\Delta x} = 1 + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

folglich

$$\Delta u = \left\{e^{\frac{\partial}{\partial x}\Delta x} - 1\right\}u,$$

wo man wieder das bloß Symbolische dieses Ausdrucks nicht aus den Augen verlieren darf. Setzt man $\Delta x = h$, so ist:

$$\Delta u = \left\{e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right\}u.$$

Auch ist

$$u^{(1)} = u + \Delta u = e^{\frac{\partial}{\partial x}\Delta x}u = e^{h\frac{\partial}{\partial x}}u.$$

Nach (1.) ist, wenn wir wieder $u = f(x)$ und der Kürze wegen immer $\Delta x = h$ setzen, allgemein

$$u^{(n)} = f(x+nh),$$

und es entspringt also $u^{(n)}$ aus $u^{(1)}$, wenn man in $u^{(1)}$ statt h die Größe nh setzt. Weil nun

$$u^{(1)} = e^{h\frac{\partial}{\partial x}}u$$

war, so ist offenbar allgemein

$$u^{(n)} = e^{nh\frac{\partial}{\partial x}}u.$$

Nun ist aber nach (1.)

$$\Delta^n u = u^{(n)} - \frac{n}{1} u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^{(n-3)} + \ldots ;$$

also

$$\Delta^n u = \left\{ e^{nh\frac{\partial}{\partial x}} - \frac{n}{1} e^{(n-1)h\frac{\partial}{\partial x}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)h\frac{\partial}{\partial x}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{(n-3)h\frac{\partial}{\partial x}} + \ldots \right\} u ,$$

und folglich offenbar nach dem binomischen Lehrsatze allgemein

$$\Delta^n u = \left\{ e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\}^n u ,$$

welches eine sehr merkwürdige Formel, und auf die obige Weise zuerst von Brinkley in den Philosoph. Transact. 1807. (Lacroix Traité du calcul. diff. et int. T. III. p. 62.) bewiesen worden ist. Besonders merkwürdig ist es aber, daß diese Formel, wie wir jetzt zeigen wollen, sich auf die Differenzen von Functionen mit jeder beliebigen Anzahl veränderlicher Größen ausdehnen läßt. Nach (4.) ist nämlich

$$\Delta^n u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v) \ldots - 1\}^n u .$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\Delta_x u = \left\{ e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\} u ,$$

$$\Delta_y u = \left\{ e^{i\frac{\partial}{\partial y}} - 1 \right\} u ,$$

$$\Delta_z u = \left\{ e^{k\frac{\partial}{\partial z}} - 1 \right\} u ,$$

$$\Delta_v u = \left\{ e^{l\frac{\partial}{\partial v}} - 1 \right\} u ,$$

u. s. f. u. s. f.

wobei wir, um jedem Mißverständnisse vorzubeugen, bemerken, daß hier natürlich l keinen Logarithmus, sondern das Increment von v bezeichnet. Alle Differentialquotienten von u sind hier, wie sich von selbst versteht, partielle Differentialquotienten, welches der Kürze wegen nicht noch durch ein besonderes Zeichen angedeutet werden soll. Also ist auch

$$u + \Delta_x u = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} u, \quad 1 + \Delta_x = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} ;$$

$$u + \Delta_y u = e^{i\frac{\partial}{\partial y}} u,\quad 1 + \Delta_y = e^{i\frac{\partial}{\partial y}};$$

$$u + \Delta_z u = e^{k\frac{\partial}{\partial z}} u,\quad 1 + \Delta_z = e^{k\frac{\partial}{\partial z}};$$

$$u + \Delta_v u = e^{l\frac{\partial}{\partial v}} u,\quad 1 + \Delta_v = e^{l\frac{\partial}{\partial v}};$$

u. s. f. u. s. f.

wobei es wohl nicht nöthig seyn wird, noch besonders vor einem falschen Verstehen dieser bloß symbolischen Ausdrücke zu warnen. Setzt man nun dieselben für $1+\Delta_x$, $1+\Delta_y$, $1+\Delta_z$, ... in die obige Formel für $\Delta^n u$, so ergiebt sich auf der Stelle der überaus merkwürdige und sehr allgemeine symbolische Ausdruck

$$\Delta^n u = \left\{ e^{h\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} + l\frac{\partial}{\partial v} + \ldots} - 1 \right\} u,$$

welcher für Functionen mit jeder beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen gilt. Gewöhnlich schlägt man bei dem Beweise der beiden vorhergehenden Ausdrücke von $\Delta^n u$ den umgekehrten Weg ein, so daß man nämlich den ersten aus dem zweiten ableitet. Man kann hierüber, so wie über diese symbolischen Ausdrücke überhaupt auch den Artikel Taylors Lehrsatz (19. ff.) vergleichen.

6. Das umgekehrte Problem, nämlich die Differentialquotienten der Function u durch ihre höhern Differenzen auszudrücken, gestattet eine ganz ähnliche Behandlung, wie das vorhergehende. Nach (2.) ist, wenn zuerst u nur von einer veränderlichen Größe x abhängt,

$$u^{(n)} = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots,$$

und nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man, da $u^{(n)} = f(x+nh)$ ist:

$$u^{(n)} = u + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{nh}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{n^2h^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\cdot\frac{n^3h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Nimmt man auf keinen bestimmten Werth von n Rücksicht, sondern denkt sich n als ein ganz allgemeines Symbol, so müssen, wenn man sich auch den ersten Ausdruck von $u^{(n)}$ entwickelt denkt, beide Entwickelungen identisch seyn. Vergleicht man also die Glieder mit einander, welche die erste Potenz von n enthalten, so ergiebt sich, weil bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}h = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x = \partial u$$

ist, auf der Stelle

$$\partial u = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \ldots.$$
$$= \{\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{4}\Delta^4 + \tfrac{1}{5}\Delta^5 - \ldots.\}u,$$

d. i., wenn man immer die bloß symbolische Statur solcher Ausdrücke gehörig festhält:

$$\partial u = \{l(1+\Delta)\}u.$$

Setzen wir nun allgemein $\partial^n u = p$, so ist $\partial^{n+1} u = \partial p$; folglich

$$\partial^{n+1} u = \{l(1+\Delta)\}p.$$

Man erhält also nach und nach leicht:

$$\partial u = \{l(1+\Delta)\}u = p$$
$$\partial^2 u = \{l(1+\Delta)\}p = \{l(1+\Delta)\}^2 u = p'$$
$$\partial^3 u = \{l(1+\Delta)\}p' = \{l(1+\Delta)\}^3 u = p''$$
$$\partial^4 u = \{l(1+\Delta)\}p'' = \{l(1+\Delta)\}^4 u = p'''$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. allgemein

$$\partial^n u = \{l(1+\Delta)\}^n u.$$

Ist nun u eine Function der veränderlichen Größen x, y, z, v, ..., so ist, wenn man die partiellen Differentiale wie in dem Artikel Differentialrechnung in diesen Zusätzen bezeichnet:

$$\partial_x^n u = \{l(1+\Delta_x)\}^n u,$$
$$\partial_y^n u = \{l(1+\Delta_y)\}^n u,$$
$$\partial_z^n u = \{l(1+\Delta_z)\}^n u,$$
$$\partial_v^n u = \{l(1+\Delta_v)\}^n u,$$

u. s. f. u. s. f.

Also für $n = 1$, wenn man zugleich auf beiden Seiten addirt:

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots = \{l[(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v)\ldots]\}u.$$

Aber bekanntlich

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots.,$$

und nach (4.)

$$\Delta u = \{(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v)\ldots. - 1\}u,$$
$$1 + \Delta = (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)(1+\Delta_v)\ldots.;$$

also für jede Function einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen:

$$\partial u = \{l(1+\Delta)\}u.$$

Zu den höhern Differentialen kann man wieder ganz eben so, wie vorher bei Functionen mit einer veränderlichen Größe übergehen, so daß also für jede Function einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen ganz allgemein

$$\partial^n u = \{l(1+\Delta)\}^n u$$

ist.

Man kann sagen, daß in diesen wenigen höchst eleganten symbolischen Ausdrücken, deren Erfindung man größtentheils dem berühmten Verfasser der **Mécanique céleste** und der **Théorie**

analytique des probabilités (s. letzteres Werk Livre I. Cap. I. II.) verdankt, der ganze directe Differenzen = Calcul enthalten ist, und wir wollen daher nun zu einigen ähnlichen Bemerkungen über die inverse Differenzen = Rechnung übergehen.

7. Die inverse Differenzenrechnung oder der endliche Integral = Calcul hat den Zweck, aus gegebenen Functionen, die als Differenzen andrer Functionen betrachtet werden, eben diese Functionen zu finden. Ist also u eine beliebige Function, so soll eine Function gefunden werden, deren Differenz = u ist. Diese Function heißt das endliche Integral von u und wird durch Σu bezeichnet. Man sieht, daß diese Definition für Functionen mit einer jeden Anzahl veränderlicher Größen gilt; wir werden uns jedoch im Folgenden, um nicht zu weitläufig zu werden, auf Functionen mit einer veränderlichen Größe einschränken. Man kann eine Function auch mehrere Mal nach einander integriren, welches zu vielfachen endlichen Integralen führt, die durch $\Sigma^n u$ bezeichnet werden. Wie aus diesen Definitionen unmittelbar folgt, ist immer $\Delta^n \Sigma^n u = u$. Auch ist umgekehrt, wie sogleich erhellet, immer $\Sigma^n \Delta^n u = u$. Nur ist hierbei die Bemerkung zu machen, daß u eigentlich bloß ein specieller Werth von $\Sigma^n \Delta^n u$ ist. Ist nämlich überhaupt U ein Werth von $\Sigma^n u$, d. h. eine Function, für welche $\Delta^n U = u$ ist, so ist, wenn C eine beliebige constante Größe bezeichnet, offenbar auch $\Delta^n (U + C) = u$, und man muß daher eigentlich allgemein

$$\Sigma^n u = U + C$$

setzen, so daß man nämlich zu jedem Werthe eines endlichen Integrals noch eine willkührliche constante Größe addirt, deren Werth in jedem einzelnen Falle aus den speciellen Bedingungen der Aufgabe besonders bestimmt werden muß.

Da bekanntlich, u, v, w, s, ... mögen positiv oder negativ seyn, immer

$$\Delta(u + v + w + s + \ldots.) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \Delta s + \ldots.$$

ist, so ist

$$\Sigma(\Delta u + \Delta v + \Delta w + \Delta s + \ldots.) = u + v + w + s + \ldots.,$$

d. i.

$$\Sigma(\Delta u + \Delta v + \Delta w + \Delta s + \ldots) = \Sigma\Delta u + \Sigma\Delta v + \Sigma\Delta w + \Sigma\Delta s + \ldots,$$

oder überhaupt

$$\Sigma(u' + v' + w' + s' + \ldots) = \Sigma u' + \Sigma v' + \Sigma w' + \Sigma s' + \ldots,$$

wo nun immer eigentlich noch eine willkührliche Constante addirt werden muß, wenn man völlige Allgemeinheit verlangt.

Ist a eine constante Größe, so ist bekanntlich immer $\Delta . au = a\Delta u$; also umgekehrt

$$\Sigma a\Delta u = \Sigma\Delta . au = au = a\Sigma\Delta u,$$

oder überhaupt

$$\Sigma au' = a\Sigma u' .$$

Für das Product XY setze man

$$\Sigma XY = Y\Sigma X + Z ,$$

und nehme auf beiden Seiten die Differenzen, so ist, weil offenbar

$$\begin{aligned} \Delta . pq &= (p + \Delta p)(q + \Delta q) - pq \\ &= p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \, \Delta q \end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned} XY &= Y\Delta\Sigma X + \Sigma X . \Delta Y + \Delta Y . \Delta\Sigma X + \Delta Z \\ &= XY + \Sigma X . \Delta Y + X\Delta Y + \Delta Z \\ &= XY + \Sigma X . \Delta Y + \Sigma\Delta X . \Delta Y + \Delta Z \\ &= XY + \Delta Y\Sigma(X + \Delta X) + \Delta Z . \end{aligned}$$

Folglich

$$\Delta Z = - \Delta Y\Sigma(X + \Delta X) ,$$

und demnach

$$\Sigma XY = Y\Sigma X - \Sigma\{\Delta Y\Sigma(X + \Delta X)\} .$$

Man kann diese Formel auch direct beweisen, wenn man von der Größe auf der rechten Seite die Differenz nimmt. Für diese Differenz erhält man nämlich

$$\begin{aligned} &\Delta(Y\Sigma X) - \Delta Y\Sigma(X + \Delta X) \\ &= Y\Delta\Sigma X + \Sigma X . \Delta Y + \Delta Y . \Delta\Sigma X - \Delta Y\Sigma(X + \Delta X) \\ &= XY + \Delta Y\Sigma(X + \Delta X) - \Delta Y\Sigma(X + \Delta X) = XY , \end{aligned}$$

wie es seyn muß. Man muß, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar erhellet, bei der Anwendung der gefundenen Formel $\Sigma\Delta X = X$ setzen, so daß man nämlich nicht allgemein $\Sigma\Delta X = X + C$ setzen darf, oder, was dasselbe ist, man muß C hierbei $= 0$ setzen.

8. Wir wollen nun das Bisherige durch einige Beispiele erläutern. Sey z. B.

$$u = x(x-h)(x-2h) \ldots (x-(n-1)h) ,$$

so ist, wenn man $\Delta x = h$ setzt:

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x+h)x(x-h) \ldots (x-(n-2)h) \\ &\quad - x(x-h)(x-2h) \ldots (x-(n-1)h) \\ &= nhx(x-h)(x-2h) \ldots (x-(n-2)h) ; \end{aligned}$$

folglich für $\Delta x = h$:

$$\Sigma x(x-h) \ldots (x-(n-2)h) = \frac{x(x-h)(x-2h) \ldots (x-(n-1)h)}{nh} ,$$

$$\Sigma x(x-h) \ldots (x-(n-1)h) = \frac{x(x-h)(x-2h) \ldots (x-nh)}{(n+1)h} .$$

Für

$$u = x(x+h)(x+2h) \ldots (x+(n-1)h)$$

und $\Delta x = h$ ist:

$$\begin{aligned}\Delta u = &\ (x+h)(x+2h)\ \dots\ (x+nh)\\ &- x(x+h)(x+2h)\ \dots\ (x+(n-1)h)\\ &= nh(x+h)(x+2h)\ \dots\ (x+(n-1)h)\ ;\end{aligned}$$

also

$$\Sigma(x+h)(x+2h)..(x+(n-1)h) = \frac{x(x+h)(x+2h)..(x+(n-1)h)}{nh},$$

$$\Sigma(x+h)(x+2h)..(x+nh) = \frac{x(x+h)(x+2h)..(x+nh)}{(n+1)h}.$$

Für

$$u = (x-h)x(x+h)(x+2h)\dots(x+(n-1)h)$$

und $\Delta x = h$ ist

$$\begin{aligned}\Delta u = &\ x(x+h)(x+2h)\ \dots\ (x+nh)\\ &-(x-h)x(x+h)\ \dots\ (x+(n-1)h)\\ &= (n+1)hx(x+h)(x+2h)\ \dots\ (x+(n-1)h)\ ;\end{aligned}$$

also

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)..(x+(n-1)h) = \frac{(x-h)x(x+h)..(x+(n-1)h)}{(n+1)h}.$$

Für

$$u = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)..(x+(n-1)h)}$$

und $\Delta x = h$ ist

$$\Delta u = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)} - \frac{1}{x(x+h)..(x+(n-1)h)}$$

$$= \frac{x-(x+nh)}{x(x+h)(x+2h)..(x+nh)} = \frac{-nh}{x(x+h)..(x+nh)};$$

also

$$\Sigma\frac{1}{x(x+h)\dots(x+nh)} = -\frac{1}{nhx(x+h)\dots(x+(n-1)h)},$$

$$\Sigma\frac{1}{x(x+h)..(x+(n-1)h)} = -\frac{1}{(n-1)hx(x+h)..(x+(n-2)h)}.$$

Andere Beispiele dieser Art, namentlich auch für Functionen, die durch Zerlegung in andere gebrochene Functionen integrirt werden können, s. m. im ersten Theile im Art. Differenzen-Rechnung.

Für $u = a^x$ ist

$$\Delta u = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1),$$

$$a^x = \frac{\Delta u}{a^{\Delta x}-1},\ \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}.$$

Für $u = \sin x$ ist

$$\Delta u = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x),$$

$$\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x) = \frac{\Delta\sin x}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x},\ \cos x = \frac{\Delta\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x};$$

also

$$\Sigma\cos x = \frac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Für u = cos x ist

$$\Delta u = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

$$\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = -\frac{\Delta \cos x}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}, \quad \sin x = -\frac{\Delta\cos(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x};$$

also

$$\Sigma \sin x = -\frac{\cos(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Allgemein ist

$$\Sigma \sin(p + qx) = -\frac{\cos(p + qx - \frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x},$$

$$\Sigma \cos(p + qx) = \frac{\sin(p + qx - \frac{1}{2}q\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}q\Delta x}.$$

9. Wenn man wieder der Kürze wegen $\Delta x = h$ setzt, und x' eine Function von x ist, deren erste Differenz die Größe h' ist, so lassen sich die Differenzen

$$\Delta\{(x-h)^p \cos(x' - \tfrac{1}{2}h')\}, \quad \Delta\{(x-h)^p \sin(x' - \tfrac{1}{2}h')\}$$

auf folgende Art entwickeln.

Man erhält nämlich, da x' in $x' + h'$ übergeht, wenn x in $x + h$ übergeht, leicht

$$\Delta\{(x-h)^p \cos(x' - \tfrac{1}{2}h')\} = x^p \cos(x' + \tfrac{1}{2}h') - (x-h)^p \cos(x' - \tfrac{1}{2}h'),$$

$$\Delta\{(x-h)^p \sin(x' - \tfrac{1}{2}h')\} = x^p \sin(x' + \tfrac{1}{2}h') - (x-h)^p \sin(x' - \tfrac{1}{2}h'),$$

und folglich, wenn man die Potenzen von $x - h$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt

$$\Delta\{(x-h)^p \cos(x' - \tfrac{1}{2}h')\} = x^p\{\cos(x' + \tfrac{1}{2}h') - \cos(x' - \tfrac{1}{2}h')\}$$

$$+ \left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - ..\right\}\cos(x' - \tfrac{1}{2}h')$$

$$\Delta\{(x-h)^p \sin(x' - \tfrac{1}{2}h')\} = x^p\{\sin(x' + \tfrac{1}{2}h') - \sin(x' - \tfrac{1}{2}h')\}$$

$$+ \left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - ..\right\}\sin(x' - \tfrac{1}{2}h')$$

Aber nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos(x' + \tfrac{1}{2}h') - \cos(x' - \tfrac{1}{2}h') = -2\sin x' \sin\tfrac{1}{2}h',$$

$$\sin(x' + \tfrac{1}{2}h') - \sin(x' - \tfrac{1}{2}h') = 2\cos x' \sin\tfrac{1}{2}h';$$

folglich

$$\Delta\{(x-h)^p \cos(x' - \tfrac{1}{2}h')\} = -2x^p \sin x' \sin\tfrac{1}{2}h'$$

$$+ \left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - ..\right\}\cos(x' - \tfrac{1}{2}h')$$

$$\Delta\{(x-h)^p \sin(x' - \tfrac{1}{2}h')\} = 2x^p \cos x' \sin\tfrac{1}{2}h'$$

$$+ \left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - ..\right\}\sin(x' - \tfrac{1}{2}h')$$

und daher, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$\Sigma x^p \sin x' = -\frac{(x-h)^p \cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'}$$
$$+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h'}\left\{\begin{array}{l}\frac{p}{1}h\Sigma x^{p-1}\cos(x'-\frac{1}{2}h') \\ -\frac{p(p-1)}{1.2}h^2\Sigma x^{p-2}\cos(x'-\frac{1}{2}h') \\ +\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{p-3}\cos(x'-\frac{1}{2}h') \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$
$$+\text{Const},$$

$$\Sigma x^p \cos x' = \frac{(x-h)^p \sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'}$$
$$-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h'}\left\{\begin{array}{l}\frac{p}{1}h\Sigma x^{p-1}\sin(x'-\frac{1}{2}h') \\ -\frac{p(p-1)}{1.2}h^2\Sigma x^{p-2}\sin(x'-\frac{1}{2}h') \\ +\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{p-3}\sin(x'-\frac{1}{2}h') \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$
$$+\text{Const}.$$

Für $p=1$ wird

$$\Sigma x \sin x' = -\frac{(x-h)\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h'}\Sigma\cos(x'-\frac{1}{2}h'),$$
$$\Sigma x \cos x' = \frac{(x-h)\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} - \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h'}\Sigma\sin(x'-\frac{1}{2}h')$$

d. i. nach (8.)

$$\Sigma x \sin x' = -\frac{(x-h)\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h\sin(x'-h')}{(2\sin\frac{1}{2}h')^2},$$
$$\Sigma x \cos x' = \frac{(x-h)\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h\cos(x'-h')}{(2\sin\frac{1}{2}h')^2},$$

wo nun immer noch eine willkührliche Constans beigefügt werden muß. Hieraus ergiebt sich mittelst der obigen allgemeinen Formeln nach und nach $\Sigma x^2 \cos x'$; $\Sigma x^2 \sin x'$; $\Sigma x^3 \sin x'$, $\Sigma x^3 \cos x'$; $\Sigma x^4 \cos x'$, $\Sigma x^4 \sin x'$, u. s. w.

10. Mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes überzeugt man sich leicht, daß

$$\Delta^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}h^n + \alpha\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1}}h^{n+1} + \beta\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+2}}h^{n+2} + \ldots.$$

ist, wo α, β, γ, ... gewisse numerische Coefficienten sind, auf deren besondere Werthe es jetzt weiter nicht ankommt. Folglich ist

$$z = h^n\Sigma^n\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \alpha h^{n+1}\Sigma^n\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1}} + \beta h^{n+2}\Sigma^n\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+2}} + \ldots,$$

oder, wenn man

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = u,\ z = \int^n u\partial x^n$$

setzt:

$$\int^n u\partial x^n = h^n \Sigma^n u + \alpha h^{n+1}\Sigma^n \frac{\partial u}{\partial x} + \beta h^{n+2}\Sigma^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots,$$

$$\Sigma^n u = \frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n - \alpha h \Sigma^n \frac{\partial u}{\partial x} - \beta h^2 \Sigma^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ldots,$$

und ganz auf ähnliche Art:

$$\Sigma^n \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h^n}\int^{n-1} u\partial x^{n-1} - \alpha h \Sigma^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta h^2 \Sigma^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \ldots,$$

$$\Sigma^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^n}\int^{n-2} u\partial x^{n-2} - \alpha h \Sigma^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \beta h^2 \Sigma^n \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \ldots,$$

$$\Sigma^n \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{h^n}\int^{n-3} u\partial x^{n-3} - \alpha h \Sigma^n \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta h^2 \Sigma^n \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

so daß man also durch successive Substitution nach dem Obigen für $\Sigma^n u$ offenbar eine Reihe von folgender Form erhält:

$$\Sigma^n u = \frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n + \frac{A}{h^{n-1}}\int^{n-1} u\partial x^{n-1} + \ldots + \frac{M}{h}\int u\partial x$$

$$+ Nu + Ph\frac{\partial u}{\partial x} + Qh^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Rh^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots.$$

Für $u = e^x$ ist $\partial^n u = e^x \partial x^n = u\partial x^n$, $\int^n u\partial x^n = u = e^x$. Auch ist

$$\Delta e^x = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1),$$

$$e^x = \frac{\Delta e^x}{e^h - 1},\quad \Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1},\quad \Sigma^n e^x = \frac{e^x}{(e^h - 1)^n}.$$

Folglich nach der vorhergehenden allgemeinen Formel

$$(e^h - 1)^{-n} = \frac{1}{h^n} + \frac{A}{h^{n-1}} + \frac{B}{h^{n-2}} + \ldots + \frac{M}{h}$$

$$+ N + Ph + Qh^2 + Rh^3 + \ldots,$$

und also auch

$$\left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^{-n} u = \frac{1}{h^n}\cdot\frac{\partial^{-n} u}{\partial x^{-n}} + \frac{A}{h^{n-1}}\cdot\frac{\partial^{-(n-1)} u}{\partial x^{-(n-1)}} + \ldots + \frac{M}{h}\cdot\frac{\partial^{-1} u}{\partial x^{-1}}$$

$$+ Nu + Ph\frac{\partial u}{\partial x} + Qh^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Rh^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots.$$

Folglich kann man allgemein

$$\Sigma^n u = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^{-n} u$$

setzen, unter der Bedingung, daß man überhaupt

$$\frac{\partial^{-p}u}{\partial x^{-p}} \text{ in } \int^p u\partial x^p$$

verwandelt, bei positiven Exponenten aber überall die Differentialquotienten beibehält. Diese Formel ist um so merkwürdiger, weil sie in ihrer Form der in (5.) bewiesene Formel

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^n u$$

ganz ähnlich ist. So wie letztere Formel in (5.) könnte man auch die erstere auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen erweitern.

Ferner ergiebt sich aus dem Obigen

$$\frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n = \Sigma^n u - \frac{A}{h^{n-1}}\int^{n-1} u\partial x^{n-1} - \ldots - \frac{M}{h}\int u\partial x$$
$$- Nu - Ph\frac{\partial u}{\partial x} - Qh^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Rh^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \ldots.$$

und ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für

$$\frac{1}{h^{n-1}}\int^{n-1} u\partial x^{n-1},\ \frac{1}{h^{n-2}}\int^{n-2} u\partial x^{n-2},\ \ldots \frac{1}{h}\int u\partial x\ .$$

Auch ist nach (6.)

$$h\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\Delta u + \beta\Delta^2 u + \gamma\Delta^3 u + \delta\Delta^4 u + \ldots,$$
$$h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha'\Delta^2 u + \beta'\Delta^3 u + \gamma'\Delta^4 u + \delta'\Delta^5 u + \ldots,$$
$$h^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \alpha''\Delta^3 u + \beta''\Delta^4 u + \gamma''\Delta^5 u + \delta''\Delta^6 u + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

wo es auf die besondern Werthe der numerischen Coefficienten jetzt weiter nicht ankommt. Nach gehöriger Substitution ergiebt sich nun für $\frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n$ offenbar ein Ausdruck von folgender Form:

$$\frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n = \Sigma^n u + A'\Sigma^{n-1}u + \ldots + M'\Sigma u$$
$$+ N'u + P'\Delta u + Q'\Delta^2 u + R'\Delta^3 u + \ldots$$

Setzt man jetzt wieder $u = e^x$, so wird, weil

$$\Delta^n e^x = e^x(e^h - 1)^n$$

ist, auf ganz ähnliche Art wir vorher:

$$\frac{1}{h^n} = \frac{1}{(e^h-1)^n} + \frac{A'}{(e^h-1)^{n-1}} + \ldots + \frac{M'}{e^h-1}$$
$$+ N' + P'(e^h-1) + Q'(e^h-1)^2 + R'(e^h-1)^3 + \ldots.$$

Da nun $h = le^h = l\,(1 + e^h - 1)$ ist, so ist

$$\frac{1}{h^n} = \{l(1+e^h-1)\}^{-n} = \{l(1+\Delta)\}^{-n},$$

für $e^h - 1 = \Delta$. Dies mit der obigen Entwickelung von $\frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n$ verglichen, giebt auf der Stelle

$$\frac{1}{h^n}\int^n u\partial x^n = \{l(1+\Delta)\}^{-n} u,$$

mit der Bedingung, daß allgemein $\Delta^{-p} = \Sigma^p$ gesetzt, Δ^p aber ungeändert gelassen wird. Die nahe Uebereinstimmung dieser Formel mit der in (6.) bewiesenen Formel

$$\partial^n u = \{l(1+\Delta)\}^n u,$$

oder, was dasselbe ist:

$$h^n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \{l(1+\Delta)\}^n u,$$

fällt sogleich in die Augen.

11. Für $n = 1$ ist nach (10.)

$$\Sigma u = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^{-1} u.$$

Bezeichnen nun

$$\overset{1}{B}, \overset{3}{B}, \overset{5}{B}, \overset{7}{B}, \overset{9}{B}, \ldots.$$

die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte, u. s. w. Bernoullische Zahl, so ist, wie im Art. Bernoullische Zahlen (9.) i. d. Z. ausführlich gezeigt worden ist,

$$\frac{h}{e^h-1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}h^2 - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}h^4 + \frac{\overset{5}{B}}{1..6}h^6 - \ldots,$$

$$(e^h-1)^{-1} = h^{-1} - \tfrac{1}{2} + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}h - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}h^3 + \frac{\overset{5}{B}}{1..6}h^5 - \ldots;$$

also auch

$$\left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^{-1} u =$$

$$\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial^{-1}u}{\partial x^{-1}} - \tfrac{1}{2}u + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}h\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}h^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{1..6}h^5\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \ldots.$$

oder nach der in (10.) festgestellten Bedingung:

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\partial x - \tfrac{1}{2}u + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}h - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}h^3$$

$$+ \frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}h^5 - \frac{\overset{7}{B}}{1..8}\cdot\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}h^7 + \ldots,$$

ein nach einem ganz bestimmten leicht zu übersehenden Gesetze fortschreitender sehr allgemeiner Ausdruck.

12. Mit der Summirung der Reihen stehen die endlichen Integrale in einem genauen Zusammenhange. Ist nämlich $u=\varphi(x)$ jetzt das allgemeine Glied einer Reihe, für welche wir die Summe der x ersten Glieder durch $S_x = Su$ bezeichnen wollen; so ist

$$S_x = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(x-1) + \varphi(x),$$

$$S_{x-1} = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(x-1);$$

also

$$S_x - S_{x-1} = \varphi(x) = u.$$

Folglich, wenn wir $S_{x-1} = f(x)$ setzen, für $\Delta x = h = 1$:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = S_x - S_{x-1},$$

d. i. $\Delta f(x) = u$, und daher umgekehrt

$$f(x) = S_{x-1} = \Sigma u,$$

immer $h=1$ gesetzt. Aber

$$S_x = Su = S_{x-1} + u.$$

Daher

$$Su = \Sigma u + u + \text{Const},$$

wo Const so zu bestimmen ist, daß $Su = 0$ für $x = 0$. Nach (11.) erhalten wir also sogleich die folgende sehr allgemeine Summationsformel für Reihen mit einer endlichen bestimmten Anzahl von Gliedern:

$$Su = \int u\partial x + \tfrac{1}{2}u + \frac{\overset{1}{B}}{1.2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\overset{3}{B}}{1..4}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\overset{5}{B}}{1..6}\cdot\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \frac{\overset{7}{B}}{1..8}\cdot\frac{\partial^7 u}{\partial x^7} - \ldots,$$

wo immer noch eine auf die oben angegebene Art zu bestimmende Constante beigefügt werden muß.

Für die Reihe der nten Potenzen der natürlichen Zahlen ist $u = x^n$, $\int u\partial x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$; also

$$\begin{aligned} Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n &+ \frac{\overset{1}{B}}{2}\cdot\frac{n}{1}x^{n-1} \\ &- \frac{\overset{3}{B}}{4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3} \\ &+ \frac{\overset{5}{B}}{6}\cdot\frac{n(n-1)..(n-4)}{1.2.3.4.5}x^{n-5} \\ &- \frac{\overset{7}{B}}{8}\cdot\frac{n(n-1)..(n-6)}{1.2.3..7}x^{n-7} \\ &+ \frac{\overset{9}{B}}{10}\cdot\frac{n(n-1)..(n-8)}{1.2.3..9}x^{n-9} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \text{Const}, \end{aligned}$$

oder nach einer bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten (s. diesen Art. i. d. Z.)

$$Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \tfrac{1}{2}\overset{1}{B}\,{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^{n-1}$$
$$- \tfrac{1}{4}\overset{3}{B}\,{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^{n-3}$$
$$+ \tfrac{1}{6}\overset{5}{B}\,{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}x^{n-5}$$
$$- \tfrac{1}{8}\overset{7}{B}\,{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}x^{n-7}$$
$$+ \tfrac{1}{10}\overset{9}{B}\,{}^{n}\overset{9}{\mathfrak{B}}x^{n-9}$$
$$- \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \text{Const} .$$

Für $n = 4$ ergiebt sich hieraus z. B.

$$Sx^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + 2\overset{1}{B}x^3 - \overset{3}{B}x ,$$

da hier die beizufügende Constante offenbar $= 0$ ist. Setzt man für die Bernoullischen Zahlen ihre Werthe (Thl. I. S. 254.), so wird

$$Sx^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x .$$

Für $n = 5$ giebt die allgemeine Formel:

$$Sx^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{2}\overset{1}{B}x^4 - \tfrac{5}{2}\overset{3}{B}x^2 + \tfrac{1}{6}\overset{5}{B} + \text{Const} ,$$

so daß man also in diesem Falle $\text{Const} = -\tfrac{1}{6}\overset{5}{B}$ setzen muß. Führt man also die Bernoullischen Zahlen ein, so wird

$$Sx^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2 .$$

Ueber die Integration der Differenzen-Gleichungen s. m. den Artikel Integration der Differenzen- und Differential-Gleichungen i. d. Z.

Den vollständigsten Lehrbegriff der directen und inversen Differenzen-Rechnung hat Lacroix im dritten Theile seines Traité du calcul différentiel et du calcul intégral geliefert, der auch den Titel führt: Traité des différences et des séries (Seconde édition Paris. 1819.). Auch s. m. Schweins Theorie der Differenzen und Differentiale. Heidelberg. 1825, und L. Oettinger Differenzial- und Differenzen-Calcul. Mainz. 1831.

Differentialrechnung. Dieser Artikel ist bestimmt, nach den neuesten Ansichten eine Darstellung der Principien des Differentialcalculs im Zusammenhange zu liefern, und dient daher überhaupt den Artikeln Differentiale, Differentialrechnung, Differentialformeln, Differentialgleichung und Differentio-Differentialrechnung im ersten Theile dieses Wörterbuchs zur Ergänzung.

I. Von den Functionen überhaupt und von den Differentialen der entwickelten Functionen mit einer veränderlichen Größe.

1. Man unterscheidet in der Differentialrechnung, so wie in der Analysis überhaupt, zwei Arten von Größen. Betrachtet man nämlich eine Größe aus einem solchen Gesichtspunkte, daß man derselben jeden beliebigen Werth beilegen kann, oder nimmt man sich, wenn bloß von reellen Werthen die Rede ist, vor, diese Größe alle positiven und negativen Werthe von Null an stetig durchlaufen zu lassen, so wird dieselbe eine veränderliche oder variable Größe genannt, und meistens durch einen der letztern Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, etwa durch x, y, z, v, w, ..., bezeichnet. Alle Größen dagegen, welche, wie auch die unveränderlichen Größen, mit denen sie in Verbindung stehen, sich ändern mögen, immer denselben Werth behalten, heißen beständige oder constante Größen, und werden gewöhnlich durch die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet. Denken wir uns nun beliebige veränderliche und constante Größen durch beliebige algebraische oder transcendente Operationen unter einander verbunden, so entsteht ein analytischer Ausdruck, dessen Werth offenbar durch die verschiedenen Werthe, welche man den von ihm involvirten veränderlichen Größen beilegen kann, bestimmt wird, der also, wie man sich auszudrücken pflegt, von den in ihm enthaltenen veränderlichen Größen abhängig, und daher offenbar selbst eine veränderliche Größe ist. Dies hat auf den für die ganze Analysis überaus wichtigen Unterschied zwischen unabhängigen und abhängigen veränderlichen Größen geführt. Den erstern kann nämlich auf völlig primitive Weise jeder beliebige Werth beigelegt werden, die letztern dagegen entstehen, wie wir schon gesehen haben, wenn beliebig viele der erstern unter einander und mit beliebigen constanten Größen durch beliebige algebraische oder transcendente Operationen verbunden werden, und heißen auch Functionen der erstern, so daß also im allgemeinsten Sinne eine Function einer oder mehrerer unabhängigen veränderlichen Größen jede von denselben auf beliebige Art abhängige Größe ist, woraus auch zugleich erhellen wird, was man unter Functionen einer und mehrerer veränderlichen Größen versteht. Sind die veränderlichen und constanten Größen bloß durch algebraische Operationen unter einander verbunden, so heißt die Function eine algebraische, in allen andern Fällen eine transcendente Function. Endlich unterscheidet man auch noch gesonderte oder entwickelte und ungesonderte oder unentwickelte Functionen (Functiones explicitae et implicitae), jenachdem die Function durch

ihre veränderlichen Größen mittelst eines entwickelten analytischen Ausdrucks oder bloß mittelst einer Gleichung zwischen ihr und den veränderlichen Größen gegeben ist. Hat man z. B. zwischen x und y die Gleichung

$$y^6 = axy^3 + bx^5,$$

so ist y offenbar von x abhängig, also eine Function von x, aber, so lange die Gleichung unaufgelöst bleibt, eine ungesonderte oder unentwickelte Function von x. Beliebige gesonderte Functionen von x, y, z, ... werden, so lange es nicht auf ihre besondere Natur ankommt, durch

$$f(x, y, z, \ldots),\ F(x, y, z, \ldots),\ \varphi(x, y, z, \ldots),\ \psi(x, y, z, \ldots), \ldots$$

bezeichnet. Gleichungen zwischen x, y, z, ... können im Allgemeinen durch

$$f(x, y, z, \ldots) = 0,\ F(x, y, z, \ldots) = 0,\ \varphi(x, y, z, \ldots) = 0,\ \psi(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots$$

dargestellt werden.

2. Zunächst wollen wir jetzt annehmen, daß überhaupt $y = f(x)$ eine Function der einen veränderlichen Größe x sey, so wird, wenn der Werth von x eine beliebige Aenderung, die durch Δx bezeichnet werden mag, erleidet, auch der Werth von y eine gewisse entsprechende Aenderung Δy erleiden, und man wird überhaupt die beiden Gleichungen

$$y = f(x),\ y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

haben, aus denen auf der Stelle

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

folgt. Für $\Delta x = 0$ ist auch $\Delta y = 0$. Läßt man nun Δx von $\Delta x = 0$ bis $\Delta x = i$ alle Grade der Größe stetig durchlaufen, d. h. von $\Delta x = 0$ bis $\Delta x = i$ sich immer nach und nach um unendlich kleine Incremente verändern, so sagt man, wenn dasselbe auch bei den entsprechenden Werthen von Δy Statt findet, daß die Function y zwischen den Gränzen x und $x + i$ stetig sey. Ueberhaupt heißt die Function y zwischen den beliebigen Gränzen $x = \alpha$ und $x = \gamma$ stetig, wenn ihre Werthe, indem man x alle Grade der Größe von $x = \alpha$ bis $x = \gamma$ stetig durchlaufen, d. h. von $x = \alpha$ bis $x = \gamma$ sich immer nach und nach bloß um unendlich kleine Größen verändern läßt, alle Grade der Größe von $f(\alpha)$ bis $f(\gamma)$ stetig durchlaufen. Auch sagt man, daß die Function $y = f(x)$ in der Nähe eines gewissen Werthes $x = \beta$ ihrer veränderlichen Größe stetig sey, wenn sich zwei einander auch noch so nahe kommende Gränzen angeben lassen, zwischen denen der in Rede stehende Werth der veränderlichen Größe liegt, und zwischen denen die Function stetig ist. Ist also die Function z. B. zwischen den Gränzen $x = \alpha$, $x = \gamma$ stetig, und β zwischen diesen Gränzen enthalten, d. h. $\beta > \alpha$, $\beta < \gamma$,

wenn α die kleinere Gränze bezeichnet, so sagt man, daß die Function in der Nähe von $x = \beta$ stetig sey, wie nahe auch die Gränzen $x = \alpha$, $x = \gamma$ einander selbst kommen mögen, oder wie klein die Differenz $\gamma - \alpha$ seyn mag. Ist die Function $y = f(x)$ in der Nähe eines gewissen Werths $x = \beta$ ihrer veränderlichen Größe nach der vorher gegebenen Definition nicht stetig, so sagt man, daß für diesen Werth der veränderlichen Größe eine Unterbrechung der Stetigkeit (solution de continuité) der gegebenen Function Statt finde. So findet z. B. bei der bekannten einfachen goniometrischen Function tang x für $x = \pm \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt, weil für diese Werthe von x bekanntlich tang x unendlich wird.

3. Sehr wichtig für die Differentialrechnung ist die nähere Betrachtung des Verhältnisses

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

der Incremente oder Differenzen Δx und Δy, indem diese Betrachtung, wie wir sogleich sehen werden, zu dem Grundbegriffe der ganzen Wissenschaft führt. Stellt man sich nämlich vor, daß das Increment Δx sich der Null nähert, so kann dieses Verhältniß selbst, wie leicht an einzelnen Beispielen gezeigt werden kann, sich einer andern bestimmten Gränze nähern, und es ist klar, daß diese Gränze jederzeit im Allgemeinen wieder eine Function von x seyn wird, deren besondere Natur von der speciellen Natur der gegebenen Function y abhängig ist. Man nennt daher in Bezug auf y als primitive Function diese Gränze, wenn es eine solche giebt, welcher sich also das Verhältniß der Differenzen Δx und Δy nähert, indem Δx sich der Null nähert, die derivirte Function von y, auch wohl, aus Gründen, die erst späterhin deutlich vor Augen gelegt werden können, die erste derivirte Function von y, und bezeichnet dieselbe in Bezug auf $y = f(x)$ durch y' oder $f'(x)$. Dieser Begriff der derivirten Functionen ist als der Grundbegriff der ganzen Differentialrechnung anzusehen.

4. Theils um überhaupt die Möglichkeit der derivirten Functionen nach der so eben gegebenen allgemeinen Definition zu zeigen, theils der großen Wichtigkeit für alle Anwendungen der Differentialrechnung wegen, wollen wir jetzt die derivirten Functionen der in der Analysis vorkommenden einfachen Functionen wirklich zu entwickeln suchen, nachdem wir noch die folgende allgemeine ebenfalls in vieler Beziehung für das Folgende wichtige Bemerkung vorausgeschickt haben. Es tritt nämlich nicht selten der Fall ein, daß man eine Function $z = F(y)$ einer veränderlichen Größe y hat, welche selbst wieder eine von einer andern veränderlichen Größe x abhängige veränderliche Größe ist, so daß also, wenn wir $y = f(x)$ setzen, überhaupt

$$z = F(f(x))$$

ist. Sollte man nun in einem solchen Falle die derivirte Function von z entwickeln, so würde man, wie gewöhnlich, die Gränze suchen, welcher das Verhältniß

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(f(x+\Delta x)) - F(f(x))}{\Delta x}$$

sich nähert, indem sich Δx der Null nähert. Weil aber

$$F(f(x)) = F(y); \; F(f(x+\Delta x)) = F(y+\Delta y)$$

ist, so ist

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Läßt man nun Δx sich der Null nähern, so wird offenbar auch der Werth von Δy sich der Null nähern, und man wird also nach dem Vorhergehenden offenbar die Gränze finden, welcher $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ sich nähert, indem Δx sich der Null nähert, wenn man die Gränzen sucht, welchen die Verhältnisse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ und } \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}$$

sich nähern, indem respective Δx und Δy sich der Null nähern, und sodann diese beiden Gränzen in einander multiplicirt. Diese beiden Gränzen sind aber nach der vorher eingeführten Bezeichnung respective $f'(x)$ und $F'(y)$. Also ist

$$z' = f'(x) . F'(y).$$

Ist demnach $z = F(y) = F(f(x))$, so erhält man die derivirte Function von z in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe, wenn man die derivirten Functionen von $f(x)$ und $F(y)$ in Bezug auf x und y als unabhängige veränderliche Größen in einander multiplicirt.

Wenn $y = f(x)$ eine Function von x ist, so ist natürlich auch umgekehrt x eine Function von y, und man kann also $x = F(y)$ setzen, so daß also

$$x = F(f(x)),$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$x' = f'(x) . F'(y)$$

ist, wo x' in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe genommen werden muß. Daher ist augenscheinlich $x' = 1$, weil nämlich, wenn man x als Function von x betrachtet,

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = \Delta x, \; \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

ist. Folglich ist immer

$$1 = f'(x) . F'(y),$$

oder

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \; f'(x) = \frac{1}{F'(y)}.$$

Auch der in diesen Formeln enthaltene, leicht in Worten auszusprechende Satz ist für das Folgende in mehrfacher Beziehung von großer Wichtigkeit.

5. Sey nun zunächst $y = x^n$, wo n eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl seyn kann. Um indeß die derivirte Function y' zu finden, müssen wir folgende einzelne Fälle unterscheiden.

Ist nämlich zuerst n eine positive ganze Zahl, so ist nach dem Binomialtheorem für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten, welches hier füglich als aus den ersten Elementen der allgemeinen Arithmetik bekannt vorausgesetzt werden kann,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$
$$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n .$$

Folglich

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n ,$$

und demnach

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1} ,$$

eine Reihe, welche jederzeit aus einer endlichen bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, so daß also, wie augenblicklich erhellet, wenn Δx sich der Null nähert, das Verhältniß der Differenzen sich der Größe nx^{n-1} als seiner Gränze fortwährend nähern wird, folglich die gesuchte derivirte Function

$$y' = nx^{n-1}$$

ist.

Ist ferner der Exponent der Potenz eine negative ganze Zahl $-n$, also

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} ,$$

so ist

$$\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^n} - \frac{1}{x^n} = - \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{x^n (x + \Delta x)^n} ,$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{1}{x^n (x + \Delta x)^n} \cdot \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} .$$

Nähert sich nun Δx der Null, so nähert sich der Bruch oder das Verhältniß

$$\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} ,$$

da n eine positive ganze Zahl ist, nach dem Vorhergehenden der Gränze nx^{n-1}. Die Potenz $(x + \Delta x)^n$ nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar der Größe x^n, das Product

$x^n(x+\Delta x)^n$ also augenscheinlich der Größe $x^n.x^n = x^{2n}$. Nähert sich also Δx der Null, so nähert sich nach dem Vorhergehenden das Verhältniß der Differenzen offenbar der Gränze

$$-\frac{1}{x^{2n}}.nx^{n-1} = -nx^{-n-1},$$

und es ist folglich die gesuchte derivirte Function

$$y' = -nx^{-n-1}.$$

Ist endlich der Exponent der gegebenen Potenz von x der positive oder negative Bruch $\frac{m}{n}$, also

$$y = x^{\frac{m}{n}},$$

so ist $y^n = x^m$. Setzen wir nun

$$z = y^n = F(y),\ y = f(x);$$

so ist nach (4.)

$$z' = f'(x).F'(y),$$

wo die derivirte Function z' in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe genommen ist.

Da nun nach dem Vorhergehenden $y^n = x^m$ und m eine ganze Zahl ist, so ist

$$z = x^m,\ z' = mx^{m-1},$$

m mag positiv oder negativ seyn. Ferner ist aber $F(y) = y^n$, und auch n eine ganze Zahl; folglich wieder nach den beiden vorher brtrachteten Fällen

$$F'(y) = ny^{n-1}.$$

Nach gehöriger Substitution in die Gleichung

$$z' = f'(x).F'(y)$$

ergiebt sich hieraus

$$mx^{m-1} = ny^{n-1}.f'(x);$$

also, weil

$$y = x^{\frac{m}{n}},\ y^{n-1} = x^{m-\frac{m}{n}}$$

ist:

$$f'(x) = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

d. i., weil $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ ist:

$$y' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

so daß also, für $y = x^n$, der Exponent n mag eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl seyn, jederzeit

$$y' = nx^{n-1}$$

ist.

6. Um die derivirten Functionen der logarithmischen und Exponential-Functionen zu entwickeln, ist es nöthig, die folgenden Betrachtungen vorauszuschicken. Wenn wir die Summe der geometrischen Reihe

$$a, ax, ax^2, ax^3, \ldots ax^{n-1}$$

durch s_n bezeichnen, so ist bekanntlich

$$s_n = \frac{a - ax^n}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} - \frac{ax^n}{1 - x}.$$

Ist nun x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten, d. i.

$$x > -1, x < +1;$$

so nähert sich, wenn n wächst, der Bruch $\frac{ax^n}{1-x}$ offenbar immer mehr und mehr der Null, und kann derselben, wenn man nur n groß genug nimmt, beliebig nahe gebracht werden, woraus also mittelst des Obigen auch erhellet, daß, unter derselben Voraussetzung, wie vorher, in Bezug auf die Größe von x, wenn n wächst, die Summe s_n sich fortwährend der Gränze $\frac{a}{1-x}$ nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt.

Ist aber im Allgemeinen, wie in dem so eben betrachteten speciellen Falle, eine Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots$$

von solcher Beschaffenheit, daß, je mehr Glieder derselben vom Anfange an mit einander durch Addition vereinigt werden, die erhaltenen Summen sich einer gewissen bestimmten Größe, die durch s bezeichnet werden mag, fortwährend nähern und derselben beliebig nahe gebracht werden können; so sagt man, daß die in Rede stehende Reihe convergire oder convergent sey, und die Größe s heißt die Summe der Reihe. Im entgegengesetzten Falle divergirt die Reihe. Setzen wir also überhaupt

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_{n-1} = s_n,$$

so sagt man, daß die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots$$

convergire, wenn s_n, indem n wächst, sich einer gewissen bestimmten Größe s fortwährend nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt. Die Größe s heißt die Summe der Reihe, ein Verhalten, welches in abkürzender Bezeichnung gewöhnlich bloß durch

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots = s,$$

oder, wenn man noch das allgemeine Glied einführt, durch

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_{n-1} + \ldots = s$$

angedeutet wird. Divergirende Reihen haben keine Summen im eigentlichen Sinne des Worts. Nach dem Obigen ist also die geometrische Reihe

$$a, ax, ax^2, ax^3, ax^4, ax^5, \ldots$$

convergent, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegt, und ihre Summe ist $= \frac{a}{1-x}$. Ob die Reihe convergirt oder divergirt, wenn x nicht zwischen den angegebenen Gränzen enthalten ist, würde eine besondere Untersuchung erfordern, die jetzt nicht zu unserm Zwecke gehört.

7. Aus dem vorher aufgestellten Begriffe der Convergenz der Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots$$

ergiebt sich unmittelbar, daß, wenn wir wieder überhaupt

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} = s_n$$

setzen, die Summen

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, s_{n+4}, \ldots$$

einander immer näher und näher kommen, wenn n wächst, vorausgesetzt, daß die Reihe convergirt, so daß man also das Criterium der Convergenz, wie leicht erhellen wird, auch auf folgenden sehr bequemen analytischen Ausdruck bringen kann:

Die Reihe

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$$

convergirt, wenn für jedes beliebige bestimmte m die Differenz

$$s_{n+m} - s_n = t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+m-1}$$

beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt.

Aus diesem Princip folgt augenblicklich, daß, wenn man zwei beliebige Reihen mit lauter positiven Gliedern von solcher Beschaffenheit hat, daß von einem gewissen Gliede an kein Glied der zweiten Reihe das entsprechende Glied der ersten übersteigt, jederzeit die zweite Reihe convergirt, wenn die erste convergirt. Eben so leicht erhellet, daß, wenn eine Reihe mit lauter positiven Gliedern convergent ist, jederzeit auch die Reihe convergirt, welche man erhält, wenn man beliebige Glieder der erstern Reihe negativ nimmt.

Hat man z. B. die Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \ldots,$$

so erhellet aus der Vergleichung der Reihe

$$\frac{1}{1\ldots n}, \frac{1}{1\ldots n(n+1)}, \frac{1}{1\ldots n(n+1)(n+2)},$$
$$\frac{1}{1\ldots n(n+1)(n+2)(n+3)}, \ldots$$

mit der nach (6.) convergirenden geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1\ldots n}, \frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{1}{n}, \frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{1}{n^2}, \frac{1}{1\ldots n}\cdot\frac{1}{n^3}, \ldots$$

mittelst des Vorhergehenden auf der Stelle, daß auch die Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \ldots$$

convergirt, und es folglich eine Summe dieser Reihe, d. h. eine Gränze giebt, welcher man sich desto mehr nähert, je mehrere Glieder der Reihe vom Anfange an zu einander addirt werden. Diese Summe, welche für die ganze Analysis von großer Wichtigkeit ist, und mittelst der Reihe selbst näherungsweise bestimmt werden kann, soll im Folgenden immer durch e bezeichnet werden, so daß also

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

ist. Setzt man

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

so erhellet aus dem Vorhergehenden in Verbindung mit (6.), daß der Fehler, welchen man begeht, kleiner als

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{n-1}$$

ist. Für $n = 11$ z. B. ist

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots 10},$$

und der Fehler ist kleiner als

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{36288000},$$

beträgt also noch keine ganze Einheit der siebenten Decimalstelle oder noch nicht 0,0000001. Man kann also mittelst der obigen Reihe nicht bloß, wie schon erwähnt, überhaupt e näherungsweise berechnen, sondern es läßt sich auch immer die Größe des Fehlers beurtheilen, welchen man in jedem einzelnen Falle begeht, so daß also e als eine bekannte Größe zu betrachten ist. Bis auf die siebente Decimalstelle genau ist

$$e = 2{,}7182818 .$$

8. Von besonderer Wichtigkeit für das Folgende ist noch die nähere Betrachtung der Function

$$(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

weil sich, wie wir sogleich sehen werden, diese Function einer bestimmten Gränze nähert, wenn x sich der Null nähert. Diese Gränze zu finden ist jetzt unsere Aufgabe. Zuerst wollen wir annehmen, daß x ein positiver Bruch sey, dessen Zähler die Ein-

heit, der Nenner eine positive ganze Zahl ist, welcher sich also der Null fortwährend nähert, wenn der Nenner in's Unendliche wächst. Setzen wir also $x = \frac{1}{\alpha}$, so ist nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{\alpha^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(\alpha-1))}{1.2.3.4\ldots\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha^\alpha}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{1.2.3}\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3.4\ldots\alpha}\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha-1}{\alpha}\right).$$

Ist aber überhaupt für $\alpha > n-2$

$$S_{n,\alpha} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{1.2.3}\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{\alpha}\right),$$

so kann leicht gezeigt werden, daß sich $S_{n,\alpha}$ immer der Gränze e beliebig nahe bringen läßt, wenn man nur n und α groß genug annimmt. Setzt man nämlich

$$s_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

so kann man nach (7.) n immer so groß annehmen, daß s der Gränze e bis zu jedem beliebigen Grade genähert wird. Ist aber n gefunden, so kann man offenbar, wenn nur nun ferner α groß genug angenommen wird, die Größe $S_{n,\alpha}$ der Größe s_n, also auch der Größe e, beliebig nahe bringen, wie behauptet wurde.

Nun ist aber offenbar $s_n < e$ und

$$S_{n,\alpha} < s_n,$$

also um so mehr $S_{n,\alpha} < e$. Da dies auch für $n = \alpha + 1$ gilt, so ist auch immer

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < e.$$

Ferner ist nach dem Obigen wegen der zu unserm Zwecke erforderlichen Annahme von n und α, indem man ja α bis zu jedem beliebigen Grade größer als n werden lassen kann, wie sogleich in die Augen fallen wird, immer

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} > S_{n,\alpha},$$

folglich

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} > S_{n,\alpha}, \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < e,$$

so daß also $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ zwischen $S_{n,\alpha}$ und e enthalten ist, und demnach der Größe e offenbar näher kommt wie $S_{n,\alpha}$. Da nun nach dem Obigen, wenn man nur α groß genug nimmt, $S_{n,\alpha}$ dem e beliebig nahe gebracht werden kann, so kann unter derselben Voraussetzung $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ um so mehr dem e beliebig nahe gebracht werden, und e ist also die Gränze, welcher sich $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ nähert, wenn α wächst, oder die Gränze von $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, wenn x sich der Null nähert.

Ist ferner x kein positiver Bruch, dessen Zähler die Einheit, der Nenner eine positive ganze Zahl ist, sondern überhaupt nur eine positive Größe, so seyen m und $n = m + 1$ die zwei ganzen Zahlen, welche zunächst kleiner und größer als der Bruch $\frac{1}{x}$ sind. Dann ist

$$\frac{1}{x} = m + \mu = n - \nu,$$

wo μ und ν zwei positive ächte Brüche sind. Die Größe $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ist offenbar zwischen den beiden Größen

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}} = \left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{1+\frac{\mu}{m}}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{1-\frac{\nu}{n}}$$

enthalten. Läßt man nun x abnehmen, so werden m und n zunehmen, und

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \text{ und } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

werden sich also nach dem vorher Bewiesenen der Gränze e nähern. Weil ferner μ und ν ächte Brüche sind, so werden, wenn x abnimmt, d. i. m und n wachsen, sich offenbar $1+\frac{\mu}{m}$ und $1-\frac{\nu}{n}$ der Einheit, also augenscheinlich

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ und } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

beide sich der Größe e nähern. Da nun nach dem Vorhergehenden $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ zwischen den beiden letztern Größen enthalten ist, so wird offenbar auch diese Größe, wenn x abnimmt, sich der Größe e nähern.

Ist endlich x negativ, so kann man doch, da man den absoluten Werth von x abnehmen läßt, annehmen, daß derselbe

kleiner als die Einheit sey. Setzt man nun unter dieser Voraussetzung

$$1 + x = \frac{1}{1+z}, \; x = -\frac{z}{1+z},$$

so ist offenbar z positiv und nimmt ab, wenn der absolute Werth von x abnimmt. Aber

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{-\frac{1+z}{z}} = (1+z)^{\frac{1+z}{z}} = \{(1+z)^{\frac{1}{z}}\}^{1+z},$$

und z nimmt ab, wenn x sich der Null nähert. Nach dem Vorhergehenden nähert also $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ sich der Größe e, wenn x sich der Null nähert, und $1+z$ nähert sich unter derselben Voraussetzung der Einheit. Folglich nähert sich offenbar $\{(1+z)^{\frac{1}{z}}\}^{1+z}$ d. i. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, der Größe e, wenn x sich der Null nähert.

Für alle Formen von x nähert also die Function $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ sich der in (7.) bestimmten Größe e als ihrer Gränze, wenn x sich der Null nähert.

Von diesem wichtigen Satze läßt sich nun folgende Anwendung auf die Bestimmung der derivirten Functionen der logarithmischen und Exponential-Functionen machen.

9. Sey zuerst $y = \log x$, die Basis des logarithmischen Systems, worauf $\log x$ sich bezieht, $= a$ gesetzt; so ist

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x},$$

und folglich, wenn wir

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha, \; \Delta x = \alpha x$$

setzen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}.$$

Nähert nun Δx sich der Null, so nähert sich offenbar auch α der Gränze Null, folglich nach (8.) $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ der Gränze e, $\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ der Gränze $\log e$, also offenbar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Gränze $\frac{\log e}{x}$, und es ist folglich

$$y' = \frac{\log e}{x}.$$

Ist ferner $y = a^x$, so ist $x = \log y$, wo immer die Logarithmen sich auf die Basis a beziehen. Setzen wir nun $y = f(x)$, $x = F(y)$, so ist

$$f(x) = a^x,\ F(y) = \log y,\ x = F(f(x)),$$

und nach (4.)

$$x' = f'(x).F'(y).$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$F'(y) = \frac{\log e}{y},$$

und, weil nach (4.) die derivirte Function x' sich auf x als unabhängige veränderliche Größe bezieht, nach (5.)

$$x' = 1,$$

weil x, als Function von x betrachtet, als eine Potenz angesehen werden kann, deren Exponent die Einheit ist. Folglich ist

$$1 = f'(x).\frac{\log e}{y},\ f'(x) = \frac{y}{\log e};$$

d. i., wenn wir $y = a^x$ setzen:

$$y' = \frac{a^x}{\log e}.$$

Die Logarithmen, deren Basis die aus dem Obigen bekannte Zahl e ist, nennt man aus Gründen, die sich hier jetzt nicht weiter entwickeln lassen, hyperbolische oder natürliche Logarithmen. Bezeichnen wir nun, wie im Folgenden immer geschehen soll, diese Logarithmen bloß durch den Buchstaben l, so ist $le = 1$, und man kann sehr leicht zeigen, daß die Logarithmen jedes beliebigen Systems immer bloß durch hyperbolische Logarithmen ausgedrückt werden können. Ist nämlich N eine beliebige Zahl, so ist nach der allgemeinen Definition der Logarithmen, wenn immer die durch log bezeichneten Logarithmen sich auf die beliebige Basis a beziehen,

$$N = a^{\log N},\ N = e^{lN}.$$

Folglich

$$a^{\log N} = e^{lN},$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt, auf der Stelle

$$\log N . la = lN,\ \log N = \frac{lN}{la},$$

so daß also der Logarithmus der Zahl N für eine beliebige Basis erhalten wird, wenn man den hyperbolischen Logarithmus der Zahl N durch den hyperbolischen Logarithmus der Basis dividirt, oder mit dem reciproken hyperbolischen Logarithmus der Basis, d. i. mit dem Bruche $\frac{1}{la}$, multiplicirt. Der reciproke hyperbolische Logarithmus der Basis ist für jedes System eine

constante Größe und wird der **Modulus** des Systems genannt, so daß also, wenn wir

$$\frac{1}{la} = M$$

setzen, für jede Zahl N

$$\log N = MlN$$

ist, folglich die Logarithmen aller Zahlen in einem beliebigen Systeme erhalten werden, wenn man die entsprechenden hyperbolischen Logarithmen sämmtlich mit dem Modulus des Systems multiplicirt. Setzt man in vorstehender Gleichung $N = e$, so erhält man, weil $le = 1$ ist,

$$M = \log e \,,$$

welches ein zweiter Ausdruck für den Modulus ist. Es ist also auch immer $la . \log e = 1$.

Für $y = lx$ ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar

$$y' = \frac{1}{x} \,,$$

und eben so leicht, wenn $y = e^x$ ist,

$$y' = e^x \,,$$

zwei sehr einfache derivirte Functionen.

10. Ferner wollen wir nun auch zur Entwickelung der derivirten Functionen der Kreisfunctionen übergehen. Zuerst sey $y = \sin x$, so ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\Delta x \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \,, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \,.$$

Läßt man Δx sich der Null nähern, so kann man offenbar den absoluten Werth von Δx so klein nehmen, daß

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\sin \frac{1}{2}\Delta x} > \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} > \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\tang \frac{1}{2}\Delta x}$$

ist. Aber

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\sin \frac{1}{2}\Delta x} = 1 \,, \quad \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\tang \frac{1}{2}\Delta x} = \cos \tfrac{1}{2}\Delta x \,.$$

Folglich kann man sich Δx seinem absoluten Werthe nach immer so klein genommen denken, daß

$$1 > \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} > \cos \tfrac{1}{2}\Delta x \,.$$

Nähert sich aber Δx fortwährend der Null, so nähert sich $\cos \frac{1}{2}\Delta x$ fortwährend der Einheit, welches also natürlich auch von dem immer zwischen 1 und $\cos \frac{1}{2}\Delta x$ enthaltenen Bruche $\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$ gilt, so daß folglich die Gränze dieses Bruchs, wenn Δx

sich der Null nähert, die Einheit ist. Da nun die Gränze von $\cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)$, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar $\cos x$ ist, so ist $1.\cos x = \cos x$ die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn Δx sich der Null nähert, d. i.

$$y' = \cos x$$

Ist ferner $y = \cos x$, so ist

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

woraus man auf ganz ähnliche Art, wie vorher,

$$y' = -\sin x$$

findet.

Für $y = \operatorname{Arc}\sin x$ ist $x = \sin y$. Setzen wir nun

$$\operatorname{Arc}\sin x = f(x), \quad \sin y = F(y);$$

so ist

$$x = F(f(x)),$$

also nach (4.)

$$x' = f'(x).F'(y).$$

Aber nach dem Vorhergehenden und nach (5.)

$$F'(y) = \cos y, \quad x' = 1.$$

Folglich

$$1 = f'(x).\cos y, \quad f'(x) = y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Weil nun

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin y^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

ist, so ist

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Für $y = \operatorname{Arc}\cos x$ ist auf ähnliche Art $x = \cos y$. Setzen wir also

$$\operatorname{Arc}\cos x = f(x), \quad \cos y = F(y);$$

so ist

$$x = F(f(x)), \quad x' = f'(x).F'(y).$$

Aber nach dem Obigen

$$F'(y) = -\sin y, \quad x' = 1.$$

Folglich:

$$1 = -f'(x).\sin y, \quad f'(x) = y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Aber

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos y^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Also

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Für $y = \tang x$ ist:

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\cos x \cos(x+\Delta x)},$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+\Delta x)},$$

woraus sich auf der Stelle

$$y' = \frac{1}{\cos x^2}$$

ergiebt.

Für $y = \cot x$ ist auf ähnliche Art

$$\Delta y = \frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$= -\frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin x \sin(x+\Delta x)}.$$

Folglich, wie sogleich erhellet:

$$y' = -\frac{1}{\sin x^2}.$$

Für $y = \mathrm{Arc\,tang}\, x$ ist $x = \tang y$. Setzen wir also

$$\mathrm{Arc\,tang}\, x = f(x), \quad \tang y = F(y);$$

so ist

$$x = F(f(x)), \quad x' = f'(x) . F'(y).$$

Aber

$$F'(y) = \frac{1}{\cos y^2}, \quad x' = 1.$$

Also

$$1 = f'(x) . \frac{1}{\cos y^2}, \quad f'(x) = y' = \cos y^2.$$

Aber

$$\cos y^2 = \frac{\cos y^2}{\cos y^2 + \sin y^2} = \frac{1}{1 + \tang y^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Also

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Für $y = \mathrm{Arc\,cot}\, x$ ist $x = \cot y$. Setzen wir also jetzt

$$\mathrm{Arc\,cot}\, x = f(x), \quad \cot y = F(y),$$

so ist

$$x = F(f(x)), \quad x' = f'(x) . F'(y).$$

Aber

$$F'(y) = -\frac{1}{\sin y^2}, \; x' = 1.$$

Also

$$1 = -f'(x) \cdot \frac{1}{\sin y^2}, \; f'(x) = y' = -\sin y^2.$$

Aber

$$\sin y^2 = \frac{\sin y^2}{\sin y^2 + \cos y^2} = \frac{1}{1 + \cot y^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Folglich

$$y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Für $y = \sec x$ ist

$$\Delta y = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x + \Delta x)}{\cos x \cos(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x \sin(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\cos x \cos(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \frac{\sin(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\cos x \cos(x + \Delta x)}.$$

Läßt man nun Δx sich der Null nähern und nimmt die Gränzen, so ergiebt sich auf der Stelle:

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x^2} = \frac{\tang x}{\cos x}.$$

Für $y = \operatorname{cosec} x$ ist

$$\Delta y = \frac{1}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{1}{\sin x}$$

$$= -\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\sin x \sin(x + \Delta x)}$$

$$= -\frac{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \frac{\cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)};$$

folglich, wenn man zu den Gränzen übergeht:

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x^2} = -\frac{\cot x}{\sin x}.$$

Für $y = \operatorname{Arc} \sec x$ ist $x = \sec y$. Setzen wir also

$$\operatorname{Arc} \sec x = f(x), \; \sec y = F(y);$$

so ist

$$x = F(f(x)), \; x' = f'(x) \cdot F'(y).$$

Aber

$$x' = 1, \; F'(y) = \frac{\sin y}{\cos y^2}.$$

Folglich

$$1 = f'(x) \cdot \frac{\sin y}{\cos y^2}, \quad f'(x) = y' = \frac{\cos y^2}{\sin y}.$$

Aber

$$\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{x}, \ \sin y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Also

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Für $y = \text{Arc cosec}\, x$ ist $x = \text{cosec}\, y$. Setzen wir also

$$\text{Arc cosec}\, x = f(x), \quad \text{cosec}\, y = F(y);$$

so ist

$$x = F(f(x)), \ x' = f'(x) . F'(y).$$

Aber

$$x' = 1, \ F'(y) = -\frac{\cos y}{\sin y^2}.$$

Folglich

$$1 = -f'(x) \cdot \frac{\cos y}{\sin y^2}, \quad f'(x) = y' = -\frac{\sin y^2}{\cos y}.$$

Aber

$$\sin y = \frac{1}{\text{cosec}\, y} = \frac{1}{x}, \ \cos y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Folglich

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Für $y = \sin \text{vers}\, x$ ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin\text{vers}(x + \Delta x) - \sin\text{vers}\, x \\ &= \cos x - \cos(x + \Delta x) \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x), \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x);$$

also, wenn man die Gränzen nimmt:

$$y' = \sin x.$$

Für $y = \cos\text{vers}\, x$ ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \cos\text{vers}(x + \Delta x) - \cos\text{vers}\, x \\ &= \sin x - \sin(x + \Delta x) \\ &= -2 \sin \tfrac{1}{2}\Delta x \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x), \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x);$$

also

$$y' = -\cos x.$$

11. Sey nun wieder $y = z^n$, aber jetzt z keine unabhängige veränderliche Größe, sondern eine Function von x. Setzen wir also

$$z^n = F(z), \ z = f(x);$$

so ist

$$y = F(f(x)), \ y' = f'(x) . F'(z).$$

Aber

$$f'(x) = z' \text{ und } F'(z) = nz^{n-1} \quad (5.) .$$

Also

$$y' = nz^{n-1}z' .$$

Für $y = \log z$, wo immer z eine Function von x bezeichnen soll, sei

$$\log z = F(z), \quad z = f(x) ;$$

so ist wieder

$$y = F(f(x)), \quad y' = f'(x).F'(z) .$$

Aber

$$f'(x) = z' \text{ und } F'(z) = \frac{\log e}{z} \quad (9.) .$$

Also

$$y' = \frac{\log e}{z} z' .$$

Sind die Logarithmen natürliche, also $y = lz$, so ist

$$y' = \frac{z'}{z} .$$

Ist $y = a^z$, so sei wieder

$$a^z = F(z), \quad z = f(x) ;$$

also

$$y = F(f(x)), \quad y' = f'(x).F'(z) .$$

Aber

$$f'(x) = z' \text{ und } F'(z) = \frac{a^z}{\log e} \quad (9.) .$$

Folglich

$$y' = \frac{a^z}{\log e} z' .$$

Für $y = e^z$ ist:

$$y' = e^z z' .$$

Für $y = \sin z$ und $y = \cos z$ erhält man eben so leicht respective $y' = z' \cos z$ und $y' = - z' \sin z$. Auch wird aus diesen Beispielen hinreichend erhellen, wie man sich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat.

12. Wir wollen nun auch die derivirten Functionen der am häufigsten vorkommenden zusammengesetzten Functionen zu bestimmen suchen.

Ist zuerst $y = az$, wo a eine constante Größe, z eine Function von x bezeichnet; so ist offenbar

$$\Delta y = a\Delta z, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta z}{\Delta x} ;$$

folglich, wenn man die Gränzen nimmt:

$$y' = az' .$$

Ist

$$y = z + u + v + w + \ldots ,$$

so wird, wenn x in $x + \Delta x$ übergeht:

$$y + \Delta y = (z + \Delta z) + (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + \ldots,$$
$$\Delta y = \Delta z + \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots,$$

und folglich, wenn man zu den Gränzen übergeht, offenbar:

$$y' = z' + u' + v' + w' + \ldots$$

Hat man das Product $y = pq$, so wird, wenn x in $x + \Delta x$ übergeht:

$$y + \Delta y = (p + \Delta p)(q + \Delta q) = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\,\Delta q,$$
$$\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\,\Delta q,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p\frac{\Delta q}{\Delta x} + q\frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p\frac{\Delta q}{\Delta x}.$$

Nähert sich nun Δx der Gränze Null, so nähern sich $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ respective den Gränzen p' und q'. Da sich Δp der Gränze Null nähert, so nähert auch $\Delta p\frac{\Delta q}{\Delta x}$ sich offenbar der Gränze Null, und es ist also

$$y' = pq' + qp',$$

oder

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}.$$

Ist $y = pqr = zr$, wenn man $pq = z$ setzt, so ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} + \frac{r'}{r}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{z'}{z} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}.$$

Also

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}.$$

Ist $y = pqrst\ldots$, so erhält man auf ganz ähnliche Art:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} + \frac{r'}{r} + \frac{s'}{s} + \frac{t'}{t} + \ldots$$

Auch ist für $y = pqr$:

$$y' = qrp' + prq' + pqr',$$

und für $y = pqrs$:

$$y' = qrsp' + prsq' + pqsr' + pqrs'.$$

Wie diese Formeln weiter fortschreiten, fällt in die Augen. Uebrigens kann man zu denselben auch leicht auf folgende Art gelangen. Ist nämlich $y = pqrst\ldots$, so ist

$$ly = lp + lq + lr + ls + lt + \ldots;$$

folglich nach (11.), wenn man zu den derivirten Functionen übergeht:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} + \frac{r'}{r} + \frac{s'}{s} + \frac{t'}{t} + \ldots .$$

Die Art, wie man die derivirte Function eines Aggregats erhält, wird hierbei nach dem Obigen ebenfalls schon als bekannt vorausgesetzt.

Für $y = \frac{p}{q}$ ist

$$\Delta y = \frac{p + \Delta p}{q + \Delta q} - \frac{p}{q} = \frac{q\Delta p - p\Delta q}{q(q + \Delta q)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q\frac{\Delta p}{\Delta x} - p\frac{\Delta q}{\Delta x}}{q(q + \Delta q)};$$

folglich, wenn man zu den Gränzen übergeht, da Δq sich der Null nähert, wenn Δx sich der Null nähert:

$$y' = \frac{qp' - pq'}{q^2}.$$

Denselben Ausdruck erhält man auch leicht auf folgende Art. Es ist $p = qy$. Folglich nach dem Vorhergehenden

$$p' = qy' + yq'.$$

Also

$$y' = \frac{p' - yq'}{q}.$$

Setzt man nun $y = \frac{p}{q}$, so ergiebt sich auf der Stelle:

$$y' = \frac{qp' - pq'}{q^2},$$

wie vorher.

Auch ist $ly = lp - lq$. Folglich nach dem Vorhergehenden und nach (11.), wenn man die derivirten Functionen nimmt:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} - \frac{q'}{q},\ y' = \frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q^2} = \frac{qp' - pq'}{q^2},$$

welches wieder die vorher gefundene Formel ist.

Für $y = a + z + u + v + w + \ldots$, wo a eine constante Größe bezeichnet, ist

$$y + \Delta y = a + (z + \Delta z) + (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + \ldots ,$$

$$\Delta y = \Delta z + \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots ;$$

also, wenn man die Gränzen nimmt:

$$y' = z' + u' + v' + w' + \ldots .$$

Nach dem Obigen ist

$$y' = a' + z' + u' + v' + w' + \ldots ;$$

also

$$a' + z' + u' + v' + w' + \ldots = z' + u' + v' + w' + \ldots;$$

folglich $a' = 0$, d. i. die derivirte Function einer jeden constanten Größe ist $= 0$.

13. Eine imaginäre Function ist überhaupt eine Function von der Form

$$y = u + v\sqrt{-1},$$

wo u und v Functionen von x sind. Geht nun x in $x + \Delta x$ über, so wird

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)\sqrt{-1},$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.\sqrt{-1},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1}.$$

Sind nun u' und v' die Gränzen von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, wenn Δx sich der Null nähert; so versteht man unter der derivirten Function von y die Function $u' + v'\sqrt{-1}$, so daß also

$$y' = u' + v'\sqrt{-1}$$

ist. Alle vorher bewiesenen Sätze müssen eigentlich für imaginäre Functionen noch besonders bewiesen werden. Hier wird es indeß genügen, nur an einigen Beispielen zu zeigen, wie man sich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat.

Sey z. B. $y = z^n$ und

$$z = u + v\sqrt{-1},$$

wo u und v Functionen von x sind. Nach dem Artikel Unmögliche Größen (6.) kann man setzen:

$$z = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

wo ϱ und φ Functionen von x sind. Folglich nach demselben Artikel (3.):

$$y = \varrho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1})$$
$$= p + q\sqrt{-1}.$$

Nimmt man nun nach den im Vorhergehenden bewiesenen allgemeinen Formeln die derivirten Functionen, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$p' = -n\varrho^n\varphi'\sin n\varphi + n\varrho^{n-1}\varrho'\cos n\varphi,$$
$$q' = n\varrho^n\varphi'\cos n\varphi + n\varrho^{n-1}\varrho'\sin n\varphi.$$

Also

$$y' = p' + q'\sqrt{-1}$$
$$= n\varrho^{n-1}(\varrho'\cos n\varphi - \varrho\varphi'\sin n\varphi)$$
$$+ n\varrho^{n-1}(\varrho'\sin n\varphi + \varrho\varphi'\cos n\varphi)\sqrt{-1}.$$

Es ist aber

$$z^{n-1} = \varrho^{n-1}\{\cos(n-1)\varphi + \sin(n-1)\varphi\sqrt{-1}\},$$
$$z' = \varrho'\cos\varphi - \varrho\varphi'\sin\varphi$$
$$+ (\varrho'\sin\varphi + \varrho\varphi'\cos\varphi)\sqrt{-1};$$

folglich, wenn man multiplicirt:

$$z^{n-1}z' = \varrho^{n-1}\varrho'\{\cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi\}$$
$$- \varrho^n\varphi'\{\sin(n-1)\varphi\cos\varphi + \cos(n-1)\varphi\sin\varphi\}$$
$$+ \varrho^{n-1}\varrho'\{\sin(n-1)\varphi\cos\varphi + \cos(n-1)\varphi\sin\varphi\}\sqrt{-1}$$
$$+ \varrho^n\varphi'\{\cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi\}\sqrt{-1}$$
$$= \varrho^{n-1}(\varrho'\cos n\varphi - \varrho\varphi'\sin n\varphi)$$
$$+ \varrho^{n-1}(\varrho'\sin n\varphi + \varrho\varphi'\cos n\varphi)\sqrt{-1}.$$

Also offenbar nach dem Vorhergehenden:

$$y' = nz^{n-1}z',$$

oder

$$y' = n(u+v\sqrt{-1})^{n-1}(u'+v'\sqrt{-1}),$$

so daß folglich die früher in Bezug auf reelle Functionen bewiesene Regel zur Entwickelung der derivirten Functionen von Potenzen auch für imaginäre Functionen gilt.

Ist

$$y = a + (u+v\sqrt{-1}) + (p+q\sqrt{-1}) + (r+s\sqrt{-1}) + \ldots,$$

so ist

$$y = a + u + p + r + \ldots + (v+q+s+\ldots)\sqrt{-1}.$$

Also nach dem Obigen (12.)

$$y' = u' + p' + r' + \ldots + (v'+q'+s'+\ldots)\sqrt{-1}$$
$$= (u'+v'\sqrt{-1}) + (p'+q'\sqrt{-1}) + (r'+s'\sqrt{-1}) + \ldots$$

Sey ferner

$$y = (u+v\sqrt{-1})(p+q\sqrt{-1}).$$

Setzt man nach Unmögliche Größen (6.)

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$
$$p + q\sqrt{-1} = \varrho_1(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1});$$

so ist (a. a. O. 2.)

$$y = \varrho\varrho_1\{\cos(\varphi+\psi) + \sin(\varphi+\psi)\sqrt{-1}\}$$
$$= r + s\sqrt{-1}.$$

Aber nach aus dem Obigen bekannten Regeln:

$$r' = (\varrho\varrho'_1 + \varrho_1\varrho')\cos(\varphi+\psi) - \varrho\varrho_1(\varphi'+\psi')\sin(\varphi+\psi),$$
$$s' = (\varrho\varrho'_1 + \varrho_1\varrho')\sin(\varphi+\psi) + \varrho\varrho_1(\varphi'+\psi')\cos(\varphi+\psi).$$

Folglich

$$y' = (\varrho\varrho'_1 + \varrho_1\varrho')\cos(\varphi+\psi) - \varrho\varrho_1(\varphi'+\psi')\sin(\varphi+\psi)$$
$$+ \{(\varrho\varrho'_1 + \varrho_1\varrho')\sin(\varphi+\psi) + \varrho\varrho_1(\varphi'+\psi')\cos(\varphi+\psi)\}\sqrt{-1}.$$

Ferner ist

$$u' + v'\sqrt{-1} = \varrho'\cos\varphi - \varrho\varphi'\sin\varphi + (\varrho'\sin\varphi + \varrho\varphi'\cos\varphi)\sqrt{-1}$$

$$p' + q'\sqrt{-1} = \varrho'_1\cos\psi - \varrho_1\psi'\sin\psi + (\varrho'_1\sin\psi + \varrho_1\psi'\cos\psi)\sqrt{-1}$$

und hieraus findet man leicht:

$$(u + v\sqrt{-1})(p' + q'\sqrt{-1}) = \varrho\varrho'_1\cos(\varphi+\psi) - \varrho\varrho_1\psi'\sin(\varphi+\psi) + \{\varrho\varrho'_1\sin(\varphi+\psi) + \varrho\varrho_1\psi'\cos(\varphi+\psi)\}\sqrt{-1}$$

$$(p + q\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1}) = \varrho_1\varrho'\cos(\varphi+\psi) - \varrho\varrho_1\varphi'\sin(\varphi+\psi) + \{\varrho_1\varrho'\sin(\varphi+\psi) + \varrho\varrho_1\varphi'\cos(\varphi+\psi)\}\sqrt{-1}$$

Folglich

$$(u+v\sqrt{-1})(p'+q'\sqrt{-1}) + (p+q\sqrt{-1})(u'+v'\sqrt{-1})$$
$$= (\varrho\varrho'_1+\varrho_1\varrho')\cos(\varphi+\psi) - \varrho\varrho_1(\varphi'+\psi')\sin(\varphi+\psi) + \{(\varrho\varrho'_1+\varrho_1\varrho')\sin(\varphi+\psi) + \varrho\varrho_1(\varphi'+\psi')\cos(\varphi+\psi)\}\sqrt{-1}.$$

Also

$$y' = (u+v\sqrt{-1})(p'+q'\sqrt{-1}) + (p+q\sqrt{-1})(u'+v'\sqrt{-1}).$$

Ist

$$y = \frac{u+v\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}},$$

so sey wieder

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$
$$p + q\sqrt{-1} = \varrho_1(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$y = \frac{\varrho}{\varrho_1}\cdot\frac{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^{-1}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})\{\cos(-\psi) + \sin(-\psi)\sqrt{-1}\}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho_1}\{\cos(\varphi-\psi) + \sin(\varphi-\psi)\sqrt{-1}\},$$

und man könnte nun wieder auf ähnliche Art wie vorher verfahren. Da aber hieraus erhellet, daß y von der Form $r + s\sqrt{-1}$ ist, so gelangt man auch auf folgende Art ganz einfach zum Zweck. Es ist

$$u + v\sqrt{-1} = y(p + q\sqrt{-1});$$

also nach dem Vorhergehenden

$$u' + v'\sqrt{-1} = y(p'+q'\sqrt{-1}) + (p+q\sqrt{-1})y',$$

$$y' = \frac{u'+v'\sqrt{-1} - y(p'+q'\sqrt{-1})}{p+q\sqrt{-1}},$$

woraus, wenn man

$$y = \frac{u + v\sqrt{-1}}{p + q\sqrt{-1}}$$

setzt, augenblicklich:

$$y' = \frac{(p + q\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1}) - (u + v\sqrt{-1})(p' + q'\sqrt{-1})}{(p + q\sqrt{-1})^2}.$$

Für $y = a(u + v\sqrt{-1})$ erhellet auf der Stelle, daß

$$y' = a(u' + v'\sqrt{-1})$$

ist.

Wir werden späterhin noch auf diesen Gegenstand zurückkommen.

14. Nach dem, was wir im Vorhergehenden von den derivirten Functionen gehabt haben, ist der Uebergang zu den Differentialen sehr leicht. Unter dem Differential einer Function $y = f(x)$ mit einer veränderlichen Größe x versteht man nämlich nichts anders, als das Product ihrer derivirten Function $y' = f'(x)$ in das Increment oder die Differenz Δx der unabhängigen veränderlichen Größe x, so daß also, wenn wir, wie gewöhnlich, das Differential von $y = f(x)$ durch $\partial y = \partial f(x)$ bezeichnen, überhaupt

$$\partial y = y'\Delta x \text{ oder } \partial f(x) = f'(x).\Delta x$$

ist. Für $y = x$ ist $y' = 1$; also $\partial x = \Delta x$. Daher setzt man gewöhnlich

$$\partial y = y'\partial x \text{ oder } \partial f(x) = f'(x).\partial x,$$

und nennt auch ∂x das Differential der unabhängigen veränderlichen Größe x, wobei man aber zu bemerken hat, daß ∂x immer eine constante Größe ist. Häufig nennt man die derivirten Functionen auch Differentialquotienten, weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \text{ oder } \frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$$

ist. Das Differential einer Function entwickeln heißt dieselbe differentiiren. Die Wissenschaft, welche alle Arten von Functionen zu differentiiren lehrt, ist die Differentialrechnung, eine Wissenschaft, welche in allen Theilen der Mathematik die vielfachste Anwendung findet. Die wichtigsten Anwendungen auf Geometrie und Analysis werden gewöhnlich dem Vortrage der Differentialrechnung selbst einverleibt, weil Nichts geeigneter ist, das eigentliche Wesen dieser Wissenschaft in recht helles Licht zu setzen. Die Théorie des fonctions analytiques und die Leçons sur le calcul des fonctions von Lagrange sind nichts anders, als in vieler Beziehung sehr vollständige, mit großem Scharfsinne verfaßte, Lehrbegriffe der Differentialrechnung, völlig würdig dem Genie ihres unsterblichen Urhebers. Lagrange vermeidet in diesen Werken den Begriff des Differentials ganz, in-

dem er bloß bei den derivirten Functionen stehen bleibt. Wir werden späterhin noch einmal auf diese herrlichen Früchte des menschlichen Geistes zurückkommen.

15. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich unmittelbar folgende Formeln:

$$\partial . x^n = n x^{n-1} \partial x \; ;$$

$$\partial \log x = \frac{\log e}{x} \partial x = \frac{\partial x}{x l a}, \; \partial l x = \frac{\partial x}{x}, \; \partial . a^x = \frac{a^x}{\log e} \partial x$$

$$= a^x l a \, \partial x, \; \partial . e^x = e^x \partial x \; ;$$

$$\partial \sin x = \cos x \partial x, \; \partial \cos x = - \sin x \partial x, \; \partial \tang x = \frac{\partial x}{\cos x^2},$$

$$\partial \cot x = - \frac{\partial x}{\sin x^2}, \; \partial \sec x = \frac{\tang x}{\cos x} \partial x, \; \partial \operatorname{cosec} x = - \frac{\cot x}{\sin x} \partial x \; ;$$

$$\partial \operatorname{Arc} \sin x = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}, \; \partial \operatorname{Arc} \cos x = - \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}, \; \partial \operatorname{Arc} \tang = \frac{\partial x}{1 + x^2},$$

$$\partial \operatorname{Arc} \cot x = - \frac{\partial x}{1 + x^2}, \; \partial \operatorname{Arc} \sec x = \frac{\partial x}{x \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\partial \operatorname{Arc} \operatorname{cosec} x = - \frac{\partial x}{x \sqrt{x^2 - 1}} .$$

Da nach (12.) die derivirte Function a' jeder constanten Größe $a = 0$ ist, so ist auch das Differential ∂a jeder constanten Größe $= 0$.

Ist

$$z = F(y) = F(f(x)) \; ;$$

so ist nach (4.)

$$z' = F'(y) . f'(x) \; ;$$

also

$$\partial z = z' \partial x = F'(y) . f'(x) . \partial x .$$

Aber

$$F'(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y}, \; f'(x) . \partial x = \partial f(x) .$$

Folglich

$$\partial z = \frac{\partial F(y)}{\partial y} \partial f(x) = F'(y) \partial y .$$

Diese Formel ist sehr wichtig, wenn die Differentiale zusammengesetzter Functionen entwickelt werden sollen. Wäre z. B. $z = l \sin x$, so setze man $\sin x = y$, $z = l y$. Dann ist

$$\partial z = \frac{\partial l y}{\partial y} \partial \sin x ,$$

d. i. nach den obigen Formeln

$$\partial z = \frac{\cos x}{y} \partial x = \frac{\partial x}{\tang x} .$$

Für $z = e^{e^x}$ sei $e^x = y$, $z = e^y$; so ist

$$\partial z = \frac{\partial e^y}{\partial y} \partial e^x = e^y e^x \partial x = e^{e^x} e^x \partial x .$$

Nach dem Obigen ist

$$\partial z = F'(y)\partial y\ ,$$

wo aber ∂y das Differential von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe ist. Betrachtet man y als unabhängige veränderliche Größe, so ist nach (14.)

$$\partial F(y) = F'(y)\partial y\ .$$

Man kann also $\partial z = \partial F(y)$ setzen, nur mit der Bemerkung, daß, nachdem man $\partial F(y)$ in Bezug auf y als unabhängige veränderliche Größe entwickelt hat, ∂y als das Differential von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe betrachtet und als solches entwickelt werden muß, um auch ∂z in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe zu erhalten.

Aus (12.) und (13.) ergeben sich ferner sehr leicht folgende Formeln:

Für $y = az$ ist $\partial y = a\partial z$.

Für $y = z + u + v + w + \ldots$ ist

$$\partial y = \partial z + \partial u + \partial v + \partial w + \ldots.$$

ür $y = a + z + u + v + w + \ldots$ ist

$$\partial y = \partial z + \partial u + \partial v + \partial w + \ldots.$$

ieraus, mit der vorhergehenden Formel verglichen, erhellet, daß an ∂a, d. i. das Differential jeder constanten Größe, $= 0$ zu tzen hat.

Für $y = pqrst\ldots$ ist

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} + \frac{\partial r}{r} + \frac{\partial s}{s} + \frac{\partial t}{t} + \ldots.$$

ür $y = pq$ und $y = pqr$, z. B. ist respective $\partial y = p\partial q +$ p und

$$\partial y = qr\partial p + pr\partial q + pq\partial r\ .$$

ie man so weiter gehen kann, ist klar.

Für $y = \frac{p}{q}$ ist

$$y = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2}\ .$$

r $y = u + v\sqrt{-1}$ ist

$$\partial y = \partial u + \partial v\sqrt{-1}\ .$$

einige Anwendungen dieser Formeln zu zeigen, sey $y = \tang x$; ist

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}\ ;$$

glich

$$y = \frac{\cos x\,\partial \sin x - \sin x\,\partial \cos x}{\cos x^2} = \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\partial x}{\cos x^2}\ ,$$

i.

$$\partial \tang x = \frac{\partial x}{\cos x^2},$$

wie vorher. Für $y = \cot x$ hat man eben so

$$\partial y = \frac{\sin x\, \partial \cos x - \cos x\, \partial \sin x}{\sin x^2} = \frac{-(\sin x^2 + \cos x^2)\,\partial x}{\sin x^2},$$

$$\partial \cot x = -\frac{\partial x}{\sin x^2}.$$

Für $y = x^x$ ist $ly = xlx$; also

$$\frac{\partial y}{y} = (1 + lx)\partial x,\quad \partial y = x^x(1 + lx)\partial x.$$

Für $y = x^{\frac{1}{x}}$ ist $ly = \frac{lx}{x}$; also

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{(1 - lx)\partial x}{x^2},\quad \partial y = \frac{1 - lx}{x^2} x^{\frac{1}{x}} \partial x.$$

Für $y = x^a e^{-x}$ ist

$$\partial y = x^a \partial . e^{-x} + e^{-x} \partial . x^a = - x^a e^{-x} \partial x + a x^{a-1} e^{-x} \partial x,$$

d. i.

$$\partial . x^a e^{-x} = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right)\partial x.$$

In der Bezeichnung $\partial . x^a e^{-x}$ vertritt das Punktum hinter dem Differentialzeichen die Stelle einer Parenthese, indem man eigentlich $\partial(x^a e^{-x})$ schreiben müßte. Die erstere Bezeichnungsart ist kürzer, und wird daher häufig angewandt.

Für $y = \frac{e^{ax}}{x}$ ist

$$\partial y = \frac{x \partial . e^{ax} - e^{ax} \partial x}{x^2} = \frac{a e^{ax} x \partial x - e^{ax} \partial x}{x^2},$$

d. i.

$$\partial\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{e^{ax}}{x}\left(a - \frac{1}{x}\right)\partial x.$$

Für $y = \frac{\alpha}{a + x}$ erhält man leicht

$$\partial y = -\frac{\alpha \partial x}{(a + x)^2},$$

wobei man, wie immer bei constanten Größen, $\partial\alpha = 0$ setzt.

16. Hat man die derivirte Function $y' = f'(x)$ einer beliebigen primitiven Function $y = f(x)$ gefunden, so kann man offenbar nun diese derivirte Function als eine neue primitive Function betrachten, und wieder ihre derivirte Function nehmen. Diese derivirte Function, als primitive Function betrachtet, führt dann ferner zu einer dritten derivirten Function, diese zu einer vierten, diese zu einer fünften u. s. w., ein Verfahren, welches sich offenbar beliebig weit fortsetzen läßt. Die derivirten Functionen, welche man auf diese Weise erhält, heißen in Bezug auf die

gegebene primitive Function die erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. derivirte Function, und werden durch

$$y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots\ldots y^{(n)}, \ldots\ldots,$$

oder

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), \ldots\ldots f_{(n)}(x), \ldots\ldots$$

bezeichnet. Ueberhaupt ergiebt sich aus dem Bisherigen auf der Stelle, daß die nte derivirte Function einer beliebigen primitiven Function die erste derivirte Function ihrer (n — 1)ten derivirten Function ist, ein Verhalten, welches durch die Gleichung

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \text{ oder } f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

ausgedrückt wird.

Auf ganz analoge Weise führt das erste Differential einer gegebenen Function nach dem in (14.) entwickelten Begriffe des Differentials überhaupt, als eine neue primitive Function von Neuem differentiirt, zu dem zweiten Differential der gegebenen Function; dieses, als eine neue primitive Function von Neuem differentiirt, zu dem dritten Differential der gegebenen Function; dieses auf ganz ähnliche Art zu dem vierten, dieses zu dem fünften u. s. w. Ueberhaupt ist wieder das nte Differential einer beliebigen Function das erste Differential ihres (n — 1)ten Differentials, so daß also, wenn man die Differentiale der Function $y = f(x)$ nach der Reihe durch

$$\partial y, \partial^2 y, \partial^3 y, \partial^4 y, \partial^5 y, \ldots\ldots \partial^n y, \ldots\ldots,$$

oder

$$\partial f(x), \partial^2 f(x), \partial^3 f(x), \partial^4 f(x), \partial^5 f(x), \ldots\ldots \partial^n f(x), \ldots\ldots$$

bezeichnet, allgemein

$$\partial^n y = \partial(\partial^{n-1} y) \text{ oder } \partial^n f(x) = \partial(\partial^{n-1} f(x))$$

ist. Nach (14.) ist nun für jede Function $\partial y = y'\partial x$, und ∂x muß als eine constante Größe betrachtet werden. Nach (15.) ist allgemein, wenn $y = az$ ist und a eine constante Größe bezeichnet, $\partial y = a\partial z$. Differentiirt man also nach dieser Regel die Function $\partial y = y'\partial x$, so ergiebt sich leicht nach und nach:

$$\begin{aligned}
\partial y &= y'\partial x \\
\partial^2 y &= \partial y'\partial x = (y')'\partial x\partial x = y''\partial x^2 \\
\partial^3 y &= \partial y''\partial x^2 = (y'')'\partial x\partial x^2 = y'''\partial x^3 \\
\partial^4 y &= \partial y'''\partial x^3 = (y''')'\partial x\partial x^3 = y^{IV}\partial x^4 \\
\partial^5 y &= \partial y^{IV}\partial x^4 = (y^{IV})'\partial x\partial x^4 = y^{V}\partial x^5 \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

so daß also überhaupt

$$\partial^n y = y^{(n)}\partial x^n, \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = y^{(n)};$$

oder

$$\partial^n f(x) = f^{(n)}(x)\partial x^n, \quad \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = f^{(n)}(x)$$

ist, und folglich die nte derivirte Function einer beliebigen primitiven Function erhalten wird, wenn man deren ntes Differential durch die nte Potenz des Differentials der unabhängigen veränderlichen Größe dividirt, weshalb die nte derivirte Function auch häufig der nte Differentialquotient genannt wird.

Nach diesen Principien und den oben gegebenen allgemeinen Regeln zur Entwickelung der ersten Differentiale hat es nun nicht die mindeste Schwierigkeit, die Differentiale aller Ordnungen jeder beliebigen Function nach der Reihe zu finden, wenn man nur das erste Differential jeder beliebigen Function finden kann, welches wir nun an einigen Beispielen erläutern wollen.

Für $y = x^m$ erhält man durch successive Differentiation sehr leicht

$$\partial^n y = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}\partial x^n\,.$$

Ist $m = n$, also m eine positive ganze Zahl, so ist

$$\partial^n y = 1.2.3.4\ldots.n\,\partial x^n\,.$$

Eben so leicht ergiebt sich

$$\partial^n.a^x = a^x(la)^n\partial x^n,\ \partial^n.e^x = e^x\partial x^n\,.$$

Da ferner nach (15.)

$$\partial\log x = \frac{\log e}{x}\partial x = \log e.x^{-1}\partial x$$

ist, so ist offenbar

$$\partial^n\log x = \log e.\partial^{n-1}(x^{-1})\partial x\,.$$

Setzt man aber in der oben für $\partial^n.x^m$ gefundenen Formel $n-1$ für n und $m = -1$, so wird

$$\partial^{n-1}(x^{-1}) = -1.-2.-3\ldots-(n-1)\,x^{-n}\partial x^{n-1}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n}\partial x^{n-1}\,;$$

folglich

$$\partial^n\log x = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)\log e}{x^n}\partial x^n\,,$$

und für natürliche Logarithmen:

$$\partial^n lx = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}\partial x^n\,.$$

Eben so leicht ergiebt sich auch

$$\partial^n\sin x = (-1)^{\frac{n}{2}}\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}\partial x^n,\ \partial^n\cos x = \pm(-1)^{\frac{n}{2}}\begin{Bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}\partial x^n\,,$$

mit dem Bemerken, daß für $\frac{n}{2}$ jederzeit nur die größte in diesem Bruche enthaltene ganze Zahl und das obere oder untere Vorzeichen, so wie die obere oder untere trigonometrische Function genommen wird, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Uebrigens ist auch

$$\begin{aligned}
\partial \sin x &= \cos x \partial x &&= \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi)\partial x \\
\partial^2 \sin x &= -\sin x \partial x^2 &&= \sin(x + \tfrac{2}{2}\pi)\partial x^2 \\
\partial^3 \sin x &= -\cos x \partial x^3 &&= \sin(x + \tfrac{3}{2}\pi)\partial x^3 \\
\partial^4 \sin x &= \sin x \partial x^4 &&= \sin(x + \tfrac{4}{2}\pi)\partial x^4 \\
\partial^5 \sin x &= \cos x \partial x^5 &&= \sin(x + \tfrac{5}{2}\pi)\partial x^5 \\
&\text{u. s. f.} && \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \cos x &= -\sin x \partial x &&= \cos(x + \tfrac{1}{2}\pi)\partial x \\
\partial^2 \cos x &= -\cos x \partial x^2 &&= \cos(x + \tfrac{2}{2}\pi)\partial x^2 \\
\partial^3 \cos x &= \sin x \partial x^3 &&= \cos(x + \tfrac{3}{2}\pi)\partial x^3 \\
\partial^4 \cos x &= \cos x \partial x^4 &&= \cos(x + \tfrac{4}{2}\pi)\partial x^4 \\
\partial^5 \cos x &= -\sin x \partial x^5 &&= \cos(x + \tfrac{5}{2}\pi)\partial x^5 \\
&\text{u. s. f.} && \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

folglich allgemein

$$\partial^n \sin x = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\partial x^n, \quad \partial^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\partial x^n .$$

Nach (15.) ist

$$\partial \operatorname{Arc tang} x = \frac{\partial x}{1 + x^2} ;$$

also, wenn wir $\operatorname{Arc tang} x = \varphi$ setzen, $x = \operatorname{tang} \varphi$, woraus leicht

$$\sin \varphi^2 = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad \cos \varphi^2 = \frac{1}{1 + x^2} ;$$

folglich

$$\partial \operatorname{Arc tang} x = \cos \varphi^2 \partial x .$$

Differentiirt man nun nach den oben bewiesenen Regeln diese Formel ferner, indem man bemerkt, daß φ selbst eine Function von x, ∂x constant ist: so erhält man:

$$\partial^2 \operatorname{Arc tang} x = -2 \cos \varphi \sin \varphi \partial \varphi \partial x ,$$

Aber $\partial \varphi = \cos \varphi^2 \partial x$. Folglich

$$\partial^2 \operatorname{Arc tang} x = -2 \cos \varphi^3 \sin \varphi \partial x^2 ,$$

oder, weil $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ ist,

$$\partial^2 \operatorname{Arc tang} x = -\cos \varphi^2 \sin 2\varphi \partial x^2 .$$

Durch fernere Differentiation ergiebt sich hieraus:

$$\begin{aligned}
\partial^3 \operatorname{Arc tang} x = &-2 \cos \varphi^2 \cos 2\varphi \partial \varphi \partial x^2 \\
&+ 2 \cos \varphi \sin \varphi \sin 2\varphi \partial \varphi \partial x^2 \\
= &-2 \cos \varphi^4 \cos 2\varphi \partial x^3 + 2 \cos \varphi^3 \sin \varphi \sin 2\varphi \partial x^3 \\
= &-2 \cos \varphi^3 (\cos \varphi \cos 2\varphi - \sin \varphi \sin 2\varphi) \partial x^3 \\
= &-2 \cos \varphi^3 \cos 3\varphi \partial x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^4 \operatorname{Arc tang} x = &\ 2.3 \cos \varphi^3 \sin 3\varphi \partial \varphi \partial x^3 \\
&+ 2.3 \cos \varphi^2 \sin \varphi \cos 3\varphi \partial \varphi \partial x^3 \\
= &\ 2.3 \cos \varphi^5 \sin 3\varphi \partial x^4 + 2.3 \cos \varphi^4 \sin \varphi \cos 3\varphi \partial x^4 \\
= &\ 2.3 \cos \varphi^4 (\cos \varphi \sin 3\varphi + \sin \varphi \cos 3\varphi) \partial x^4 \\
= &\ 2.3 \cos \varphi^4 \sin 4\varphi \partial x^4
\end{aligned}$$

$$\partial^5 \operatorname{Arc tang} x = 2.3.4 \cos\varphi^4 \cos 4\varphi\, \partial\varphi\, \partial x^4$$
$$- 2.3.4 \cos\varphi^3 \sin\varphi \sin 4\varphi\, \partial\varphi\, \partial x^4$$
$$= 2.3.4 \cos\varphi^6 \cos 4\varphi\, \partial x^5 - 2.3.4 \cos\varphi^5 \sin\varphi \sin 4\varphi\, \partial x^5$$
$$= 2.3.4 \cos\varphi^5 (\cos\varphi \cos 4\varphi - \sin\varphi \sin 4\varphi)\, \partial x^5$$
$$= 2.3.4 \cos\varphi^5 \cos 5\varphi\, \partial x^5$$

$$\partial^6 \operatorname{Arc tang} x = - 2.3.4.5 \cos\varphi^5 \sin 5\varphi\, \partial\varphi\, \partial x^5$$
$$- 2.3.4.5 \cos\varphi^4 \sin\varphi \cos 5\varphi\, \partial\varphi\, \partial x^5$$
$$= - 2.3.4.5 \cos\varphi^7 \sin 5\varphi\, \partial x^6 - 2.3.4.5 \cos\varphi^6 \sin\varphi \cos 5\varphi\, \partial x^6$$
$$= - 2.3.4.5 \cos\varphi^6 (\cos\varphi \sin 5\varphi + \sin\varphi \cos 5\varphi)\, \partial x^6$$
$$= - 2.3.4.5 \cos\varphi^6 \sin 6\varphi\, \partial x^6 .$$

Es unterliegt keinem Zweifel, wie man auf diese Art weiter gehen kann. Allgemein ist

$$\partial^{2n} \operatorname{Arc tang} x = 1.2.3\ldots(2n-1)(-1)^n \cos\varphi^{2n} \sin 2n\varphi\, \partial x^{2n} ,$$
$$\partial^{2n+1} \operatorname{Arc tang} x = 1.2.3\ldots 2n(-1)^n \cos\varphi^{2n+1} \cos(2n+1)\varphi\, \partial x^{2n+1}.$$

Aber

$$\sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin(n\pi - 2n\varphi) = - \cos n\pi \sin 2n\varphi$$
$$= - (-1)^n \sin 2n\varphi ,$$
$$\sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin\{ n\pi - (2n+1)\varphi + \tfrac{1}{2}\pi \}$$
$$= \cos\{ n\pi - (2n+1)\varphi \}$$
$$= \cos n\pi \cos(2n+1)\varphi = (-1)^n \cos(2n+1)\varphi ;$$

$$\sin 2n\varphi = - \frac{1}{(-1)^n} \sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) ,$$

$$\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{(-1)^n} \sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) .$$

Folglich

$$\partial^{2n} \operatorname{Arc tang} x = - 1.2.3\ldots(2n-1) \cos\varphi^{2n} \sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, \partial x^{2n} ,$$
$$\partial^{2n+1} \operatorname{Arc tang} x = 1.2.3\ldots 2n \cos\varphi^{2n+1} \sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, \partial x^{2n+1} ;$$

d. i. für jedes n

$$\partial^n \operatorname{Arc tang} x = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1} \cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, \partial x^n ,$$

wo immer $\operatorname{Arc tang} x = \varphi$ ist.

Nach (15.) ist

$$\partial \operatorname{Arc tang} x = \frac{\partial x}{1+x^2},\quad \partial \operatorname{Arc cot} x = - \frac{\partial x}{1+x^2} ;$$

folglich

$$\partial \operatorname{Arc cot} x = - \partial \operatorname{Arc tang} x ,$$

oder

$$\partial \operatorname{Arc cot} x = (-1)\, \partial \operatorname{Arc tang} x ,$$

woraus durch successive Differentiation augenblicklich:

$$\partial^n \operatorname{Arc cot} x = (-1)\, \partial^n \operatorname{Arc tang} x = - \partial^n \operatorname{Arc tang} x .$$

Folglich nach dem Obigen für jedes n:

$$\partial^n \operatorname{Arc cot} x = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^n \cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\, \partial x^n ,$$

für $\varphi = \text{Arc tang}\, x$. Setzt man $\frac{1}{2}\pi - \varphi = \psi$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, so ist $\cos\varphi = \sin\psi$, folglich

$$\partial^n \text{Arc cot}\, x = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^n \sin\psi^n \sin n\psi \partial x^n .$$

Da $\text{tang}\,\varphi = \text{tang}(\frac{1}{2}\pi - \psi) = \cot\psi$ ist, so ist $\cot\psi = x$.

17. Wir wollen nun auch die derivirten Functionen oder Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen von Arc sin x zu entwickeln suchen. Nach (15.) ist

$$\partial \text{Arc sin}\, x = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{\partial \text{Arc sin}\, x}{\partial x} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

Setzen wir also $y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so ist offenbar

$$\frac{\partial^n \text{Arc sin}\, x}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}},$$

und es kommt also jetzt bloß auf die Entwickelung der derivirten Functionen oder Differentialquotienten von y an. Führt man diese Entwickelung nach den aus dem Obigen bekannten Regeln wirklich aus, so ergiebt sich nach und nach:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.2x = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}x;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.2x^2$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(2x^2+1)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.4x + \tfrac{5}{2}(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}.2x(2x^2+1)$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{7}{2}}(6x^3+9x)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = (1-x^2)^{-\frac{7}{2}}(18x^2+9) + \tfrac{7}{2}(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}.2x(6x^3+9x)$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{9}{2}}(24x^4+72x^2+9) .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Setzen wir nun nach dem sich aus dieser Entwickelung unzweideutig ergebenden Gesetze:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}\left\{A_n x^n + B_n x^{n-2} + C_n x^{n-4} + D_n x^{n-6} + \ldots\right\},$$

so ergiebt sich durch Entwickelung des folgenden Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} =$$

$$(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}\{nA_n x^{n-1} + (n-2)B_n x^{n-3} + (n-4)C_n x^{n-5} + (n-6)D_n x^{n-7} + \ldots\}$$

$$+ \frac{2n+1}{2}(1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}}.2x\{A_n x^n + B_n x^{n-2} + C_n x^{n-4} + D_n x^{n-6} + \ldots\}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}}(1-x^2)\{nA_n x^{n-1} + (n-2)B_n x^{n-3} + (n-4)C_n x^{n-5} + \ldots\}$$

$$+ (2n+1)(1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} \{ A_n x^{n+1} + B_n x^{n-1} + C_n x^{n-3} + D_n x^{n-5} + \ldots \}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} \left\{ \begin{array}{l} (2n+1) A_n x^{n+1} + (2n+1) B_n x^{n-1} + (2n+1) C_n x^{n-3} \\ \qquad + (2n+1) D_n x^{n-5} + \ldots \\ - nA_n x^{n+1} - (n-2) B_n x^{n-1} - (n-4) C_n x^{n-3} - (n-6) D_n x^{n-5} + \ldots \\ \qquad + nA_n x^{n-1} + (n-2) B_n x^{n-3} + (n-4) C_n x^{n-5} + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} \left\{ \begin{array}{l} (n+1) A_n x^{n+1} + (n+3) B_n x^{n-1} + (n+5) C_n x^{n-3} \\ \qquad + (n+7) D_n x^{n-5} + \ldots \\ \qquad + nA_n x^{n-1} + (n-2) B_n x^{n-3} + (n-4) C_n x^{n-5} + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} \{ A_{n+1} x^{n+1} + B_{n+1} x^{n-1} + C_{n+1} x^{n-3} + D_{n+1} x^{n-5} + \ldots \},$$

woraus man also folgende Gleichungen zwischen den Coefficienten von $y^{(n)}$ und $y^{(n+1)}$ erhält:

$$\begin{array}{lll} A_{n+1} = & & (n+1) A_n \\ B_{n+1} = nA_n & + & (n+3) B_n \\ C_{n+1} = (n-2) B_n & + & (n+5) C_n \\ D_{n+1} = (n-4) C_n & + & (n+7) D_n \\ E_{n+1} = (n-6) D_n & + & (n+9) E_n \\ \quad \text{u. s. f.} & & \text{u. s. f.} \end{array}$$

Setzt man, wenn K_n einen beliebigen Coefficienten der nten derivirten Function bezeichnet, überhaupt

$$\frac{K_n}{1 \ldots n} = K'_n;$$

so erhält man aus obigen Gleichungen leicht:

$$\begin{array}{lll} A'_{n+1} = & & \frac{n+1}{n+1} A'_n \\ B'_{n+1} = \frac{n}{n+1} A'_n & + & \frac{n+3}{n+1} B'_n \\ C'_{n+1} = \frac{n-2}{n+1} B'_n & + & \frac{n+5}{n+1} C'_n \\ D'_{n+1} = \frac{n-4}{n+1} C'_n & + & \frac{n+7}{n+1} D'_n \\ E'_{n+1} = \frac{n-6}{n+1} D'_n & + & \frac{n+9}{n+1} E'_n \\ \quad \text{u. s. f.} & & \text{u. s. f.} \end{array}$$

Euler hat nun zuerst in den Inst. calc. diff. T. I. §. 200. die oben entwickelten Differentialquotienten auf folgende Form gebracht:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} . x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1.2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \left\{ x^2 + \tfrac{1}{2} . \frac{2.1}{1.2} \right\}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{1.2.3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\left\{x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{3.2}{1.2}x\right\}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{1.2.3.4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}\left\{x^4 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4.3}{1.2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\right\}$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \frac{1.2.3.4.5}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}}\left\{x^5 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{5.4}{1.2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}x\right\}$$

u. s. f. u. s. f.

woraus sich also das folgende allgemeine Gesetz ergiebt:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{1.2..n}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\left\{\begin{array}{l} x^n + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}x^{n-6} + \ldots \end{array}\right\},$$

diese Reihe so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht. Will man dieses durch Induction gefundene Gesetz allgemein beweisen, so muß man zeigen, daß es für $y^{(n+1)}$ gilt, wenn es für $y^{(n)}$ gilt. Daß allgemein $A'_n = 1$ ist, folgt, weil $A'_1 = 1$ ist, unmittelbar aus der Relation

$$A'_{n+1} = A'_n .$$

Bezeichnen wir nun den $(k-1)$ten und kten Coefficienten in $y^{(n)}$ durch $\overset{-1}{K'_n}$ und K'_n, so ist nach dem bemerkten Gesetze, wenn dasselbe für $y^{(n)}$ als gültig angenommen wird:

$$\overset{-1}{K'_n} = \frac{1.3.5..(2k-5)}{2.4.6..(2k-4)}\cdot\frac{n(n-1)..(n-2k+5)}{1.2.3...(2k-4)},$$

$$K'_n = \frac{1.3.5..(2k-3)}{2.4.6..(2k-2)}\cdot\frac{n(n-1)..(n-2k+3)}{1.2.3...(2k-2)};$$

folglich offenbar

$$K'_n = \overset{-1}{K'_n}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{(n-2k+4)(n-2k+3)}{(2k-3)(2k-2)}.$$

Ferner ergiebt sich aber aus dem Obigen die folgende allgemeine Relation:

$$K'_{n+1} = \frac{n-2k+4}{n+1}\overset{-1}{K'_n} + \frac{n+2k-1}{n+1}K'_n$$

$$= \left\{\frac{n-2k+4}{n+1} + \frac{n+2k-1}{n+1}\cdot\frac{(n-2k+4)(n-2k+3)}{(2k-2)(2k-2)}\right\}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{n-2k+4}{n+1}\left\{1 + \frac{(n+2k-1)(n-2k+3)}{(2k-2)(2k-2)}\right\}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{n-2k+4}{n+1}\left\{1 + \frac{(n+2k-2+1)(n-2k+2+1)}{(2k-2)(2k-2)}\right\}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{n-2k+4}{n+1}\left\{1 + \frac{[(n+1)+(2k-2)][(n+1)-(2k-2)]}{(2k-2)(2k-2)}\right\}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{n-2k+4}{n+1}\left\{1 + \frac{(n+1)^2-(2k-2)^2}{(2k-2)^2}\right\}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2k+4)}{(2k-2)^2}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{(n+1)(n-2k+4)}{(2k-3)(2k-2)}\overset{-1}{K'_n}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2k-3)}{2.4.6\ldots(2k-2)}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-2k+3)}{1.2.3.4\ldots(2k-2)},$$

woraus also erhellet, daß das bemerkte Gesetz für $K'_{(n+1)}$ gilt, wenn es für $K'_{(n)}$ gilt, oder daß dasselbe überhaupt für $y^{(n+1)}$ gilt, wenn es für $y^{(n)}$ gilt, und daher allgemein ist, weil seine Richtigkeit oben bis y^{IV} durch Induction bewiesen worden ist. Es ist folglich

$$\frac{\partial^{n+1}\mathrm{Arc}\sin x}{\partial x^{n+1}} =$$

$$\frac{1.2.3..n}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\left\{x^n + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)..(n-5)}{1.2.3.4.5.6}x^{n-6} + \ldots\right\}$$

oder

$$\frac{\partial^{n+1}\mathrm{Arc}\sin x}{\partial x^{n+1}} =$$

$$\frac{1.2.3..nx^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2x^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4x^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6x^6} + \ldots\right\}$$

die Reihe immer so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht. Euler führt a. a. O. die Formel bloß an, ohne einen allgemeinen Beweis zu geben. Dadurch ward Lagrange veranlaßt, einen Beweis zu geben, den Lacroix im Traité du calcul diff. et du calcul int. T. I. p. 182. mittheilt. Einen andern Beweis giebt J. F. Pfaff in der überhaupt hierher gehörenden Abhandlung: Localformeln für höhere Differentiale in Hindenburgs zweiter Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen (Leipzig, 1800.) S. 176. Beide Beweise, so direct sie auch zum Ziele führen, setzen aber den binomischen Lehrsatz in größter Allgemeinheit voraus, indem sie auf der Entwickelung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe beruhen. Wir durften uns hier eine solche Voraussetzung nicht verstatten, weil gegenwärtiger Artikel eine von der Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen ganz unabhängige Darstellung der Differentialrechnung liefern soll.

Weil nach (15.)

$$\partial\,\mathrm{Arc}\cos x = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\,\partial\,\mathrm{Arc}\sin x$$

ist, so ist klar, daß man mittelst des Obigen auch leicht $\partial^n \mathrm{Arc}\cos x$ finden kann.

18. Ist $y = pq$, wo p und q zwei beliebige Functionen von x bezeichnen, so erhält man durch successive Differentiation dieses Products leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}q$$

$$= p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}q$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = p\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$+ 2\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}q$$

$$= p\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}q$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$+ 3\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}q$$

$$= p\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 4\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}q\,.$$

Auf diese Art weiter zu gehen, hat keine Schwierigkeit. Auch erhellet auf der Stelle, daß die numerischen Coefficienten eben so successive aus einander entstehen, wie die Binomial-Coefficienten. Daher ist allgemein:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = p\frac{\partial^n q}{\partial x^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{\partial^{n-2} p}{\partial x^{n-2}}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^n p}{\partial x^n}q\,,$$

oder

$$y^{(n)} = pq^{(n)} + \frac{n}{1}p'q^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}p''q^{(n-2)} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}p^{(n-2)}q'' + \frac{n}{1}p^{(n-1)}q' + p^{(n)}q\,,$$

wenn wir uns der in (16.) eingeführten Bezeichnung der derivirten Functionen bedienen, welche hier, wie oft in andern Fällen, bequem ist.

19. Wenn $y = f(x)$, $z = F(y)$ ist, so ist nach (15.)

$$\partial z = F'(y)\partial y\,,$$

wo aber ∂y das Differential von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe ist. Differentiirt man von Neuem und bedient sich der Kürze wegen immer der aus (16.) bekannten Bezeichnung der derivirten Functionen; so erhält man:

$$\partial^2 z = F''(y)\partial y^2 + F'(y)\partial^2 y\,,$$

und hieraus ferner:

$$\begin{aligned}\partial^3 z &= F'''(y)\partial y^3 + 2F''(y)\partial y\,\partial^2 y \\ &\qquad + F''(y)\partial y\,\partial^2 y + F'(y)\partial^3 y \\ &= F'''(y)\partial y^3 + 3F''(y)\partial y\,\partial^2 y + F'(y)\partial^3 y \\ \partial^4 z &= F^{iv}(y)\partial y^4 + 3F'''(y)\partial y^2\,\partial^2 y + 3F''(y)\partial^2 y\,\partial^2 y \\ &\qquad + 3F'''(y)\partial y^2\,\partial^2 y \\ &\qquad + 3F''(y)\partial y\,\partial^3 y + F'(y)\partial^4 y \\ &\qquad + F''(y)\partial y\,\partial^3 y \\ &= F^{iv}(y)\partial y^4 + 6F'''(y)\partial y^2\,\partial^2 y + 3F''(y)\partial^2 y\,\partial^2 y \\ &\qquad + 4F''(y)\partial y\,\partial^3 y + F'(y)\partial^4 y\,.\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

20. Es kommt bei allgemeinen analytischen Untersuchungen nicht selten der Fall vor, daß, wenn $y = f(x)$ und x die unabhängige veränderliche Größe ist, oder wenigstens als solche behandelt worden ist, x nicht mehr als unabhängige veränderliche Größe, sondern von einer beliebigen neuen veränderlichen Größe abhängig gedacht werden soll. In allen solchen Fällen fragt es sich nun, was man statt der für x als unabhängige veränderliche Größe entwickelten derivirten Functionen oder Differentialquotienten $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$... in die durch die in Rede stehende Untersuchung gefundenen Formeln zu setzen hat. Nach (19.) ist

$$\begin{aligned}\partial y &= f'(x)\partial x\,, \\ \partial^2 y &= f''(x)\partial x^2 + f'(x)\partial^2 x\,, \\ \partial^3 y &= f'''(x)\partial x^3 + 3f''(x)\partial x\,\partial^2 x + f'(x)\partial^3 x\,, \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Folglich, wenn man hieraus nach und nach $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ u. s. f. entwickelt:

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}\,,$$

$$f''(x) = \frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial x^3}\,,$$

$$f'''(x) = \frac{\partial x^2\,\partial^3 y - 3\partial x\,\partial^2 x\,\partial^2 y + 3\partial y\,\partial^2 x\,\partial^2 x - \partial x\,\partial y\,\partial^3 x}{\partial x^5}\,,$$

u. s. f. u. s. f.

Diese Ausdrücke muß man also nach der Reihe für

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x},\ f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^3},\ f'''(x) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots$$

etzen, wenn x nicht mehr als unabhängige veränderliche Größe etrachtet, sondern als von irgend einer andern veränderlichen röße abhängig gedacht wird. Nur der erste Differentialquotient leibt also bei diesem Verfahren, welches man Veränderung, Verwechselung oder Vertauschung der unabhängigen eränderlichen Größe nennt, rücksichtlich seines allgemeinen ymbolischen Ausdrucks unverändert. Mehr und Allgemeineres iber dieses Verfahren hier zu sagen ist unnöthig, da dasselbe schon n einem ihm ausschließlich gewidmeten Artikel dieses Wörterbuchs usführlich betrachtet worden ist.

I. Von der Entwickelung der Functionen einer eränderlichen Größe in Reihen mittelst der Differentialrechnung. Taylors und Maclaurins Sätze.

21. Ehe wir zu der Entwickelung der Functionen in Reihen lbst übergehen können, müssen wir, um nicht auf andere Artikel ieses Wörterbuchs verweisen zu dürfen, einige allgemeine arithetische Sätze beweisen, welche unserer folgenden Untersuchung orzüglich zum Grunde liegen. Zunächst kommt es auf folgende rklärung an. Man sagt, daß eine Größe zwischen mehrern anrn, welche, so wie jene Größe selbst, positiv und negativ seyn innen, enthalten, oder ein Mittel, auch eine Mittelgröße, vischen denselben sey, wenn diese Größe größer als die kleinste, einer als die größte der gegebenen Größen ist, wobei über die egriffe größer und kleiner der Artikel Ungleich (1.) im fünften heile dieses Wörterbuchs, den man überhaupt bei dem Folgenn immer vor Augen haben muß, zu vergleichen ist. Daß es vischen mehrern ungleichen Größen unendlich viele Mittelgrößen ben kann, erhellet aus der so eben gegebenen Definition von bst. Das Mittel zwischen mehrern unter einander gleichen Grön fällt offenbar mit diesen Größen selbst zusammen. Ueberhaupt ll eine Mittelgröße zwischen den gegebenen beliebigen Größen a, a'', a''', ... durch

$$M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

eichnet werden. Ist $A < B$, so ist nach der gegebenen Errung

$$M(A, B) > A,\ M(A, B) < B,$$

d die Differenzen

$$M(A, B) - A,\ B - M(A, B)$$

d daher beide positiv, oder die Differenzen

$$A - M(A, B),\ M(A, B) - B$$

de negativ (Ungleich 1.). Ohne daher jetzt noch ein bestimmtes rhalten rücksichtlich der gegenseitigen Größe von A und B, ob

nämlich $A < B$ ist, oder das Umgekehrte Statt findet, festzusetzen, ist überhaupt $M(A, B)$ eine Mittelgröße zwischen A und B, wenn die Differenzen

$$A - M(A, B), \quad M(A, B) - B$$

gleiche Vorzeichen haben, oder das Product

$$\{A - M(A, B)\}\{M(A, B) - B\}$$

positiv ist. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich nun die folgenden Sätze beweisen.

22. Wenn

$$h = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, so ist für jedes r immer

$$rh = M(ra, ra', ra'', ra''', \ldots).$$

Die kleinste unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots$ sey α, die größte γ, so sind nach (21.), da h auch eine Mittelgröße zwischen α und γ ist, die Differenzen $\gamma - h$, $h - \alpha$ beide positiv, und die Producte $r(\gamma - h)$, $r(h - \alpha)$, d. i. die Differenzen $r\gamma - rh$, $rh - r\alpha$, haben folglich gleiche Vorzeichen. Daher ist nach (21.)

$$rh = M(ra, r\gamma).$$

Weil nun $r\alpha$ und $r\gamma$ offenbar unter den Gliedern der Reihe

$$ra, ra', ra'', ra''', \ldots$$

vorkommen, so ist auch gewiß

$$rh = M(ra, ra', ra'', ra''', \ldots),$$

weil $r\alpha$ und $r\gamma$ entweder selbst das kleinste und größte Glied in obiger Reihe, oder zwischen dem kleinsten und größten Gliede enthalten sind, folglich offenbar auch rh immer zwischen dem kleinsten und größten Gliede enthalten ist.

23. Wenn wieder

$$h = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, so ist für jedes r auch

$$h \pm r = M(a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots),$$

wo die obern und untern Zeichen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sich auf einander beziehen.

Unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots$ sey α die kleinste, γ die größte, so sind die Differenzen

$$a - \alpha, \; a' - \alpha, \; a'' - \alpha, \; a''' - \alpha, \ldots;$$

$$\gamma - a, \; \gamma - a', \; \gamma - a'', \; \gamma - a''', \ldots$$

sämmtlich positiv (Ungleich. 1.). Also sind auch die Differenzen

$$a \pm r - (\alpha \pm r),\ \gamma \pm r - (a \pm r);$$
$$a' \pm r - (\alpha \pm r),\ \gamma \pm r - (a' \pm r);$$
$$a'' \pm r - (\alpha \pm r),\ \gamma \pm r - (a'' \pm r);$$
$$a''' \pm r - (\alpha \pm r),\ \gamma \pm r - (a''' \pm r);$$
u. s. f. u. s. f.

sämmtlich positiv, und unter den Größen

$$a \pm r,\ a' \pm r,\ a'' \pm r,\ a''' \pm r, \ldots.$$

ist folglich $\alpha \pm r$ die kleinste, $\gamma \pm r$ die größte (Ungleich. 1.). Da nun h zwischen $a, a', a'', a''', \ldots$ enthalten ist, so ist nach (21.)

$$h > \alpha,\ h < \gamma,$$

oder die Differenzen

$$h - \alpha,\ \gamma - h$$

sind beide positiv (Ungleich. 1.). Also sind offenbar auch die Differenzen

$$h \pm r - (\alpha \pm r),\ \gamma \pm r - (h \pm r)$$

beide positiv, oder es ist

$$h \pm r > \alpha \pm r,\ h \pm r < \gamma \pm r.$$

Folglich ist $h \pm r$ größer als die kleinste, kleiner als die größte unter den Größen

$$a \pm r,\ a' \pm r,\ a'' \pm r,\ a''' \pm r, \ldots,$$

d. i. nach (21.)

$$h \pm r = M(a \pm r, a' \pm r, a'' \pm r, a''' \pm r, \ldots),$$

wie bewiesen werden sollte.

24. Wenn die Größen $h, a, a', a'', a''', \ldots$ sämmtlich positiv sind, und

$$h = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, so ist für jedes r:

$$h^r = M(a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots).$$

Seyen wieder α und γ die kleinste und größte unter den Größen $a, a', a'', a''', \ldots$, so sind die Differenzen

$$\gamma - h,\ h - \alpha$$

beide positiv, oder es ist $\gamma > h$, $h > \alpha$. Ist nun r positiv, so ist $\gamma^r > h^r$, $h^r > \alpha^r$ (Ungleich. 8.), d. i. die Differenzen

$$\gamma^r - h^r,\ h^r - \alpha^r$$

sind beide positiv. Ist dagegen r negativ, so ist $\gamma^r < h^r$, $h^r < \alpha^r$ (Ungleich. 8.), oder die Differenzen

$$\gamma^r - h^r,\ h^r - \alpha^r$$

sind beide negativ. Diese Differenzen haben folglich immer gleiche Vorzeichen, und nach (21.) ist also

$$h^r = M(\alpha^r, \gamma^r).$$

Da nun α^r, γ^r offenbar beide in der Reihe $a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots$ vorkommen, so ist augenscheinlich auf ähnliche Art, wie auch schon in (22.) geschlossen wurde,

$$h^r = M(a^r, a'^r, a''^r, a'''^r, \ldots) .$$

Hat man nämlich überhaupt bewiesen, daß eine Größe μ eine Mittelgröße zwischen irgend zwei in der Reihe a, b, c, d, ... vorkommenden Gliedern g, k ist; so kann man immer schließen, daß $\mu = M(a, b, c, d, \ldots)$ ist, weil offenbar g, k entweder selbst die kleinste und größte unter den Größen a, b, c, d, ..., oder zwischen der kleinsten und größten enthalten sind.

Für $r = \frac{1}{2}$ ist z. B.

$$\sqrt{h} = M(\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}, \sqrt{a'''}, \ldots) ,$$

wenn

$$h = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, und h, a, a', a'', a''',... sämmtlich positiv sind.

25. Wenn a, a', a'', a''',... beliebige Größen bezeichnen, r aber positiv und

$$h = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, so ist immer

$$r^h = M(r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots) .$$

Sind wieder α und γ die kleinste und größte unter den Größen a, a', a'', a''',..., so ist $\gamma > h$, $h > \alpha$, weil h nach der Voraussetzung eine Mittelgröße zwischen a, a', a'', a''',... ist. Die Differenzen

$$\gamma - h, \quad h - \alpha$$

sind folglich beide positiv. Weil ferner $r^\gamma > r^h$, $r^h > r^\alpha$ oder $r^\gamma < r^h$, $r^h < r^\alpha$ ist, jenachdem $r >$ oder < 1 ist (Ungleich. 9.); so haben die Differenzen

$$r^\gamma - r^h, \quad r^h - r^\alpha$$

stets gleiche Vorzeichen, und es ist also nach (21.)

$$r^h = M(r^\alpha, r^\gamma) ,$$

folglich nach der vorher schon mehrmals angewandten Schlußweise auch

$$r^h = M(r^a, r^{a'}, r^{a''}, r^{a'''}, \ldots) ,$$

wie bewiesen werden sollte.

26. Die Basis eines logarithmischen Systems, für welches die Logarithmen durch log bezeichnet werden, sey = b, und h, a, a', a'', a''',... seyen sämmtlich positiv; so ist, wenn

$$h = M(a, a', a'', a''', \ldots)$$

ist, immer auch

$$\log h = M(\log a, \log a', \log a'', \log a''', \ldots) .$$

Behalten α, γ ihre frühere Bedeutung als die kleinste und größte unter den Größen a, a', a'', a''',...; so sind, weil diese Größen nach der Voraussetzung sämmtlich positiv sind, die Brüche $\frac{\gamma}{h}$, $\frac{h}{\alpha}$ offenbar beide größer als die Einheit, und die Differenzen

$$\log\gamma - \log h, \quad \log h - \log\alpha$$

sind demnach beide positiv, d. i.

$$\log h = M(\log\alpha, \log\gamma),$$

also nach der schon mehrmals angewandten Schlußart immer auch

$$\log h = M(\log a, \log a', \log a'', \log a''', \ldots),$$

wie bewiesen werden sollte.

27. Seyen $a, a', a'', a''', \ldots$ beliebige, dagegen $b, b', b'', b''', \ldots$ sämmtlich Größen mit demselben Vorzeichen, deren Anzahl in beiden Reihen $= n$ seyn mag; so ist immer

$$\frac{a+a'+a''+a'''+\ldots}{b+b'+b''+b'''+\ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\right).$$

Sey α die kleinste, γ die größte unter den Größen

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots;$$

so sind die Differenzen

$$\gamma - \frac{a}{b}, \gamma - \frac{a'}{b'}, \gamma - \frac{a''}{b''}, \gamma - \frac{a'''}{b'''}, \ldots;$$

$$\frac{a}{b} - \alpha, \frac{a'}{b'} - \alpha, \frac{a''}{b''} - \alpha, \frac{a'''}{b'''} - \alpha, \ldots$$

sämmtlich positiv. Da nun nach der Voraussetzung $b, b', b'', b''', \ldots$ alle gleiche Vorzeichen haben, so haben auch die Producte

$$b\left(\gamma - \frac{a}{b}\right), b'\left(\gamma - \frac{a'}{b'}\right), b''\left(\gamma - \frac{a''}{b''}\right), b'''\left(\gamma - \frac{a'''}{b'''}\right), \ldots;$$

$$b\left(\frac{a}{b} - \alpha\right), b'\left(\frac{a'}{b'} - \alpha\right), b''\left(\frac{a''}{b''} - \alpha\right), b'''\left(\frac{a'''}{b'''} - \alpha\right), \ldots;$$

d. i. die Differenzen

$$\gamma b - a, \gamma b' - a', \gamma b'' - a'', \gamma b''' - a''', \ldots;$$
$$a - \alpha b, a' - \alpha b', a'' - \alpha b'', a''' - \alpha b''', \ldots$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen; folglich offenbar auch die Summen

$$\gamma(b+b'+b''+b'''+\ldots) - (a+a'+a''+a'''\ldots)$$

und

$$a+a'+a''+a'''+\ldots - \alpha(b+b'+b''+b'''+\ldots);$$

also auch die Quotienten

$$\gamma - \frac{a+a'+a''+a'''+\ldots}{b+b'+b''+b'''+\ldots}, \frac{a+a'+a''+a'''+\ldots}{b+b'+b''+b'''+\ldots} - \alpha,$$

so daß nach (21.)

$$\frac{a+a'+a''+a'''+\ldots}{b+b'+b''+b'''+\ldots} = M(\alpha, \gamma),$$

und folglich nach der mehrfach angewandten Schlußart auch

$$\frac{a+a'+a''+a'''+\ldots}{b+b'+b''+b'''+\ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\right)$$

ist.

Setzt man $b = b' = b'' = b''' = \ldots = 1$, so wird

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{n} = M(a, a', a'', a''', \ldots),$$

worin die bekannte Regel für das sogenannte arithmetische Mittel zwischen mehrern gegebenen Größen enthalten ist.

Sind die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots$ sämmtlich einander gleich, so fällt das Mittel zwischen ihnen mit ihnen selbst zusammen, woraus sich nach dem Vorhergehenden das auch an sich merkwürdige arithmetische Theorem ergiebt, daß, die Gleichheit der obigen Brüche vorausgesetzt, immer

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{b + b' + b'' + b''' + \ldots} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots$$

ist.

28. Sind $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$ Größen von einerlei Vorzeichen, so haben, wenn, wie vorher, $b, b', b'', b''', \ldots$ Größen von einerlei Vorzeichen sind, auch die Producte

$$b\varrho, b'\varrho', b''\varrho'', b'''\varrho''', \ldots$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen, und es ist folglich nach (27.)

$$\frac{a\varrho + a'\varrho' + a''\varrho'' + a'''\varrho''' + \ldots}{b\varrho + b'\varrho' + b''\varrho'' + b'''\varrho''' + \ldots} = M\left(\frac{a\varrho}{b\varrho}, \frac{a'\varrho'}{b'\varrho'}, \frac{a''\varrho''}{b''\varrho''}, \frac{a'''\varrho'''}{b'''\varrho'''}, \ldots\right),$$

d. i.

$$\frac{a\varrho + a'\varrho' + a''\varrho'' + a'''\varrho''' + \ldots}{b\varrho + b'\varrho' + b''\varrho'' + b'''\varrho''' + \ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots\right).$$

Für $b = b' = b'' = b''' = \ldots = 1$ ist

$$\frac{a\varrho + a'\varrho' + a''\varrho'' + a'''\varrho''' + \ldots}{\varrho + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' + \ldots} = M(a, a', a'', a''', \ldots),$$

oder

$$a\varrho + a'\varrho' + a''\varrho'' + a'''\varrho''' + \ldots$$
$$= (\varrho + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' + \ldots) . M(a, a', a'', a''', \ldots),$$

so daß also, wenn $a, a', a'', a''', \ldots$ beliebige, dagegen $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$ Größen von einerlei Vorzeichen sind, das Aggregat

$$a\varrho + a'\varrho' + a''\varrho'' + a'''\varrho''' + \ldots$$

immer erhalten wird, wenn man die Summe

$$\varrho + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' + \ldots$$

in eine gewisse Mittelgröße zwischen $a, a', a'', a''', \ldots$ multiplicirt, ein Satz, welcher für viele analytische Untersuchungen von großer Wichtigkeit ist, und auch sogleich nachher bei dem Beweise eines wichtigen Theorems angewandt werden wird.

29. Sey $y = f(x)$ eine beliebige zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ stetige (2.) Function von x. Auch sey $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$ eine zwischen denselben Gränzen stetige Function von x. Man setze

$$b - a = n\alpha, \; b = a + n\alpha,$$

wo n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet.

Ferner ist nach einer aus dem Obigen bekannten Bezeichnung:

$$f(a+\alpha) - f(a) = \Delta f(a)$$
$$f(a+2\alpha) - f(a+\alpha) = \Delta f(a+\alpha)$$
$$f(a+3\alpha) - f(a+2\alpha) = \Delta f(a+2\alpha)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f(a+n\alpha) - f(a+(n-1)\alpha) = \Delta f(a+(n-1)\alpha).$$

Also, wenn man addirt und $a + n\alpha = b$ setzt:

$$f(b)-f(a)=\Delta f(a)+\Delta f(a+\alpha)+\Delta f(a+2\alpha)+\ldots+\Delta f(a+(n-1)\alpha).$$

Bezeichnet nun M eine gewisse Mittelgröße zwischen

$$\Delta f(a),\; \Delta f(a+\alpha),\; \Delta f(a+2\alpha),\; \ldots\; \Delta f(a+(n-1)\alpha);$$

so ist man nach (28.), wenn die dortigen $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots = 1$ gesetzt werden, berechtigt, zu setzen:

$$\Delta f(a)+\Delta f(a+\alpha)+\Delta f(a+2\alpha)+\ldots+\Delta f(a+(n-1)\alpha) = nM,$$

d. i.

$$f(b) - f(a) = nM,$$

und, weil $b - a = n\alpha$ ist:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{M}{\alpha}.$$

Weil M eine Mittelgröße zwischen

$$\Delta f(a),\; \Delta f(a+\alpha),\; \Delta f(a+2\alpha),\; \ldots\; \Delta f(a+(n-1)\alpha)$$

ist, so ist nach (22.) $\frac{M}{\alpha}$ eine Mittelgröße zwischen

$$\frac{\Delta f(a)}{\alpha},\; \frac{\Delta f(a+\alpha)}{\alpha},\; \frac{\Delta f(a+2\alpha)}{\alpha},\; \ldots \frac{\Delta f(a+(n-1)\alpha)}{\alpha}.$$

Die Größe α ist ganz willkührlich, und man kann sich also vorstellen, daß dieselbe sich der Null immer mehr nähere. Die Gränze, welcher sich

$$\frac{\Delta f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

immer mehr und mehr nähert, wenn α sich der Null nähert, ist nach (3.) die derivirte Function $f'(x)$, oder, was dasselbe ist (14.), der Differentialquotient $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$. Daher sind die Gränzen, welchen sich

$$\frac{\Delta f(a)}{\alpha},\; \frac{\Delta f(a+\alpha)}{\alpha},\; \frac{\Delta f(a+2\alpha)}{\alpha},\; \ldots \frac{\Delta f(a+(n-1)\alpha)}{\alpha}$$

nähern, wenn α sich der Null nähert, offenbar die Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, welche man erhält, wenn man in demselben nach und nach

$$a,\; a+\alpha,\; a+2\alpha,\; a+3\alpha,\; \ldots\; a+(n-1)\alpha$$

für x setzt, oder, was dasselbe ist, die folgenden Werthe der derivirten Function $f'(x)$:

$$f'(a),\ f'(a+\alpha),\ f'(a+2\alpha),\ \ldots\ f'(a+(n-1)\alpha).$$

Läßt man also α sich der Null nähern, so nähert die Reihe

$$\frac{\Delta f(a)}{\alpha},\ \frac{\Delta f(a+\alpha)}{\alpha},\ \frac{\Delta f(a+2\alpha)}{\alpha},\ldots\frac{\Delta f(a+(n-1)\alpha)}{\alpha}$$

sich immer mehr und mehr der Reihe der Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ oder der derivirten Functionen $f'(x)$, welche man erhält, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=a+n\alpha=b$ stetig verändern läßt, und man sieht leicht, daß man beide Reihen einander beliebig nahe bringen kann, wenn man nur nie aus den Augen verliert, daß nach der Voraussetzung sowohl $f(x)$, als auch $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ eine stetige Function ist.

Hieraus ergiebt sich nun mittelst des Obigen mit völliger Deutlichkeit das wichtige Theorem, daß

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

jederzeit eine Mittelgröße zwischen allen Werthen des Differentialquotienten $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ von $x=a$ bis $x=b$, d. i. größer als der kleinste, kleiner als der größte unter allen diesen Werthen des in Rede stehenden Differentialquotienten ist.

Da $\frac{\partial f(x)}{\partial x}=f'(x)$ zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$ stetig ist, so kann man sich die Werthe dieser Function zwischen den angegebenen Gränzen durch eine Curve dargestellt denken. Weil nun, wie vorher bewiesen worden ist, die Function

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

eine Mittelgröße zwischen den Werthen von $f'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ ist, so ist klar, daß einer dieser Werthe von $f'(x)$ der obigen Größe gleich seyn muß. Setzen wir den zwischen $x=a$ und $x=b$ liegenden Werth von x, welchem der in Rede stehende Werth von $f'(x)$ entspricht, $=a+i(b-a)$; so ist also

$$a+i(b-a)=M(a,b).$$

Folglich nach (23.), wenn man subtrahirt, auch

$$i(b-a)=M(0,b-a),$$

und, wenn man durch $b-a$ dividirt, nach (22.)

$$i=M(0,1),$$

d. i. i ein positiver ächter Bruch. Demnach ist also

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+i(b-a)),$$

$$f(b)-f(a) = (b-a)\,f'(a+i(b-a)),$$

und i immer ein positiver ächter Bruch.

30. Man kann aber diesen Satz noch zu größerer Allgemeinheit erheben. Seyen nämlich jetzt f(x) und F(x) zwei beliebige zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ stetige Functionen von x, und der Differentalquotient $\frac{\partial F(x)}{\partial x}$ ändere zwischen diesen Gränzen sein Zeichen nicht. Ist nun wieder

$$b-a = n\alpha,\quad b = a+n\alpha;$$

so erhalten wir ganz wie vorher:

$$f(b)-f(a) = \Delta f(a) + \Delta f(a+\alpha) + \Delta f(a+2\alpha) + \ldots + \Delta f(a+(n-1)\alpha),$$
$$F(b)-F(a) = \Delta F(a) + \Delta F(a+\alpha) + \Delta F(a+2\alpha) + \ldots + \Delta F(a+(n-1)\alpha);$$

folglich

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{\frac{\Delta f(a)}{\alpha} + \frac{\Delta f(a+\alpha)}{\alpha} + \frac{\Delta f(a+2\alpha)}{\alpha} + \ldots + \frac{\Delta f(a+(n-1)\alpha)}{\alpha}}{\frac{\Delta F(a)}{\alpha} + \frac{\Delta F(a+\alpha)}{\alpha} + \frac{\Delta F(a+2\alpha)}{\alpha} + \ldots + \frac{\Delta F(a+(n-1)\alpha)}{\alpha}}.$$

Läßt man nun α sich der Null beliebig nähern, so nähern nach (29.) die Reihen

$$\frac{\Delta f(a)}{\alpha},\ \frac{\Delta f(a+\alpha)}{\alpha},\ \frac{\Delta f(a+2\alpha)}{\alpha},\ \ldots \frac{\Delta f(a+(n-1)\alpha)}{\alpha},$$

und

$$\frac{\Delta F(a)}{\alpha},\ \frac{\Delta F(a+\alpha)}{\alpha},\ \frac{\Delta F(a+2\alpha)}{\alpha},\ \ldots \frac{\Delta F(a+(n-1)\alpha)}{\alpha}$$

sich respective immer mehr und mehr den Reihen der Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial F(x)}{\partial x},$$

zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$, und können denselben beliebig nahe gebracht werden. Da nun nach der Voraussetzung der letztere Differentialquotient zwischen diesen Gränzen sein Zeichen nicht ändert, und α beliebig klein genommen werden kann; so ergiebt sich aus (27.) unmittelbar, daß

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

eine Mittelgröße zwischen allen Werthen des Bruchs

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x)}{\partial x}} = \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

von $x=a$ bis $x=b$ ist, d. i. größer als der kleinste, kleiner als der größte dieser Werthe.

Nehmen wir nun an, daß

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$ stetig, und $\varkappa$ eine Mittelgröße zwischen a und b ist, so erhellet mittelst des Vorhergehenden leicht (am leichtesten, wenn man sich $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ durch eine Curve dargestellt denkt), daß immer

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\varkappa)}{F'(\varkappa)}$$

gesetzt werden kann. Setzen wir $\varkappa=a+i(b-a)$, so ist nach der Voraussetzung

$$a+i(b-a)=M(a,\, b)\,;$$

folglich nach (23.), wenn man a subtrahirt:

$$i(b-a)=M(0,\, b-a)\,,$$

und, wenn man durch $b-a$ dividirt, nach (22.)

$$i=M(0,\, 1)\,,$$

so daß also i immer ein positiver ächter Bruch ist. Man kann also unter den obigen Voraussetzungen immer

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(a+i(b-a))}{F'(a+i(b-a))}$$

setzen, so daß i ein positiver ächter Bruch ist.

31. Nehmen wir nun an, daß die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)\,;$$
$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ F^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x=a$, $x=b$ stetig sind, und daß keine der Functionen

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ F^{(n)}(x)$$

zwischen diesen Gränzen ihr Zeichen ändert; so ist nach (30.), wenn i, i', i'', i''', ... $i^{(n-1)}$ gewisse positive ächte Brüche bezeichnen:

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(a+i(b-a))}{F'(a+i(b-a))}$$

$$\frac{f'(a+i(b-a))-f'(a)}{F'(a+i(b-a))-F'(a)}=\frac{f''(a+ii'(b-a))}{F''(a+ii'(b-a))}$$

$$\frac{f''(a+ii'(b-a))-f''(a)}{F''(a+ii'(b-a))-F''(a)}=\frac{f'''(a+ii'i''(b-a))}{F'''(a+ii'i''(b-a))}$$

. . . .

$$\frac{f^{(n-1)}(a+ii'\ldots i^{(n-2)}(b-a))-f^{(n-1)}(a)}{F^{(n-1)}(a+ii'\ldots i^{(n-2)}(b-a))-F^{(n-1)}(a)}=\frac{f^{(n)}(a+ii'\ldots i^{(n-2)}i^{(n-1)}(b-a))}{F^{(n)}(a+ii'\ldots i^{(n-2)}i^{(n-1)}(b-a))}\,.$$

Zu bemerken ist hierbei noch, daß für jedes positive i, welches kleiner als die Einheit ist, $a + i(b - a)$ zwischen a und b liegt. Da nämlich i positiv und < 1 ist; so ist

$$i = M(0, 1);$$

folglich, wenn man mit $b - a$ multiplicirt, nach (22.)

$$i(b-a) = M(0, b-a),$$

und, wenn man a addirt, nach (23.)

$$a + i(b-a) = M(a, b),$$

wie behauptet wurde. Diese Bemerkung schien uns nöthig zu seyn, wenn man deutlich übersehen will, daß nach der Voraussetzung alle obigen Functionen zwischen den Werthen der veränderlichen Größe, auf welche sich ihre Werthe beziehen, stetig sind, wie erfordert wird, wenn der in (30.) bewiesene Satz anwendbar seyn soll. Daß $i, ii', ii'i'', ii'i''i''', \ldots$ sämmtlich positiv und < 1 sind, versteht sich von selbst.

Sind nun

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots\ f^{(n-1)}(a);$$
$$F(a),\ F'(a),\ F''(a),\ F'''(a),\ \ldots\ F^{(n-1)}(a)$$

sämmtlich $= 0$, und bezeichnet jetzt i wieder überhaupt einen gewissen positiven ächten Bruch, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden auf der Stelle, daß

$$\frac{f(b)}{F(b)} = \frac{f^{(n)}(a+i(b-a))}{F^{(n)}(a+i(b-a))}$$

ist, wobei, wie sich von selbst versteht, immer die obigen Voraussetzungen gültig bleiben. Da, wie wir vorher gesehen haben, $a + i(b - a)$ eine Mittelgröße zwischen a und b und $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$ nach der Voraussetzung zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ stetig ist, so ist offenbar

$$\frac{f^{(n)}(a+i(b-a))}{F^{(n)}(a+i(b-a))},$$

d. i. $\frac{f(b)}{F(b)}$ eine Mittelgröße zwischen allen Werthen der Function $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$ von $x = a$ bis $x = b$, d. i. kleiner als der größte, größer als der kleinste Werth dieser Function zwischen den angegebenen Gränzen, immer unter den obigen Voraussetzungen.

Setzen wir nun $F(x) = (x - a)^n$, so ist

$$F(x) = (x-a)^n$$
$$F'(x) = n(x-a)^{n-1}$$
$$F''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}$$
$$F'''(x) = n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots.2(x-a)$$
$$F^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1,$$

und die Function $F(x)$ genügt also offenbar allen obigen Bedingungen. Genügt nun auch $f(x)$ den in Bezug auf diese Function oben zum Grunde gelegten Bedingungen, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a+i(b-a))}{1.2.3.4\ldots.n},$$

da $F^{(n)}(x)$ constant ist, also natürlich auch

$$F^{(n)}(a+i(b-a))=1.2.3.4\ldots.n$$

gesetzt werden muß. Folglich ist immer unter den obigen Voraussetzungen in Bezug auf die Function $f(x)$:

$$f(b)=f^{(n)}(a+i(b-a)).\frac{(b-a)^n}{1.2.3.4\ldots n},$$

oder auch, wenn wir jetzt x für b setzen:

$$f(x)=f^{(n)}(a+i(x-a)).\frac{(x-a)^n}{1.2.3.4\ldots n},$$

wobei angenommen wird, daß

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots.\ f^{(n)}(x)$$

zwischen den Gränzen $x=a$, $x=x$ sämmtlich stetig, und

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots.\ f^{(n-1)}(a)$$

sämmtlich $=0$ sind.

32. Betrachten wir jetzt

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

als eine Function von h, und setzen dieselbe $=\varphi(h)$, so erhält man durch successive Differentiation in Bezug auf h leicht nach und nach:

$$\varphi(h)=f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

$$\varphi'(h)=f'(x+h)-f'(x)-\frac{h}{1}f''(x)-\ldots-\frac{h^{n-2}}{1.2.3..(n-2)}f^{(n-1)}(x)$$

$$\varphi''(h)=f''(x+h)-f''(x)-\frac{h}{1}f'''(x)-\ldots-\frac{h^{n-3}}{1.2.3..(n-3)}f^{(n-1)}(x)$$

. . . .

$$\varphi^{(n-1)}(h)=f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)$$

$$\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(x+h).$$

Sind nun, immer in Bezug auf h als veränderliche Größe,

$$f(x+h),\ f'(x+h),\ f''(x+h),\ \ldots.\ f^{(n)}(x+h)$$

zwischen den Gränzen $h=0$, $h=h$ stetig, so sind offenbar auch

$$\varphi(h),\ \varphi'(h),\ \varphi''(h),\ \ldots.\ \varphi^{(n)}(h)$$

zwischen denselben Gränzen stetig. Ferner ist auch klar, daß diese letztern Functionen bis $\varphi^{(n+1)}(h)$ für $h=0$ sämmtlich verschwin-

den. Setzen wir nun in der in (31.) bewiesenen Gleichung jetzt $a=0$, $x=h$, $x-a=h$; so erhält man:

$$\varphi(h)=\varphi^{(n)}(ih)\cdot\frac{h^n}{1.2.3..n}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(x+h);$$

also auch

$$\varphi^{(n)}(ih)=f^{(n)}(x+ih),$$

und folglich

$$\varphi(h)=f^{(n)}(x+ih)\cdot\frac{h^n}{1.2.3..n},$$

d. i.

$$f^{(n)}(x+ih)\cdot\frac{h^n}{1.2.3...n}$$

$$=f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-....-\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+....$$

$$....+\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x+ih),$$

wobei angenommen wird, daß

$$f(x+h),\ f'(x+h),\ f''(x+h),\ ....\ f^{(n)}(x+h)$$

zwischen den Gränzen $h=0$ und $h=h$ stetig sind.

Da i ein positiver ächter Bruch ist, so ist, wie wir schon in (31.) gesehen haben, $x+ih$ eine Mittelgröße zwischen x und $x+h$. Also ist, weil $f^{(n)}(x+h)$ zwischen den Gränzen $h=0$, $h=h$ stetig ist, $f^{(n)}(x+ih)$ offenbar eine Mittelgröße zwischen den Werthen des Differentialquotienten oder der derivirten Function $f^{(n)}(x)$ zwischen den Gränzen $x=x$ und $x=x+h$. Bezeichnen wir also den kleinsten unter allen diesen Werthen durch K, den größten durch G, so ist

$$f^{(n)}(x+ih)>K,\quad f^{(n)}(x+ih)<G,$$

oder überhaupt

$$f^{(n)}(x+ih)=M(K,G).$$

Also ist auch nach (22.)

$$\frac{h^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x+ih)=M\left\{\frac{h^n}{1.2.3...n}K,\ \frac{h^n}{1.2.3...n}G\right\},$$

und folglich nach (23.), wenn wir

$$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+...+\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x)=N$$

setzen:

$$N+\frac{h^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x+ih)$$

$$=M\left\{N+\frac{h^n}{1.2.3..n}K,\ N+\frac{h^n}{1.2.3..n}G\right\},$$

so daß also immer $f(x+h)$ eine Mittelgröße zwischen

$$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n K}{1.2.3..n}$$

und

$$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n G}{1.2.3..n}$$

ist, oder die beiden letzten Größen jederzeit zwei Gränzen von $f(x+h)$ sind, zwischen denen $f(x+h)$ liegt. Setzt man $x=0$ und schreibt x für h, so ergiebt sich hieraus, daß $f(x)$ immer zwischen den Gränzen

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1..(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n K}{1\ldots n}$$

und

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1..(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n G}{1\ldots n}$$

enthalten ist, wo nun K und G respective den kleinsten und größten Werth von $f^{(n)}(x)$ zwischen den Gränzen $x=0$, $x=x$ bezeichnen, und angenommen wird, daß

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

zwischen diesen Gränzen stetig sind.

Wenn

$$f(x+h),\ f'(x+h),\ f''(x+h),\ f'''(x+h),\ \ldots;$$

wie weit man auch diese Reihe fortsetzen mag, zwischen den Gränzen $h=0$, $h=h$, oder, was dasselbe ist,

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots.$$

zwischen den Gränzen $x=x$, $x=x+h$ stetig sind, und, wenn n wächst, die Größe

$$\frac{h^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x+ih)$$

sich immer mehr und mehr der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt; so ist man nach dem Obigen berechtigt zu setzen:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots,$$

oder, was dasselbe ist,

$$f(x+h)=f(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\frac{h}{1}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,$$

indem man sich diese Reihen in's Unendliche fortgesetzt denkt, und zugleich versichert ist, daß dieselben unter der obigen Voraussetzung convergiren, so daß also $f(x+h)$ ihre wahre Summe ist. Letztere Reihe ist die nach Brook Taylor benannte Taylor'sche Reihe, welche eins der wichtigsten analytischen Theoreme involvirt.

Da ferner nach dem Obigen, wenn man $x = 0$ setzt, und dann zugleich x für h schreibt,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(ix)$$

ist, so kann man, wenn

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,$$

wie weit man auch diese Reihe fortsetzen mag, zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = x$ stetig sind, und für wachsende n die Größe

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(ix)$$

sich immer mehr und mehr der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

setzen, indem man zugleich versichert ist, daß diese Reihe, welche man nach ihrem Erfinder die Maclaurinsche Reihe nennt, unter der obigen Voraussetzung convergirt, also $f(x)$ ihre wahre Summe ist.

33. Wir wollen nun von den bisherigen Sätzen sogleich einige Anwendungen machen. Zuerst sey $f(x) = e^x$, so ist nach (16.)

$$\partial^n f(x) = e^x \partial x^n,\ \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = f^{(n)}(x) = e^x.$$

Folglich ist allgemein $f^{(n)}(0) = 1$, und demnach e^x immer zwischen den Gränzen

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{x^n K}{1\ldots n}$$

und

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{x^n G}{1\ldots n}$$

enthalten, wie groß man auch n annehmen mag (32.). K und G sind respective der kleinste und größte Werth von $f^{(n)}(x) = e^x$ zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = x$. Weil nun e positiv und > 1 ist (7.), so ist für jedes positive x zwischen den angegebenen Gränzen $e^0 = 1$ offenbar der kleinste, e^x der größte Werth von $f^{(n)}(x)$. Für jedes negative x findet dagegen das Umgekehrte Statt. Folglich sind ohne Beziehung $e^0 = 1$ und e^x immer der kleinste und größte Werth von $f^{(n)}(x)$ zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = x$, und e^x ist folglich nach dem Obigen immer zwischen den Gränzen

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1..(n-1)} + \frac{x^n}{1..n}$$

und

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1..(n-1)} + \frac{x^n e^x}{1\ldots n}$$

enthalten, wie groß man auch n annehmen mag. Der Unterschied zwischen diesen beiden Gränzen ist

$$\frac{x^n(e^x-1)}{1.2.3.4\ldots n}.$$

Setzen wir nun

$$t_n = \frac{x^n(e^x-1)}{1.2.3\ldots.n}$$

$$t_{n+1} = \frac{x^{n+1}(e^x-1)}{1.2.3\ldots(n+1)} = t_n \cdot \frac{x}{n+1}$$

$$t_{n+2} = \frac{x^{n+2}(e^x-1)}{1.2.3\ldots(n+2)} = t_n \cdot \frac{x^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$t_{n+3} = \frac{x^{n+3}(e^x-1)}{1.2.3\ldots(n+3)} = t_n \cdot \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

u. s. f. u. s. f.

so erhellet, weil man, wie groß auch der absolute Werth von x seyn mag, n doch immer größer als denselben annehmen kann, auf der Stelle, daß der absolute Werth von t_{n+m}, wenn man nur n + m groß genug annimmt, beliebig klein gemacht werden kann, und daß folglich die beiden obigen Gränzen von e^x, wenn man nur n groß genug annimmt, einander beliebig nahe gebracht werden können. Daher wird, was auch x seyn mag, der Werth von e^x durch die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{x^n}{1\ldots n}$$

desto genauer ausgedrückt, je größer n ist, und man kann dem Werthe von e^x beliebig nahe kommen, wenn man nur n groß genug annimmt. Folglich ist für jedes x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.3.3.4} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \ldots.,$$

und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt immer.

Für x = 1 ist

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1\ldots5} + \ldots.,$$

wie auch schon in (7.) gefunden worden ist.

Nach (9.) ist für jedes N

$$a^{\log N} = e^{lN},$$

wenn log N sich auf die Basis a, lN sich auf die Basis e bezieht. Für N = a ist log N = log a = 1. Folglich ist immer

$$a = e^{la}, \quad a^x = e^{xla};$$

also nach dem Vorhergehenden für jedes a und jedes x:

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{x^4(la)^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

34. Sey ferner $f(x) = \sin x$, so ist nach (16.)

$$\partial^n f(x) = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\partial x^n, \quad f^{(n)}(x) = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

Folglich

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(ix) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin(ix + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

Der absolute Werth von $\sin(ix + \frac{1}{2}n\pi)$ kann nie die Einheit übersteigen. Setzt man aber

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{x^n}{1.2.3..n}$$

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} = \frac{x^n}{1.2.3..n}\cdot\frac{x}{n+1}$$

$$\frac{x^{n+2}}{1.2.3\ldots(n+2)} = \frac{x^n}{1.2.3..n}\cdot\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{x^{n+3}}{1.2.3\ldots(n+3)} = \frac{x^n}{1.2.3..n}\cdot\frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

u. s. f. u. s. f.

so erhellet, weil n immer größer als der absolute Werth von x genommen werden kann, daß

$$\frac{x^n}{1.2.3..n}, \text{ also auch } \frac{x^n}{1.2.3..n}\sin(ix + \tfrac{1}{2}n\pi),$$

sich der Null nähert, wenn n wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt. Also ist für jedes x nach (32.)

$$\sin x = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots.$$

Aber

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$$
$$f''(0) = \sin\pi = 0$$
$$f'''(0) = \sin\tfrac{3}{2}\pi = -1$$
$$f^{iv}(0) = \sin 2\pi = 0$$
$$f^{v}(0) = \sin\tfrac{5}{2}\pi = 1$$
$$f^{vi}(0) = \sin 3\pi = 0$$
$$f^{vii}(0) = \sin\tfrac{7}{2}\pi = -1$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich für jedes x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots.$$

Für $f(x) = \cos x$ ist nach (16.)

$$\partial^n f(x) = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\partial x^n, \quad f^{(n)}(x) = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

Also

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(ix) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos(ix + \tfrac{1}{2}n\pi),$$

woraus man auf ganz ähnliche Art wie vorher schließt, daß für jedes x

$$\cos x = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots$$

ist. Aber

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0$$
$$f''(0) = \cos\pi = -1$$
$$f'''(0) = \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0$$
$$f^{iv}(0) = \cos 2\pi = 1$$
$$f^{v}(0) = \cos\tfrac{5}{2}\pi = 0$$
$$f^{vi}(0) = \cos 3\pi = -1$$
$$f^{vii}(0) = \cos\tfrac{7}{2}\pi = 0$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich für jedes x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots 6} + \frac{x^8}{1\ldots 8} - \ldots$$

35. Für $f(x) = \text{Arc tang}\, x$ ist, wenn wir $\text{Arc tang}\, x = \varphi$ setzen, nach (16.)

$$\partial^n f(x) = 1.2.3..(n-1)(-1)^{n-1} \cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\partial x^n,$$
$$f^{(n)}(x) = 1.2.3..(n-1)(-1)^{n-1} \cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi).$$

Folglich, wenn man der Kürze wegen $\text{Arc tang}\, ix = \psi$ setzt:

$$\frac{x^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(ix) = (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} \cos\psi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \psi).$$

Weil nun der absolute Werth von $\cos\psi^n \sin n(\frac{1}{2}\pi - \psi)$ die Einheit nie übersteigen kann, so ist klar, daß für $x = \pm 1$ und $x > -1$, $x < +1$ die Größe

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(ix)$$

der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug nimmt, und daß folglich im vorliegenden Falle nach (32.) für $x = \pm 1$ und $x > -1$, $x < +1$

$$\text{Arc tang}\, x = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots$$

ist. Aber

$$f(0) = \alpha\pi,$$

für jedes positive oder negative ganze α. Folglich, da man, um überhaupt $f^{(n)}(0)$ zu erhalten, offenbar auch $\varphi = \alpha\pi$ setzen muß,

$$\cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = (-1)^{\alpha n} \sin\left(\frac{n}{2}\pi - n\alpha\pi\right)$$
$$= (-1)^{\alpha n}\left\{\sin\frac{n}{2}\pi \cos n\alpha\pi - \cos\frac{n}{2}\pi \sin n\alpha\pi\right\}$$
$$= (-1)^{\alpha n} \sin\frac{n}{2}\pi.(-1) = \sin\frac{n}{2}\pi.$$

Also

$$f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\sin\frac{n}{2}\pi;$$

und demnach

$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = -1.\sin\pi = 0$$
$$f'''(0) = 1.2\sin\tfrac{3}{2}\pi = -1.2$$
$$f^{IV}(0) = -1.2.3\sin 2\pi = 0$$
$$f^{V}(0) = 1.2.3.4\sin\tfrac{5}{2}\pi = 1.2.3.4$$
$$f^{VI}(0) = -1.2..5\sin 3\pi = 0$$
$$f^{VII}(0) = 1.2..6\sin\tfrac{7}{2}\pi = -1.2.3..6$$
$$f^{VIII}(0) = -1.2..7\sin 4\pi = 0$$
$$f^{IX}(0) = 1.2..8\sin\tfrac{9}{2}\pi = 1.2.3..8$$
u. s. f. u. s. f.

Daß $f'(0) = 1$ ist, erhellet leicht, weil bekanntlich

$$f'(x) = \frac{\partial \operatorname{Arc tang} x}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$$

ist. Wir erhalten also mittelst des Obigen:

$$\operatorname{Arc tang} x = \alpha\pi + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots;$$

für $x = \pm 1$ und jedes zwischen den Gränzen $x = -1$ und $x = 1$ enthaltene x. Die Größe α kann hier jede positive oder negative ganze Zahl bezeichnen, welches darin seinen Grund hat, daß Arc tang x in der That unendlich viele Werthe hat. Es ist auch verstattet $\alpha = 0$ zu setzen, wie aus dem Obigen erhellet, und daher also auch

$$\operatorname{Arc tang} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots.$$

ein Werth von Arc tang x, wenn nur immer $x = \pm 1$ oder zwischen den obigen Gränzen enthalten ist. Für $x = 0$ wird

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots = 0,$$

und da diese Reihe, weil dieselbe nach dem Obigen convergirt, offenbar eine stetige Function von x ist, immer aber einen Werth von Arc tang x darstellt, wenn nur x den obigen Bedingungen genügt; so ist klar, daß durch diese Reihe immer der Werth von Arc tang x dargestellt wird, welcher seiner absoluten Größe nach unter allen Werthen von Arc tang x am kleinsten ist.

Setzt man also, wie es nach dem Obigen verstattet ist, $x = 1$; so erhält man:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots,$$

eine convergirende Reihe für $\tfrac{1}{4}\pi$.

36. Man kann die allgemeine Entwickelung einer Function in eine Reihe noch auf eine andere Art wie oben in (31.) und (32.) vornehmen, wozu nur einige Begriffe und Sätze aus der Integralrechnung nöthig sind, die sich aber hier leicht einschalten lassen. Man versteht nämlich unter dem Integral eines beliebigen Differentials $X\partial x$ eine Function $f(x)$, deren Differential $= X\partial x$. Giebt also die Function $f(x)$, nach x als unabhängige veränderliche Größe differentiirt, das Differential $X\partial x$, so heißt $f(x)$ das Integral von $X\partial x$, ein Verhalten, welches durch

$$f(x) = \int X\partial x$$

bezeichnet wird. Ist $f(x)$ ein Integral von $X\partial x$, so ist, wenn C eine beliebige constante Größe bezeichnet, auch $f(x) + C$ ein Integral von $X\partial x$, weil auch

$$\partial \{f(x) + C\} = \partial f(x) = X\partial x$$

ist. Setzt man in dem Integral $\int X\partial x$ zuerst $x = \alpha$, dann $x = a$, und zieht den ersten Werth des Integrals von dem zweiten ab, so sagt man, man habe das Integral zwischen den Gränzen $x = \alpha$ und $x = a$ genommen, und bezeichnet das so genommene Integral durch $\int_\alpha^a X\partial x$, so daß also, wenn wie oben $\int X\partial x = f(x)$ ist, immer

$$\int_\alpha^a X\partial x = f(a) - f(\alpha)$$

ist.

Vorzüglich hat man sich für das Folgende nachstehenden Satz zu merken:

Wenn X, Y zwei beliebige Functionen von x sind, so ist immer

$$\int XY\partial x = X\int Y\partial x - \int \partial X \int Y\partial x\,.$$

Differentiirt man nämlich die Größe auf der rechten Seite nach den aus dem Obigen bekannten Regeln der Differentialrechnung, so erhält man als Differential:

$$X\partial \int Y\partial x + \partial X.\int Y\partial x - \partial \int \partial X \int Y\partial x$$

$$= XY\partial x + \partial X.\int Y\partial x - \partial X.\int X\partial x$$

$$= XY\partial x\,,$$

so daß also

$$X\int Y\partial x - \int \partial X \int Y\partial x$$

nach den vorhergehenden Erklärungen ein Werth des Integrals von $XY\partial x$ ist, wie behauptet wurde.

Ist a eine beliebige constante Größe, so ist immer

$$\int aX\partial x = a\int X\partial x\ ,$$

wovon man sich augenblicklich überzeugt, wenn man differentiirt.

Endlich hat man sich wegen des Folgenden auch noch zu merken, daß für jede beliebige Function $f(x)$ immer

$$\int_0^h f(x)\partial x = \int_0^h f(h-x)\partial x$$

ist.

Sey nämlich $\int f(x)\partial x = \varphi(x)$, so ist

$$\int_0^h f(x)\partial x = \varphi(h) - \varphi(0)\ .$$

So wie $\int f(x)\partial x = \varphi(x)$ ist, so ist auch

$$\int f(h-x)\,\partial(h-x) = \varphi(h-x) + C\ ,$$

wenn wir der Vollständigkeit wegen noch eine Constante beifügen. Aber $\partial(h-x) = -\partial x$. Also

$$\int -f(h-x)\partial x = \int(-1)f(h-x)\partial x = -\int f(h-x)\partial x = \varphi(h-x) + C,$$

$$\int f(h-x)\,\partial x = -\varphi(h-x) - C\ ,$$

$$\int_0^h f(h-x)\partial x = -\varphi(0) - C - \{-\varphi(h) - C\}$$
$$= \varphi(h) - \varphi(0)\ ;$$

folglich

$$\int_0^h f(x)\partial x = \int_0^h f(h-x)\partial x\ ,$$

wie behauptet wurde.

Für das Differential $x^n\partial x$ ist immer

$$\int x^n\,\partial x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ ,$$

wovon man sich auf der Stelle überzeugt, wenn man die Function auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens differentiirt.

37. Aus der vorher bewiesenen allgemeinen Formel

$$\int XY\partial x = X\int Y\partial x - \int\partial X\int Y\partial x$$

folgt nun durch deren successive Anwendung, wenn die derivirten Functionen auf gewöhnliche Weise bezeichnet, und x und h im Folgenden stets als constante Größen betrachtet werden:

$$\int f'(x+h-z)\partial z = f'(x+h-z)\int \partial z - \int \partial f'(x+h-z)\int \partial z$$
$$= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \int \frac{z}{1} f''(x+h-z)\partial z\,,$$

weil, wenn die folgenden derivirten Functionen alle in Bezug auf $x+h-z$ als einfache veränderliche Größe genommen werden,

$$\partial f'(x+h-z) = f''(x+h-z)\,\partial(x+h-z) = -f''(x+h-z)\partial z$$

ist. Also ferner

$$\int f'(x+h-z)\partial z = \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \tfrac{1}{1} f''(x+h-z)\int z\partial z$$
$$- \tfrac{1}{1}\int \partial f''(x+h-z)\int z\partial z$$
$$= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{1}{1.2}\int z^2 f'''(x+h-z)\partial z.$$
$$= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{1}{1.2} f'''(x+h-z)\int z^2\partial z$$
$$- \frac{1}{1.2}\int \partial f'''(x+h-z)\int z^2\partial z$$
$$= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\int z^3 f^{\text{iv}}(x+h-z)\partial z\,,$$

woraus schon klar ist, wie man auf diese Art weiter gehen muß. Daher ist allgemein

$$\int f'(x+h-z)\partial z = \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z)$$
$$+ \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z) + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x+h-z)$$
$$+ \int \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+h-z)\partial z\,,$$

und, wenn man nun das Integral zwischen den Gränzen $z=0$, $z=h$ nimmt:

$$\int_0^h f'(x+h-z)\partial z = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+h-z)\partial z\,.$$

Aber nach (36.)

$$\int_0^h f'(x+h-z)\partial z = \int_0^h f'(x+h-(h-z))\partial z = \int_0^h f'(x+z)\partial z\,.$$

Folglich

$$\int_0^h f'(x+z)\partial z = \frac{h}{1}f(x) + \frac{h^2}{1.2}f'(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\partial z .$$

Differentiirt man $f(x+z)$ nach z, so erhält man

$$\partial f(x+z) = f'(x+z)\partial(x+z) = f'(x+z)\partial z .$$

Also ist

$$\int f'(x+z)\partial z = f(x+z) + C ,$$

$$\int_0^h f'(x+z)\partial z = f(x+h) + C - f(x) - C$$
$$= f(x+h) - f(x) .$$

Folglich nach dem Obigen:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\partial z .$$

Auch ist nach (36.)

$$\int_0^h \frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\partial z = \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-(h-z))\partial z$$
$$= \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\partial z$$

und folglich

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\partial z ;$$

also, für $x=0$:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1}f'(0) + \frac{h^2}{1.2}f''(0) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)\partial z ,$$

oder, x für h gesetzt:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)\partial z .$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der in (32.) gefundenen Gleichung, so erhält man

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)\partial z = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(ix) ,$$

wo immer i einen positiven ächten Bruch bezeichnet.

Setzen wir

$$\int \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(z)\,\partial z = F(z)\,,$$

so ist

$$\partial F(z) = \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f_{(n)}(z)\,\partial z\,,$$

$$F'(z) = \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(z)\,.$$

Nach (29.) ist nun, wenn wir das dortige $a=0$, $b=x$ setzen, und Θ für das dortige i schreiben:

$$F(x) - F(0) = xF'(\Theta x)\,;$$

d. i.

$$F(x) - F(0) = x\frac{(x-\Theta x)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\Theta x)\,.$$

Aber nach dem Obigen

$$F(x) - F(0) = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(z)\,\partial z\,.$$

Folglich

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(z)\,\partial z = \frac{x^n(1-\Theta)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\Theta x)\,,$$

und demnach immer

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n(1-\Theta)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\Theta x)\,,$$

wo jederzeit Θ ein positiver ächter Bruch ist. Unter dieser Form ist die Reihe oft besonders bequem, wie wir jetzt an einigen Beispielen zeigen wollen.

38. Für $f(x) = (1+x)^\alpha$ ist nach (16.)

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\,,$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,.$$

Auch ist, wenn wir

$$t_n = \frac{x^n(1-\Theta)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\Theta x)$$

setzen:

$$t_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\ldots.(n-1)} x^n(1-\Theta)^{n-1}(1+\Theta x)^{\alpha-n}\,,$$

$$t_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{1\ldots.n} x^{n+1}(1-\Theta)^n(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}$$

$$= -\,t_n\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Folglich

$$t_n = \quad t_n$$
$$t_{n+1} = - t_n \frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)$$
$$t_{n+2} = \quad t_n \left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}^2\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)$$
$$t_{n+3} = - t_n \left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}^3\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)$$
$$t_{n+4} = \quad t_n \left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}^4\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+3}\right)$$

u. s. f. u. s. f.

Da die Factoren

$$1-\frac{\alpha}{n},\ 1-\frac{\alpha}{n+1},\ 1-\frac{\alpha}{n+2},\ 1-\frac{\alpha}{n+3},\ldots$$

sich immer mehr und mehr der Einheit nähern, so ist klar, daß sich das Product

$$t_n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n+m-1}\right)$$

immer mehr und mehr einer bestimmten Gränze nähert, je größer man m nimmt. Ist nun $x > -1$, $x < +1$, so ist, weil Θ positiv und < 1 ist, auch wenn $\Theta = 0$ wäre, dem absoluten Werthe nach

$$\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x} < 1\,,$$

und es kann folglich t_{n+m}, also auch t_n, wenn man nur n groß genug annimmt, der Null beliebig nahe gebracht werden, so daß also

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

ist, für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthaltene x. Für besondere Werthe des Exponenten α kann diese Gleichung noch für andere Werthe von x richtig seyn, worüber der Artikel Binomischer Lehrsatz i. d. Z. nachzusehen ist. Man darf aus dem Obigen, wozu man leicht verleitet werden könnte, nicht schließen, daß vorstehende Gleichung für jedes α gilt, wenn $x = +1$ ist, weil vielleicht auch $\Theta = 0$ seyn könnte. Dann wäre aber

$$\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x} = 1$$

für $x = 1$, also kein ächter Bruch, wie es doch bei den obigen Schlüssen erforderlich ist. In dem angeführten Artikel findet man nähere Bestimmungen über diesen Gegenstand.

Die Reihe

$$(1+ax)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}ax + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}a^2x^2 + \ldots.$$

ist richtig für $ax > -1$, $ax < +1$, d. i. für jedes x, dessen absoluter Werth $< \frac{1}{a}$ ist.

39. Für $f(x) = l(1+x)$ ist nach (16.)

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1).$$

Auch ist, wenn wir wieder

$$t_n = \frac{x^n(1-\Theta)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\Theta x)$$

setzen:

$$t_n = (-1)^{n-1}.\frac{x^n(1-\Theta)^{n-1}}{(1+\Theta x)^n},$$
$$t_{n+1} = (-1)^n.\frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{(1+\Theta x)^{n+1}} = -t_n.\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}.$$

Also

$$t_n = t_n$$
$$t_{n+1} = -t_n\left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}$$
$$t_{n+2} = t_n\left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}^2$$
$$t_{n+3} = -t_n\left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}^3$$
$$t_{n+4} = t_n\left\{\frac{x(1-\Theta)}{1+\Theta x}\right\}^4$$
u. s. f. u. s. f.

woraus man wieder auf ganz ähnliche Art wie vorher schließt, daß für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthaltene x, d. i. für jedes x, welches > -1, $< +1$ ist, immer

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

ist.

Man kann noch bemerken, daß diese Reihe auch noch für $x = 1$ gilt, wie leicht auf folgende Art mittelst des in (32.) bewiesenen Satzes gezeigt werden kann. Es ist nämlich

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(ix) = (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}.\left\{\frac{x}{1+ix}\right\}^n.$$

Ist nun $x = 1$, so ist klar, daß immer, auch selbst, wenn i, welches im Allgemeinen positiv und < 1 ist, $= 0$ seyn sollte, diese Größe der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n groß genug macht, weshalb also die obige Reihe nach (32.) auch für $x = 1$ gilt, und folglich

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots.$$

ist

Bezieht sich $\log(1+x)$ auf die Basis a, so ist nach (9.)

$$\log(1+x) = \mathrm{M}\,l(1+x)$$

wo

$$\mathrm{M} = \frac{1}{la} = \log e$$

ist. Also ist für jedes x zwischen den Gränzen -1 und $+1$, und für $x=1$:

$$\log(1+x) = \mathrm{M}(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots) .$$

40. Zweckmäßig wird an diesem Orte noch folgende eigentlich zur Integralrechnung gehörende Betrachtung eingeschaltet. Wenn nämlich

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots \varphi_n(x) ,$$

also auch

$$\varphi(x)\partial x = \varphi_1(x)\partial x + \varphi_2(x)\partial x + \varphi_3(x)\partial x + \ldots + \varphi_n(x)\partial x$$

ist; so ist immer

$$\int\varphi(x)\partial x = \int\varphi_1(x)\partial x + \int\varphi_2(x)\partial x + \int\varphi_3(x)\partial x + \ldots$$
$$\ldots + \int\varphi_n(x)\partial x + C ,$$

wovon man sich sogleich durch Differentiation überzeugt. Setzen wir nun

$$\int\varphi(x)\partial x = \Phi(x) ;$$

$$\int\varphi_1(x)\partial x = \Phi_1(x), \int\varphi_2(x)\partial x = \Phi_2(x), \ldots \int\varphi_n(x)\partial x = \Phi_n(x) ;$$

so ist

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) + \ldots + \Phi_n(x) + C ;$$

folglich

$$\Phi(a) = \Phi_1(a) + \Phi_2(a) + \Phi_3(a) + \ldots + \Phi_n(a) + C ,$$
$$\Phi(\alpha) = \Phi_1(\alpha) + \Phi_2(\alpha) + \Phi_3(\alpha) + \ldots + \Phi_n(\alpha) + C ,$$

und demnach durch Subtraction:

$$\Phi(a) - \Phi(\alpha) = \{\varphi_1(a) - \Phi_1(\alpha)\} + \{\Phi_2(a) - \Phi_2(\alpha)\} + \ldots$$
$$\ldots + \{\Phi_n(a) - \Phi_n(\alpha)\} ,$$

d. i. nach (36.)

$$\int_\alpha^a \varphi(x)\partial x = \int_\alpha^a \varphi_1(x)\partial x + \int_\alpha^a \varphi_2(x)\partial x + \ldots + \int_\alpha^a \varphi_n(x)\partial x .$$

Ist nun

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots$$

eine von $x=\alpha$ bis $x=a$ convergirende Reihe, deren Summe $=s$ ist; so sey für ein beliebiges n

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + \varphi_n(x) ,$$
$$s\partial x = u_0\partial x + u_1\partial x + u_2\partial x + \ldots + a_{n-1}\partial x + \varphi_n(x)\partial x .$$

Dann ist nach dem Vorhergehenden

$$\int_\alpha^a s\partial x = \int_\alpha^a u_0\partial x + \int_\alpha^a u_1\partial x + \int_\alpha^a u_2\partial x + \ldots$$

$$\ldots + \int_\alpha^a u_{n-1}\partial x + \int_\alpha^a \varphi_n(x)\partial x\,.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int \varphi_n(x)\partial x = \varphi_{n+1}(x)\,;$$

so ist, wenn $\varphi_{n+1}(x)$ und $\varphi_n(x)$ zwischen den Gränzen $x=\alpha$, $x=a$ stetig sind, nach (29.)

$$\varphi_{n+1}(a) - \varphi_{n+1}(\alpha) = (a-\alpha)\varphi_n(\alpha + i(a-\alpha))\,,$$

wo immer i einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Da

$$i = M(0, 1)$$

ist, so ist auch nach den aus dem Obigen bekannten Sätzen von den Mittelgrößen:

$$i(a-\alpha) = M(0, a-\alpha)\,,$$

und, wenn man α addirt:

$$\alpha + i(a-\alpha) = M(\alpha, a)\,,$$

d. i. $\alpha + i(a-\alpha)$ eine Mittelgröße zwischen α und a. Weil nun nach der Voraussetzung die Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \ldots$$

von $x=\alpha$ bis $x=a$ convergirt, so kann durch Vergrößerung von n offenbar $\varphi_n(\alpha + i(a-\alpha))$, also auch

$$(a-\alpha)\varphi_n(\alpha + i(a-\alpha)) = \varphi_{n+1}(a) - \varphi_{n+1}(\alpha)$$

der Null beliebig nahe gebracht werden. Es ist aber nach (36.)

$$\varphi_{n+1}(a) - \varphi_{n+1}(\alpha) = \int_\alpha^a \varphi_n(x)\partial x\,,$$

und man kann also durch Vergrößerung von n auch dieses bestimmte Integral der Null beliebig nahe bringen. Folglich ist nach dem Obigen von $x=\alpha$ bis $x=a$:

$$\int_\alpha^a s\partial x = \int_\alpha^a u_0\partial x + \int_\alpha^a u_1\partial x + \int_\alpha^a u_2\partial x + \int_\alpha^a u^3\partial x + \ldots\,,$$

eine convergirende Reihe, und $\int_\alpha^a s\partial x$ die Summe derselben. Wäre die Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \ldots$$

nur zwischen den Gränzen $x=\alpha$, $x=a$, d. i. für $x>\alpha$, $x<a$ convergent, und s die Summe derselben, so würde diese Reihe von $x=\alpha'$, bis $x=a'$, wo α' und a' zwei gewisse den Größen α und a respective unendlich nahe kommende Größen bezeichnen, convergiren und s ihre Summe seyn. Folglich wäre auch nur von $x=\alpha'$ bis $x=a'$, d. i. für jedes x zwischen

den Gränzen $x = \alpha$, $x = a$, oder für jedes x, welches $> \alpha$, $< a$ ist, nach dem Vorhergehenden

$$\int_\alpha^a s\partial x = \int_\alpha^a u_0 \partial x + \int_\alpha^a u_1 \partial x + \int_\alpha^a u_2 \partial x + \int_\alpha^a u_3 \partial x + \ldots.$$

Natürlich hat man hierbei immer auch die oben gemachten Voraussetzungen wegen der Stetigkeit der Functionen festzuhalten.

Nach (38.) ist für jedes x, welches zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten, d. i. > -1, $< +1$ ist, wenn man a. a. O. $\alpha = -\frac{1}{2}$ setzt:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \ldots.$$

Folglich nach dem Vorhergehenden, wenn man zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = x$ integrirt, für jedes x zwischen den Gränzen -1 und $+1$:

$$\int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x = x + \tfrac{1}{2}\int_0^x x^2 \partial x + \frac{1.3}{2.4}\int_0^x x^4 \partial x + \frac{1.3.5}{2.4.6}\int_0^x x^6 \partial x + \ldots,$$

d. i. nach (36.)

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} + \ldots.$$

Nach (10.) ist

$$\partial \operatorname{Arc\,sin} x = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}};$$

also

$$\operatorname{Arc\,sin} x - \operatorname{Arc\,sin} 0 = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

$$\operatorname{Arc\,sin} x = \operatorname{Arc\,sin} 0 + x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

oder, wenn α eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\operatorname{Arc\,sin} x = \alpha\pi + x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Bezeichnet aber jetzt $\operatorname{Arc\,sin} x$ den zu x als Sinus gehörenden Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so ist

$$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

wovon man sich durch eine ganz ähnliche einfache Betrachtung wie in Bezug auf $\operatorname{Arc\,tang} x$ in (35.) überzeugen kann. Der Werth von x muß immer der Bedingung $x > -1$, $x < +1$ genügen. Für $x = \pm 1$ wird obige Reihe

$$\pm\left\{1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7} + \ldots\right\},$$

welches ebenfalls eine convergirende Reihe ist, wie auf folgende Art gezeigt werden kann. Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ ist nach (38.)

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots,$$

oder der Kürze wegen

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots,$$

und diese Reihe convergirt immer, wenn nur der absolute Werth von $x < 1$ ist. Daher kann, indem n wächst, wenn wir

$$s_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$

setzen, die Differenz

$$s_{n+m} - s_n = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+m-1}x^{n+m-1}$$

für jedes m der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn nur x, welches wir von jetzt an als positiv annehmen wollen, < 1 ist, so daß wir also setzen können, daß n so bestimmt sey, daß

$$s_{n+m} - s_n < N$$

ist, wenn N eine gegebene beliebig kleine positive Größe bezeichnet. Da nun die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ offenbar beständig abnehmen, so kann man augenscheinlich die positive ganze Zahl ν so annehmen, daß zugleich

$$\frac{1}{2\nu+1} < x^{n+m-1}, \quad a_\nu < a_{n+m-1}$$

ist. Weil aber

$$\frac{1}{2\nu+1} \text{ und } a_\nu$$

unter den Größen

$$\frac{1}{2\nu+1}, \frac{1}{2\nu+3}, \frac{1}{2\nu+5}, \ldots \frac{1}{2\nu+2m-1};$$

$$a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots a_{\nu+m-1}$$

respective die größten, dagegen

$$x^{n+m-1} \text{ und } a_{n+m-1}$$

unter den Größen

$$x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots x^{n+m-1};$$

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+m-1}$$

respective die kleinsten sind; so ist offenbar

$$\frac{1}{2\nu+1} < x^n, \quad a_\nu < a_n;$$

$$\frac{1}{2\nu+3} < x^{n+1}, \quad a_{\nu+1} < a_{n+1};$$

$$\frac{1}{2\nu+5} < x^{n+2}, \quad a_{\nu+2} < a_{n+2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2\nu+2m-1} < x^{n+m-1}, \quad a_{\nu+m-1} < a_{n+m-1};$$

folglich

$$a_\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1} + a_{\nu+1} \cdot \frac{1}{2\nu+3} + \ldots + a_{\nu+m-1} \cdot \frac{1}{2\nu+2m-1}$$
$$< a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+m-1} x^{n+m-1},$$

d. i., wenn wir

$$S_\nu = a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{3} + a_2 \cdot \tfrac{1}{5} + a_3 \cdot \tfrac{1}{7} + \ldots + a_{\nu-1} \cdot \frac{1}{2\nu-1}$$

setzen,

$$S_{\nu+m} - S_\nu < s_{n+m} - s_n,$$

oder $S_{\nu+m} - S_\nu < N$, so daß man also auch, für wachsende ν, diese Differenz für jedes m der Null beliebig nahe bringen kann, und daß folglich die Reihe

$$a_0, \; a_1 \cdot \tfrac{1}{3}, \; a_2 \cdot \tfrac{1}{5}, \; a_3 \cdot \tfrac{1}{7}, \; a_5 \cdot \tfrac{1}{9}, \ldots$$

d. i.

$$1, \; \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3}, \; \frac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{1}{5}, \; \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \tfrac{1}{7}, \; \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \tfrac{1}{9}, \ldots$$

convergent ist, wie behauptet wurde. Also ist

$$x + \tfrac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

auch für $x = \pm 1$ noch eine convergente Reihe. Außerdem ist auch $\operatorname{Arc\,sin} x$ in der Nähe von $x = \pm 1$ offenbar eine stetige Function, woraus sich also, verbunden mit dem Vorhergehenden, ergiebt, daß man in der Gleichung

$$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

auch noch $x = \pm 1$ setzen kann. Für $x = 1$ ist aber, da $\operatorname{Arc\,sin} x$ nach dem Vorhergehenden der zu $x = 1$ als Sinus gehörende Bogen ist, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, $\operatorname{Arc\,sin} x = \tfrac{1}{2}\pi$, und folglich

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \tfrac{1}{7} + \ldots$$

41. Wir wollen nun auch noch die Functionen

$$f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad F(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

in Reihen zu entwickeln suchen. Differentiirt man die erste Function, so erhält man

$$f'(x) = e^{\alpha x} \{ \alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x \}.$$

Setzt man aber

$$\varphi = \operatorname{Arc\,cos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \operatorname{Arc\,sin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

so ist

$$\alpha = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi; \quad \beta = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi;$$

folglich

$$f'(x) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \{ \cos \varphi \cos \beta x - \sin \varphi \sin \beta x \}$$
$$= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \cos(\varphi + \beta x).$$

Hieraus ergiebt sich durch fernere Differentiation:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \{ \alpha \cos(\varphi+\beta x) - \beta \sin(\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{2}} e^{\alpha x} \{ \cos\varphi \cos(\varphi+\beta x) - \sin\varphi \sin(\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{2}} e^{\alpha x} \cos(2\varphi+\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{2}} e^{\alpha x} \{ \alpha \cos(2\varphi+\beta x) - \beta \sin(2\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}} e^{\alpha x} \{ \cos\varphi \cos(2\varphi+\beta x) - \sin\varphi \sin(2\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}} e^{\alpha x} \cos(3\varphi+\beta x) \,. \end{aligned}$$

So weiter gehend, ergiebt sich:

$$f^{(n)}(x) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}} e^{\alpha x} \cos(n\varphi+\beta x) \,.$$

Auf ähnliche Art erhält man

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{\alpha x} \{ \beta \cos\beta x + \alpha \sin\beta x \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \{ \sin\varphi \cos\beta x + \cos\varphi \sin\beta x \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \sin(\varphi+\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F''(x) &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \{ \beta \cos(\varphi+\beta x) + \alpha \sin(\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{2}} e^{\alpha x} \{ \sin\varphi \cos(\varphi+\beta x) + \cos\varphi \sin(\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{2}} e^{\alpha x} \sin(2\varphi+\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'''(x) &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{2}} e^{\alpha x} \{ \beta \cos(2\varphi+\beta x) + \alpha \sin(2\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}} e^{\alpha x} \{ \sin\varphi \cos(2\varphi+\beta x) + \cos\varphi \sin(2\varphi+\beta x) \} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}} e^{\alpha x} \sin(3\varphi+\beta x) \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Also ist allgemein

$$F^{(n)}(x) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}} e^{\alpha x} \sin(n\varphi+\beta x) \,.$$

Folglich

$$f^{(n)}(0) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}} \cos n\varphi \,,$$

$$F^{(n)}(0) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}} \sin n\varphi \,.$$

Ferner ist auch

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(ix) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}} . \frac{e^{\alpha ix} x^n \cos(n\varphi+\beta ix)}{1.2.3.4\ldots.n} \,,$$

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(ix) = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}} . \frac{e^{\alpha ix} x^n \sin(n\varphi+\beta ix)}{1.2.3.4\ldots.n} \,.$$

i ist hier immer positiv und < 1. Der größte absolute Werth von $\cos(n\varphi+\beta ix)$ und $\sin(n\varphi+\beta ix)$ ist die Einheit. Da ferner $e > 1$ ist, so ist, wenn αx positiv ist, immer $e^{\alpha ix} < e^{\alpha x}$. Ist dagegen αx negativ, so ist offenbar immer $e^{\alpha ix} < 1$, wenigstens nie > 1. Man sieht also, daß durch Vergrößerung von n

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(ix) \text{ und } \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(ix)$$

der Null beliebig nahe gebracht werden können, indem es immer verstattet ist $n > x$ zu nehmen, rücksichtlich des absoluten Werthes von x, wobei (33.) verglichen werden kann. Folglich ist nach (32.), wenn wir der Kürze wegen

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \varrho$$

setzen:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = 1 + \varrho\cos\varphi\,.\frac{x}{1} + \varrho^2\cos 2\varphi\,.\frac{x^2}{1.2} + \varrho^3\cos 3\varphi\,.\frac{x^3}{1.2.3} + \varrho^4\cos 4\varphi\,.\frac{x^4}{1\ldots 4} + \ldots,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \varrho\sin\varphi\,.\frac{x}{1} + \varrho^2\sin 2\varphi\,.\frac{x^2}{1.2} + \varrho^3\sin 3\varphi\,.\frac{x^3}{1.2.3} + \varrho^4\sin 4\varphi\,.\frac{x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$

für

$$\varphi = \text{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \text{Arc}\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,.$$

Beide Reihen sind nach dem Obigen convergent, für jedes x.

42. Betrachten wir jetzt die imaginäre Reihe

$$1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots,$$

so läßt sich leicht zeigen, daß dieselbe für jedes x und y convergirt, und zugleich kann mittelst des Vorhergehenden leicht die Summe dieser Reihe gefunden werden. Setzen wir nämlich

$$x+y\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1});$$

so ist

$$\varrho\cos\varphi = x,\quad \varrho\sin\varphi = y\,.$$

Folglich

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\varphi = \text{Arc}\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{Arc}\sin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Ferner ist bekanntlich

$$x+y\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$
$$(x+y\sqrt{-1})^2 = \varrho^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\sqrt{-1})$$
$$(x+y\sqrt{-1})^3 = \varrho^3(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi\sqrt{-1})$$
$$(x+y\sqrt{-1})^4 = \varrho^4(\cos 4\varphi + \sin 4\varphi\sqrt{-1})$$

u. s. f. u. s. f.;

also unsere obige Reihe

$$= 1 + \frac{\varrho\cos\varphi}{1} + \frac{\varrho^2\cos 2\varphi}{1.2} + \frac{\varrho^3\cos 3\varphi}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \left\{\varrho\sin\varphi + \frac{\varrho^2\sin 2\varphi}{1.2} + \frac{\varrho^3\sin 3\varphi}{1.2.3} + \frac{\varrho^4\sin 4\varphi}{1\ldots4} + \ldots\right\}\sqrt{-1}$$

d. i. nach (41.)

$$= e^x\cos y + e^x\sin y\sqrt{-1} = e^x(\cos y + \sin y\sqrt{-1}).$$

Nach (33.) ist für jedes reelle x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \ldots$$

Setzt man in dieser Reihe $x + y\sqrt{-1}$ für x, so erhält man die obige stets convergirende imaginäre Reihe. Der Analogie wegen versteht man daher in der Analysis unter der Potenz $e^{x+y\sqrt{-1}}$ mit dem imaginären Exponenten $x+y\sqrt{-1}$ die immer convergirende Reihe

$$1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und es ist folglich nach dem Vorhergehenden:

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sin y\sqrt{-1}).$$

Für $x=0$ erhält man

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sin y\sqrt{-1},$$

so daß also immer

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x . e^{y\sqrt{-1}}$$

ist. Setzt man $-y$ für y, so erhält man:

$$e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sin y\sqrt{-1};$$

folglich mittelst Addition und Subtraction:

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Weil ferner nach (33.) allgemein für jedes reelle x

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \ldots$$

ist, so setzt man der Analogie wegen

$$a^{x+y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{(x+y\sqrt{-1})\,la}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2(la)^2}{1.2} + \ldots$$
$$= 1 + \varrho\cos\varphi\frac{la}{1} + \varrho^2\cos 2\varphi\frac{(la)^2}{1.2} + \varrho^3\cos 3\varphi\frac{(la)^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \left\{\varrho\sin\varphi\frac{la}{1} + \varrho^2\sin 2\varphi\frac{(la)^2}{1.2} + \varrho^3\sin 3\varphi\frac{(la)^3}{1.2.3} + \ldots\right\}\sqrt{-1}$$

d. i. nach (41.)

$$a^{x+y\sqrt{-1}} = e^{xla}\cos(yla) + e^{xla}\sin(yla)\sqrt{-1}$$
$$= e^{xla}\{\cos(yla) + \sin(yla)\sqrt{-1}\}$$

Für $x = 0$ ist also

$$a^{y\sqrt{-1}} = \cos(yla) + \sin(yla)\sqrt{-1};$$

folglich

$$a^{x+y\sqrt{-1}} = a^x . a^{y\sqrt{-1}}.$$

Auch hat man

$$(a^{x+y\sqrt{-1}})^n = e^{nxla}\{\cos(yla) + \sin(yla)\sqrt{-1}\}^n$$
$$= e^{nxla}\{\cos(nyla) + \sin(nyla)\sqrt{-1}\}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$a^{nx+ny\sqrt{-1}} = e^{nxla}\{\cos(nyla) + \sin(nyla)\sqrt{-1}\}.$$

Folglich immer

$$(a^{x+y\sqrt{-1}})^n = a^{nx+ny\sqrt{-1}}.$$

Alle Regeln der Rechnung mit Potenzen, welche gewöhnlich bloß für reelle Größen bewiesen werden, müssen auf diese Art auf imaginäre Größen ausgedehnt werden.

Sind y, z Functionen von x, so ist

$$a^{y+z\sqrt{-1}} = e^{yla}\{\cos(zla) + \sin(zla)\sqrt{-1}\}.$$

Differentiirt man nun, so wird nach (13.)

$$\begin{aligned}
\partial . a^{y+z\sqrt{-1}} &= e^{yla}\{\cos(zla) + \sin(zla)\sqrt{-1}\}\, la\,\partial y \\
&\quad - e^{yla}\{\sin(zla) - \cos(zla)\sqrt{-1}\}\, la\,\partial z \\
&= e^{yla}\{\cos(zla) + \sin(zla)\sqrt{-1}\}\, la\,\partial y \\
&\quad + e^{yla}\{\sin(zla) - \cos(zla)\sqrt{-1}\}(\sqrt{-1})^2\, la\,\partial z \\
&= e^{yla}\{\cos(zla) + \sin(zla)\sqrt{-1}\}\, la\,\partial y \\
&\quad + e^{yla}\{\cos(zla) + \sin(zla)\sqrt{-1}\}\sqrt{-1}\, la\,\partial z \\
&= e^{yla}\{\cos(zla) + \sin(zla)\sqrt{-1}\}(\partial y + \partial z\sqrt{-1})\, la.
\end{aligned}$$

Folglich

$$\partial . a^{y+z\sqrt{-1}} = a^{y+z\sqrt{-1}}(\partial y + \partial z\sqrt{-1})\, la,$$
$$\partial . e^{y+z\sqrt{-1}} = e^{y+z\sqrt{-1}}(\partial y + \partial z\sqrt{-1}),$$

so daß also die in (15.) bewiesenen Formeln auch gelten, wenn der Exponent imaginär ist.

43. Wenn

$$a^{p+q\sqrt{-1}} = y + z\sqrt{-1}$$

ist, so heißt $p + q\sqrt{-1}$ der Logarithmus von $y + z\sqrt{-1}$ in Bezug auf a als Basis. Nach (42.) ist nun

$$a^{p+q\sqrt{-1}} = e^{pla}\{\cos(qla) + \sin(qla)\sqrt{-1}\};$$

folglich

$$e^{pla}\{\cos(qla) + \sin(qla)\sqrt{-1}\} = y + z\sqrt{-1},$$

und demnach

$$e^{pla}\cos(qla) = y;\quad e^{pla}\sin(qla) = z;$$

also

$$e^{2pla} = y^2 + z^2,$$

und folglich, wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$p = \frac{l(y^2+z^2)}{2la}.$$

Ferner ist

$$\cos(qla) = \frac{y}{e^{pla}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

$$\sin(qla) = \frac{z}{e^{pla}} = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

oder

$$q = \frac{1}{la} s\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{1}{la}\text{Arc sin}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Auch ist

$$\text{tang}(qla) = \frac{z}{y},\quad q = \frac{1}{la}\text{Arc tang}\frac{z}{y}.$$

Folglich

$$\log(y+z\sqrt{-1}) = \frac{l(y^2+z^2)}{2la} + \frac{1}{la}\text{Arc tang}\frac{z}{y}\cdot\sqrt{-1},$$

$$l(y+z\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}l(y^2+z^2) + \text{Arc tang}\frac{z}{y}\cdot\sqrt{-1}.$$

Nach (9.) ist immer $M = \frac{1}{la}$; also

$$\log(y+z\sqrt{-1}) = Ml(y+z\sqrt{-1}).$$

Nun ist

$$\partial\log(y+z\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}M\partial l(y^2+z^2) + M\partial\,\text{Arc tang}\frac{z}{y}\cdot\sqrt{-1}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\partial l(y^2+z^2) = \frac{2y\partial y + 2z\partial z}{y^2+z^2},\quad \partial\,\text{Arc tang}\frac{z}{y} = \frac{y\partial z - z\partial y}{y^2+z^2}.$$

Folglich

$$\partial\log(y+z\sqrt{-1}) = M\left\{\frac{y\partial y + z\partial z}{y^2+z^2} + \frac{y\partial z - z\partial y}{y^2+z^2}\sqrt{-1}\right\}$$

$$= M\frac{y(\partial y + \partial z\sqrt{-1}) + z(\partial z - \partial y\sqrt{-1})}{y^2+z^2}$$

$$= M\frac{y(\partial y + \partial z\sqrt{-1}) - z(\partial z - \partial y\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^2}{y^2+z^2}$$

$$= M\frac{y(\partial y+\partial z\sqrt{-1})-z(\partial y+\partial z\sqrt{-1})\sqrt{-1}}{(y+z\sqrt{-1})(y-z\sqrt{-1})}$$

$$= M\frac{(y-z\sqrt{-1})(\partial y+\partial z\sqrt{-1})}{(y+z\sqrt{-1})(y-z\sqrt{-1})},$$

d. i.

$$\partial\log(y+z\sqrt{-1}) = M\frac{\partial y+\partial z\sqrt{-1}}{y+z\sqrt{-1}},$$

$$\partial l(y+z\sqrt{-1}) = \frac{\partial y+\partial z\sqrt{-1}}{y+z\sqrt{-1}}.$$

44. Setzt man in den in (42.) für $\cos y$ und $\sin y$ gefundenen Ausdrücke $y+z\sqrt{-1}$ für y, so erhält man:

$$\cos(y+z\sqrt{-1}) = \frac{e^{-z+y\sqrt{-1}}+e^{z-y\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin(y+z\sqrt{-1}) = \frac{e^{-z+y\sqrt{-1}}-e^{z-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Aber nach (42.)

$$e^{-z+y\sqrt{-1}} = e^{-z}e^{y\sqrt{-1}} = e^{-z}(\cos y+\sin y\sqrt{-1}),$$

$$e^{z-y\sqrt{-1}} = e^{z}e^{-y\sqrt{-1}} = e^{z}(\cos y-\sin y\sqrt{-1});$$

folglich

$$\cos(y+z\sqrt{-1}) = \frac{(e^z+e^{-z})\cos y}{2} - \frac{(e^z-e^{-z})\sin y}{2}\sqrt{-1},$$

$$\sin(y+z\sqrt{-1}) = \frac{(e^z+e^{-z})\sin y}{2} + \frac{(e^z-e^{-z})\cos y}{2}\sqrt{-1}.$$

Differentiirt man nun, so wird

$$\partial\cos(y+z\sqrt{-1}) = -\frac{(e^z+e^{-z})\sin y\partial y}{2} + \frac{(e^z-e^{-z})\cos y\partial z}{2}$$
$$-\frac{(e^z-e^{-z})\cos y\partial y}{2}\sqrt{-1} - \frac{(e^z+e^{-z})\sin y\partial z}{2}\sqrt{-1}$$
$$= -\left\{\frac{(e^z+e^{-z})\sin y}{2} + \frac{(e^z-e^{-z})\cos y}{2}\sqrt{-1}\right\}(\partial y+\partial z\sqrt{-1})$$

$$\partial\sin(y+z\sqrt{-1}) = \frac{(e^z+e^{-z})\cos y\partial y}{2} + \frac{(e^z-e^{-z})\sin y\partial z}{2}$$
$$-\frac{(e^z-e^{-z})\sin y\partial y}{2}\sqrt{-1} + \frac{(e^z+e^{-z})\cos y\partial z}{2}\sqrt{-1}$$
$$= \left\{\frac{(e^z+e^{-z})\cos y}{2} - \frac{(e^z-e^{-z})\sin y}{2}\sqrt{-1}\right\}(\partial y+\partial z\sqrt{-1});$$

d. i.

$$\partial\cos(y+z\sqrt{-1}) = -\sin(y+z\sqrt{-1})(\partial y+\partial z\sqrt{-1}),$$

$$\partial\sin(y+z\sqrt{-1}) = \cos(y+z\sqrt{-1})(\partial y+\partial z\sqrt{-1}).$$

Wie man auf diese Art auch die übrigen oben für reelle Functionen bewiesenen Regeln der Differentialrechnung auch für imaginäre Functionen rechtfertigen kann, erhellet aus den bisherigen Beispielen hinlänglich.

III. Von den Differentialen der entwickelten Functionen mit mehrern veränderlichen Größen.

45. Nach (32.) ist

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(x+ih),$$

oder, wenn wir $h = \partial x$ setzen, wo ∂x eine constante Größe bezeichnet:

$$f(x+\partial x) = f(x) + \tfrac{1}{1} f'(x)\partial x + \frac{1}{1.2} f''(x)\partial x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)\partial x^{n-1} + \frac{1}{1\ldots n} f^{(n)}(x+i\partial x)\partial x^n.$$

Nach (16.) ist aber allgemein

$$\partial^n f(x) = f^{(n)}(x)\partial x^n.$$

Folglich kann man vorstehende Reihe auch auf folgende Art schreiben:

$$f(x+\partial x) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{1} + \frac{\partial^2 f(x)}{1.2} + \frac{\partial^3 f(x)}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^{n-1} f(x)}{1.2.3..(n-1)} + \frac{f^{(n)}(x+i\partial x)\partial x^n}{1.2.3.4\ldots n}.$$

Verschwindet das letzte Glied dieser Formel für $n = \infty$, so wird durch dieselbe $f(x+\partial x)$ in eine nach den positiven ganzen Potenzen von ∂x fortschreitende Reihe entwickelt.

46. Etwas Aehnliches läßt sich, wie nun gezeigt werden soll, für jede Function

$$V = f(x, y, z, u, \ldots.)$$

einer beliebigen Anzahl von einander unabhängiger veränderlicher Größen $x, y, z, u, \ldots.$ leisten. Verändern sich nämlich die veränderlichen Größen respective um $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \ldots\ldots,$ wo $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \ldots.$ immer constante Größen bezeichnen, so geht die Function in

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z,\ u+\partial u,\ \ldots.)$$

über, und man kann nun verlangen, diese neue Function, wenn es möglich ist, in eine Reihe zu entwickeln, deren Glieder nach gleich hohen Dimensionen von $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \ldots.$ geordnet sind. Um zu einer solchen Entwickelung zu gelangen, wollen wir

eine beliebige neue veränderliche Größe α einführen, und mit derselben jedes Increment multipliciren, wodurch wir die Function

$$f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u,\ \ldots) = F(\alpha)$$

erhalten. Betrachten wir in dieser Function bloß α als unabhängige veränderliche Größe, so ist nach (32.)

$$f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u,\ \ldots)$$
$$= F(0) + \frac{\alpha}{1}F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2}F''(0) + \frac{\alpha^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \frac{\alpha^n}{1\ldots n}F^{(n)}(i\alpha).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\alpha = 1$, so erhält man, wie sogleich näher gezeigt werden wird, für

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z,\ u+\partial u,\ \ldots)$$

einen Ausdruck von der verlangten Form, dessen letztes Glied jedoch nur dann vernachlässigt werden kann, wenn dasselbe für $n = \infty$ und $\alpha = 1$ verschwindet. Zunächst kommt es nun auf eine nähere Betrachtung der Größen $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$, ... an, wozu wir jetzt übergehen wollen.

47. Auf der Stelle erhellet, daß

$$F(0) = f(x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots) = V$$

ist. Betrachtet man bloß eine veränderliche Größe der Function V, z. B. x, als veränderlich, und entwickelt in Bezug auf diese veränderliche Größe, indem man alle übrigen wie constante Größen behandelt, ein beliebiges, z. B. das nte Differential von V, so soll dasselbe im Folgenden immer durch $\partial_x^n V$ bezeichnet, und ein partielles Differential genannt werden. Eben so wollen wir die nte derivirte Function, wenn bloß x als veränderlich betrachtet wird, durch

$$f_x^{(n)}(x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots)$$

bezeichnen, so daß also in dieser Bezeichnung nach dem Obigen immer

$$\partial_x^n V = f_x^{(n)}(x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots)\partial x^n$$

ist.

Nach (45.) hat man für $n = 1$, wenn i_1, i_2, i_3, i_4, ... lauter positive Größen bezeichnen, die sämmtlich kleiner als die Einheit sind, folgende Reihe von Gleichungen:

$$f(x+\alpha\partial x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots) - f(x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots)$$
$$= f'_x(x+i_1\alpha\partial x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots).\alpha\partial x$$
$$f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z,\ u,\ \ldots) - f(x+\alpha\partial x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots)$$
$$= f'_y(x+\alpha\partial x,\ y+i_2\alpha\partial y,\ z,\ u,\ \ldots).\alpha\partial y$$
$$f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u,\ \ldots) - f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z,\ u,\ \ldots)$$
$$= f'_z(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+i_3\alpha\partial z,\ u,\ \ldots).\alpha\partial z$$

$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, u+\alpha\partial u, \ldots) - f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, u, \ldots)$$
$$= f'_u(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, u+i_4\alpha\partial u, \ldots).\alpha\partial u$$
u. s. f. u. s. f.

Folglich, wenn man addirt, und durch α dividirt:

$$\frac{f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, u+\alpha\partial u, \ldots) - f(x, y, z, u, \ldots)}{\alpha}$$
$$= f'_x(x+i_1\alpha\partial x, y, z, u, \ldots)\partial x$$
$$+ f'_y(x+\alpha\partial x, y+i_2\alpha\partial y, z, u, \ldots)\partial y$$
$$+ f'_z(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+i_3\alpha\partial z, u, \ldots)\partial z$$
$$+ f'_u(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, u+i_4\alpha\partial u, \ldots)\partial u$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Läßt man nun α sich der Null nähern, so erhellet, wenn wir wieder der Kürze wegen

$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, u+\alpha\partial u, \ldots) = F(\alpha),$$
$$f(x, y, z, u, \ldots) = F(0)$$

setzen, auf der Stelle die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$\operatorname{Lim}\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} = f'_x(x, y, z, u, \ldots)\partial x$$
$$+ f'_y(x, y, z, u, \ldots)\partial y$$
$$+ f'_z(x, y, z, u, \ldots)\partial z$$
$$+ f'_u(x, y, z, u, \ldots)\partial u$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\operatorname{Lim}\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} =$$
$$\partial_x f(x,y,z,u,\ldots) + \partial_y f(x,y,z,u,\ldots) + \partial_z f(x,y,z,u,\ldots)$$
$$+ \partial_u f(x, y, z, u, \ldots) + \ldots.$$
$$= \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + \ldots.$$

Ferner ist nach dem Obigen, wenn ξ eine beliebige veränderliche Größe, Θ eine positive Größe, die < 1 ist, bezeichnet:

$$F(\xi+\alpha) = F(\xi) + F'(\xi+\Theta\alpha).\alpha,$$
$$\frac{F(\xi+\alpha)-F(\xi)}{\alpha} = F'(\xi+\Theta\alpha);$$

folglich für $\xi = 0$:

$$\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} = F'(\Theta\alpha),$$

und demnach offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} = F'(0),$$

so daß also nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} F'(0) = \; & f_x(x, y, z, u, \ldots)\partial x \\ & + f_y(x, y, z, u, \ldots)\partial y \\ & + f_z(x, y, z, u, \ldots)\partial z \\ & + f_u(x, y, z, u, \ldots)\partial u \\ & + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{aligned}$$

$$= \partial_x f(x,y,z,u,\ldots) + \partial_y f(x,y,z,u,\ldots) + \partial_z f(x,y,z,u,\ldots) + \ldots.$$

$$= \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + \ldots.$$

ist. Man sieht hieraus, daß das zweite Glied der in (46.) für $F(\alpha)$ gefundenen Reihe die Incremente ∂x, ∂y, ∂z, ∂u, ..., wie erfordert wird, sämmtlich bloß in der ersten Dimension enthält.

Man kann aus dem hier Bewiesenen auch noch einen andern für die ganze Differentialrechnung sehr wichtigen Satz ableiten. Wir haben nämlich gesehen, daß, wenn wir

$$V = f(x, y, z, u, \ldots.)$$

setzen, die Gränze, welcher

$$\frac{f(x+\alpha\partial x,\; y+\alpha\partial y,\; z+\alpha\partial z, \ldots.) - f(x, y, z, \ldots.)}{\alpha}$$

sich nähert, wenn α sich der Null nähert,

$$= \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + \ldots.$$

ist. Sey nun

$$V = f(u, v, w, \ldots.);$$

wo u, v, w, ... nicht mehr unabhängige veränderliche Größen, sondern sämmtlich Functionen von x sind; so gehen u, v, w, ..., wenn man x sich um Δx verändern läßt, in $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$, ..., also V in

$$f(u+\Delta u,\; v+\Delta v,\; w+\Delta w, \ldots.)$$

über, und es ist folglich

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u,\; v+\Delta v,\; w+\Delta w, \ldots) - f(u, v, w, \ldots)}{\Delta x},$$

oder

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{f\left(u+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x,\; v+\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x,\; w+\frac{\Delta w}{\Delta x}\Delta x, \ldots\right) - f(u, v, w, \ldots)}{\Delta x}.$$

Für $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \chi(x)$, ... nähern sich, wenn Δx sich der Null nähert, die Verhältnisse $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, ... bekanntlich den Gränzen $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, $\chi'(x)$, ..., welche in dieser Beziehung als constant zu betrachten sind, so daß also, wenn Δx sich der Null nähert, $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ sich immer mehr und mehr der Größe

$$\frac{f(u+\varphi'(x)\Delta x,\; v+\psi'(x)\Delta x,\; w+\chi'(x)\Delta x, \ldots) - f(u, v, w, \ldots)}{\Delta x}$$

nähert, wo, wie schon erinnert, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, $\chi'(x)$, ... constante Größen sind, so wie auch u, v, w, ... von der Veränderung von Δx nicht mehr afficirt werden. Nach dem Vorhergehenden ist aber allgemein, wenn ∂x, ∂y, ∂z, ... constant sind, indem α sich der Null nähert:

$$\text{Lim}\,\frac{f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ \ldots)-f(x,\ y,\ z,\ \ldots)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}=\ & f'_x(x,\ y,\ z,\ \ldots.)\partial x\\ +\ & f'_y(x,\ y,\ z,\ \ldots.)\partial y\\ +\ & f'_z(x,\ y,\ z,\ \ldots.)\partial z\\ +\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

Also ist offenbar auch, wenn Δx sich der Null nähert:

$$\text{Lim}\,\frac{f(u+\varphi'(x)\Delta x, v+\psi'(x)\Delta x, w+\chi'(x)\Delta x+\ldots)-f(u,\ v,\ w,\ \ldots)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}=\ & f'_u(u,\ v,\ w,\ \ldots)\varphi'(x)\\ +\ & f'_v(u,\ v,\ w,\ \ldots)\psi'(x)\\ +\ & f'_w(u,\ v,\ w,\ \ldots)\chi'(x)\\ +\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

und folglich auch nach dem Obigen, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned}\text{Lim}\,\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{\partial V}{\partial x}=\ & f'_u(u,\ v,\ w,\ \ldots)\varphi'(x)\\ +\ & f'_v(u,\ v,\ w,\ \ldots)\psi'(x)\\ +\ & f'_w(u,\ v,\ w,\ \ldots)\chi'(x)\\ +\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial V=\ & f'_u(u,\ v,\ w,\ \ldots)\varphi'(x)\partial x\\ +\ & f'_v(u,\ v,\ w,\ \ldots)\psi'(x)\partial x\\ +\ & f'_w(u,\ v,\ w,\ \ldots)\chi'(x)\partial x\\ +\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

Aber bekanntlich

$$\begin{aligned}\varphi'(x)\partial x &= \partial\varphi(x) = \partial u,\\ \psi'(x)\partial x &= \partial\psi(x) = \partial v,\\ \chi'(x)\partial x &= \partial\chi(x) = \partial w,\\ \text{u. s. f.} & \qquad\qquad \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\partial V=\ & f'_u(u,\ v,\ w,\ \ldots)\partial u\\ +\ & f'_v(u,\ v,\ w,\ \ldots)\partial v\\ +\ & f'_w(u,\ v,\ w,\ \ldots)\partial w\\ +\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$\partial V=\partial_u V+\partial_v V+\partial_w V+\ldots.$$

Man findet folglich ∂V, wenn man die partiellen Differentiale $\partial_u V$, $\partial_v V$, $\partial_w V$, ... in Bezug auf u, v, w, ... als unabhängige veränderliche Größen entwickelt, dieselben zu einander addirt, und im Aggregat ∂u, ∂v, ∂w, ... als die Differen-

tiale der von x abhängenden veränderlichen Größen u, v, w, ... in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe betrachtet. Dieser Satz ist für den Algorithmus des Differentiirens von großer Wichtigkeit. Ist z. B. $V = u^v$, so ist

$$\partial_u V = vu^{v-1}\partial u,\ \partial_v V = u^v\, lu\,\partial v\ ;$$

folglich

$$\partial V = vu^{v-1}\partial u + u^v\, lu\,\partial v\ ,$$

wo nun aber ∂u und ∂v in Bezug auf die veränderliche Größe x, von welcher u und v abhängen, weiter zu entwickeln sind.

48. In (47.) ist im Allgemeinen folgender Satz bewiesen worden. Wenn $F(\alpha)$ eine Function von folgender Form:

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\partial x,\ y + \alpha\partial y,\ z + \alpha\partial z,\ u + \alpha\partial u,\ ....)\ ,$$

also

$$F(0) = f(x,\ y,\ z,\ u,\ ....) = V$$

ist; so ist

$$F'(0) = \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + ... = V_1$$
$$= \partial_x F(0) + \partial_y F(0) + \partial_z F(0) + \partial_u F(0) + ...$$

Um nun ferner $F'(\alpha)$ zu entwickeln, setze man

$$x + \alpha\partial x = p,\ y + \alpha\partial y = q,\ z + \alpha\partial z = r,\ ....,$$

und betrachte p, q, r, s, ... als Functionen von α; so ist nach (47.)

$$\begin{aligned} F'(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial\alpha} = \ & f_p(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\frac{\partial p}{\partial\alpha} \\ & + f_q(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\frac{\partial q}{\partial\alpha} \\ & + f_r(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\frac{\partial r}{\partial\alpha} \\ & + f_s(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\frac{\partial s}{\partial\alpha} \\ & + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{aligned}$$

d. i., wenn man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha},\ \frac{\partial q}{\partial\alpha},\ \frac{\partial r}{\partial\alpha},\ \frac{\partial s}{\partial\alpha},\ ....$$

wirklich entwickelt:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) = \ & f_p(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\partial x \\ & + f_q(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\partial y \\ & + f_r(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\partial z \\ & + f_s(p,\ q,\ r,\ s,\ ...)\partial u \\ & + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{aligned}$$

Hieraus erhellet, daß $F'(\alpha)$ eine Function von p, q, r, s, ... ist, und folglich

$$F'(\alpha) = f_{(1)}(x + \alpha\partial x,\ y + \alpha\partial y,\ z + \alpha\partial z,\ u + \alpha\partial u,\ ....)$$

gesetzt werden kann. $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \ldots.$ sind immer als constant zu betrachten. Folglich ist

$$F'(0) = f_{(1)}(x, y, z, u, \ldots.) = V_1,$$

und nach dem obigen allgemeinen Satze

$$\begin{aligned} F''(0) &= \partial_x V_1 + \partial_y V_1 + \partial_z V_1 + \partial_u V_1 + \ldots. = V_2 \\ &= \partial_x F'(0) + \partial_y F'(0) + \partial_z F'(0) + \partial_u F'(0) + \ldots. \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Art wie vorher ist nach (47.)

$$\begin{aligned} F''(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial \alpha} = \; & f'_{(1)p}(p, q, r, s, \ldots)\frac{\partial p}{\partial \alpha} \\ & + f'_{(1)q}(p, q, r, s, \ldots)\frac{\partial q}{\partial \alpha} \\ & + f'_{(1)r}(p, q, r, s, \ldots)\frac{\partial r}{\partial \alpha} \\ & + f'_{(1)s}(p, q, r, s, \ldots)\frac{\partial s}{\partial \alpha} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d. i., wenn die Differentialquotienten von $p, q, r, s, \ldots.$ in Bezug auf α wieder wirklich entwickelt werden:

$$\begin{aligned} F''(\alpha) = \; & f'_{(1)p}(p, q, r, s, \ldots)\partial x \\ & + f'_{(1)q}(p, q, r, s, \ldots)\partial y \\ & + f'_{(1)r}(p, q, r, s, \ldots)\partial z \\ & + f'_{(1)s}(p, q, r, s, \ldots)\partial u \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

woraus also wieder erhellet, daß es verstattet ist,

$$F''(\alpha) = f_{(2)}(x + \alpha\partial x, y + \alpha\partial y, z + \alpha\partial z, u + \alpha\partial u, \ldots),$$

also

$$F''(0) = f_{(2)}(x, y, z, u, \ldots) = V_2,$$

folglich nach dem obigen allgemeinen Satze

$$\begin{aligned} F'''(0) &= \partial_x V_2 + \partial_y V_2 + \partial_z V_2 + \partial_u V_2 + \ldots. = V_3 \\ &= \partial_x F''(0) + \partial_y F''(0) + \partial_z F''(0) + \partial_u F''(0) + \ldots. \end{aligned}$$

zu setzen.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel. Betrachtet man aber die Formeln

$$\begin{aligned} F(0) &= V \\ F'(0) &= \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + \ldots = V_1 \\ &= \partial_x F(0) + \partial_y F(0) + \partial_z F(0) + \partial_u F(0) + \ldots. \\ F''(0) &= \partial_x V_1 + \partial_y V_1 + \partial_z V_1 + \partial_u V_1 + \ldots = V_2 \\ &= \partial_x F'(0) + \partial_y F'(0) + \partial_z F'(0) + \partial_u F'(0) + \ldots. \\ F'''(0) &= \partial_x V_2 + \partial_y V_2 + \partial_z V_2 + \partial_u V_2 + \ldots = V_3 \\ &= \partial_x F''(0) + \partial_y F''(0) + \partial_z F''(0) + \partial_u F''(0) + \ldots. \\ F^{IV}(0) &= \partial_x V_3 + \partial_y V_3 + \partial_z V_3 + \partial_u V_3 + \ldots = V_4 \\ &= \partial_x F'''(0) + \partial_y F'''(0) + \partial_z F'''(0) + \partial_u F'''(0) + \ldots. \\ & \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

näher, so sieht man, daß eben so, wie $F'(0) = V_1$ aus $F(0) = V$ abgeleitet wird, $F''(0) = V_2$ aus $F'(0) = V_1$, $F'''(0) = V_3$ aus $F''(0) = V_2$, $F^{IV}(0) = V_4$ aus $F'''(0) = V_3$, u. s. f. abgeleitet wird. Weil ferner, wenn V nur von der einen veränderlichen Größe x abhängt, $\partial_y V = \partial_z V = \partial_u V = \ldots = 0$, also

$$F'(0) = V_1 = \partial_x V = \partial V$$

ist; so ist man übereingekommen, überhaupt die Function $F'(0) = V_1$ das erste Differential der Function V in Bezug auf die unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z, u, ... zu nennen, und durch ∂V zu bezeichnen, so daß also überhaupt

$$\begin{aligned}\partial V &= \partial f(x, y, z, u, \ldots.)\\ &= \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + \ldots.\end{aligned}$$

ist. Ist aber dieser Begriff einmal auf diese Art festgestellt, so ergeben sich aus dem Obigen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}F(0) &= V\\ F'(0) &= \partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \partial_u V + \ldots. = \partial V\\ F''(0) &= \partial_x \partial V + \partial_y \partial V + \partial_z \partial V + \partial_u \partial V + \ldots. = \partial^2 V\\ F'''(0) &= \partial_x \partial^2 V + \partial_y \partial^2 V + \partial_z \partial^2 V + \partial_u \partial^2 V + \ldots. = \partial^3 V\\ F^{IV}(0) &= \partial_x \partial^3 V + \partial_y \partial^3 V + \partial_z \partial^3 V + \partial_u \partial^3 V + \ldots. = \partial^4 V\\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

woraus sich dann auch unmittelbar der Begriff und die Art der Entwickelung der höhern Differentiale einer Function mehrerer unabhängiger veränderlicher Größen ergiebt. Nach (46.) ist nun auch, wenn wir wieder

$$f(x + \alpha\partial x, y + \alpha\partial y, z + \alpha\partial z, u + \alpha\partial u, \ldots.) = F(\alpha)$$

setzen:

$$\begin{aligned}&f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, u + \partial u, \ldots.)\\ &= f(x, y, z, u, \ldots.) + \frac{\partial f(x, y, z, u, \ldots)}{1}\\ &\quad + \frac{\partial^2 f(x, y, z, u, \ldots)}{1.2}\\ &\quad + \frac{\partial^3 f(x, y, z, u, \ldots)}{1.2.3}\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\\ &\quad + \frac{\partial^{n-1} f(x, y, z, u, \ldots)}{1.2.3.4\ldots(n-1)} + \frac{F^{(n)}(i)}{1.2.3\ldots n}.\end{aligned}$$

Auch die unzweideutig vor Augen liegende nahe Uebereinstimmung dieser Reihe mit der in (45.) im Fall einer Function einer veränderlichen Größe für $f(x + \partial x)$ entwickelten Reihe hat auf den obigen Begriff des ersten Differentials einer Function mehrerer unabhängiger veränderlicher Größen geführt. Geht man noch ein Mal auf das Obige zurück, so ist klar, daß das erste Differential der Function

$$f(x, y, z, u, \ldots) = V$$

die Gränze ist, welcher

$$\frac{f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u \ldots) - f(x, y, z, u, \ldots)}{\alpha}$$

sich nähert, wenn α sich der Null nähert. Ist die Größe

$$\frac{F^{(n)}(i)}{1.2.3\ldots n} = 0$$

für $n = \infty$, so ist

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z,\ u+\partial u, \ldots)$$
$$= f(x, y, z, u, \ldots) + \frac{\partial f(x, y, z, u, \ldots)}{1} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, u, \ldots)}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 f(x, y, z, u, \ldots)}{1.2.3} + \ldots$$

Man nennt diese Reihe die Taylor'sche Reihe oder den Taylor'schen Lehrsatz für Functionen mit mehrern unabhängigen veränderlichen Größen. Die Größe $F^{(n)}(i)$ erhält man, wenn man in Bezug auf α als unabhängige veränderliche Größe die derivirte Function $F^{(n)}(\alpha)$ entwickelt, und dann i, welches immer positiv und < 1 ist, für α setzt. Nach dem Obigen ist

$$F(\alpha) = f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u, \ldots)$$
$$F'(\alpha) = f_{(1)}(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u, \ldots)$$
$$F''(\alpha) = f_{(2)}(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u, \ldots)$$
$$F'''(\alpha) = f_{(3)}(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ u+\alpha\partial u, \ldots)$$

u. s. f. u. s. f.

und für $\alpha = 0$:

$$F(0) = f(x, y, z, u, \ldots) = V$$
$$F'(0) = f_{(1)}(x, y, z, u, \ldots) = \partial V$$
$$F''(0) = f_{(2)}(x, y, z, u, \ldots) = \partial^2 V$$
$$F'''(0) = f_{(3)}(x, y, z, u, \ldots) = \partial^3 V$$

u. s. f. u. s. f.

so daß man also offenbar $F^{(n)}(\alpha)$ aus

$$f_{(n)}(x, y, z, u, \ldots) = \partial^n V,$$

erhält, wenn man in $\partial^n V$ für $x, y, z, u, \ldots$ respective $x+\alpha\partial x$, $y+\alpha\partial y$, $z+\alpha\partial z$, $u+\alpha\partial u$, ... setzt. Also ergiebt sich augenscheinlich $F^{(n)}(i)$ aus $\partial^n V$, wenn man in $\partial^n V$ für $x, y, z, u, \ldots$ respective $x+i\partial x$, $y+i\partial y$, $z+i\partial z$, $u+i\partial u$, ... setzt, wo immer i positiv und < 1 ist. Wir haben also in völliger Allgemeinheit nach dem Obigen

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z,\ u+\partial u, \ldots) = f(x, y, z, u, \ldots)$$
$$+ \frac{f_{(1)}(x, y, z, u, \ldots)}{1}$$
$$+ \frac{f_{(2)}(x, y, z, u, \ldots)}{1.2}$$

$$+\frac{f_{(3)}(x, y, z, u, \ldots)}{1.2.3}$$

. . . .

$$+\frac{f_{(n-1)}(x, y, z, u, \ldots)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$+\frac{f_{(n)}(x+i\partial x, y+i\partial y, z+i\partial z, \ldots)}{1.2.3.4.5\ldots n}.$$

oder, wenn, wie immer,

$$f(x, y, z, u, \ldots) = V, \quad f_{(n)}(x, y, z, u, \ldots) = \partial^n V$$

gesetzt wird:

$$f(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, u+\partial u, \ldots)$$

$$= V + \frac{\partial V}{1} + \frac{\partial^2 V}{1.2} + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} + \frac{\partial^4 V}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^{n-1} V}{1.2.3..(n-1)} + \frac{f_{(n)}(x+i\partial x, y+i\partial y, z+i\partial z, \ldots)}{1.2.3.4.5\ldots n}.$$

Nur wenn

$$\frac{f_{(n)}(x+i\partial x, y+i\partial y, z+i\partial z, u+i\partial u, \ldots)}{1.2.3.4.5.6\ldots n}$$

für $n=\infty$ verschwindet, darf

$$f(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, u+\partial u, \ldots)$$

$$= V + \frac{\partial V}{1} + \frac{\partial^2 V}{1.2} + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} + \frac{\partial^4 V}{1.2.3.4} + \ldots$$

gesetzt werden. Da i positiv und < 1, d. i. zwischen 0 und 1 enthalten, oder $i = M(0, 1)$ ist; so ist, wie leicht wie in (31.) gezeigt werden kann:

$$x+i\partial x = M(x, x+\partial x), \quad y+i\partial y = M(y, y+\partial y), \ldots$$

Bezeichnen also K und G den kleinsten und größten unter allen Werthen der Function

$$f_{(n)}(x, y, z, u, \ldots)$$

welche dieselbe erhält, wenn man für x, y, z, u, ... respective alle Werthe von x bis $x+\partial x$, y bis $y+\partial y$, z bis $z+\partial z$, u. s. f. setzt; so ist, vorausgesetzt, daß zwischen den angegebenen Gränzen nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit der in Rede stehenden Function Statt findet, offenbar

$$f_{(n)}(x+i\partial x, y+i\partial y, z+i\partial z, \ldots) = M(K, G);$$

also

$$\frac{f_{(n)}(x+i\partial x, y+i\partial y, z+i\partial z, \ldots)}{1.2.3.4.5.6\ldots n} = M\left(\frac{K}{1\ldots n}, \frac{G}{1\ldots n}\right).$$

Folglich ist immer

$$f(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, u+\partial u, \ldots)$$

eine Mittelgröße zwischen

$$V + \frac{\partial V}{1} + \frac{\partial^2 V}{1.2} + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} V}{1\ldots(n-1)} + \frac{K}{1\ldots n},$$

und

$$v + \frac{\partial v}{1} + \frac{\partial^2 v}{1.2} + \frac{\partial^3 v}{1.2.3} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} v}{1\ldots(n-1)} + \frac{G}{1\ldots n},$$

oder letztere zwei Größen sind zwei Gränzen, zwischen denen

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z,\ u+\partial u,\ \ldots)$$

enthalten ist. Setzt man im Vorhergehenden $x = y = z = u = \ldots = 0$, und vertauscht dann respective ∂x, ∂y, ∂z, ∂u, ... mit x, y, z, u, ..., so erhält man die Maclaurinsche Reihe für Functionen mehrerer veränderlicher Größen, zu welcher also, wie man sieht, der Uebergang von der Taylorschen Reihe in allen Fällen leicht ist.

Noch bemerken wir, daß nach (37.) auch

$$\frac{\alpha^n}{1\ldots n} F^{(n)}(i\alpha) = \int_0^\alpha \frac{(\alpha-\varrho)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} F^{(n)}(\varrho)\partial\varrho = \frac{\alpha^n(1-\Theta)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} F^{(n)}(\Theta\alpha),$$

und folglich für $\alpha = 1$:

$$\frac{F^{(n)}(i)}{1\ldots n} = \int_0^1 \frac{(1-\varrho)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} F^{(n)}(\varrho)\partial\varrho = \frac{(1-\Theta)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} F^{(n)}(\Theta)$$

ist, wodurch also der Rest (s. oben) noch auf andere Art ausgedrückt wird.

M. s. über diesen wichtigen Gegenstand auch eine Abhandlung von Ampère in den Annales de Mathém. T. XVII. p. 317.

49. Sey jetzt $u = f(x, y)$ eine Function zweier unabhängiger veränderlicher Größen, so ist, wenn wir die bloß in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Größe genommene partielle Differenz durch $\Delta_x u$ bezeichnen:

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y) - f(x, y);$$

folglich

$$\partial_y \Delta_x u = \partial_y f(x+\Delta x, y) - \partial_y f(x, y).$$

Setzen wir nun

$$\partial_y u = \partial_y f(x, y) = \varphi(x, y)\partial y;$$

so ist, weil dies für jedes x gilt, offenbar auch

$$\partial_y f(x+\Delta x, y) = \varphi(x+\Delta x, y)\partial y,$$

und folglich

$$\partial_y \Delta_x u = \varphi(x+\Delta x, y)\partial y - \varphi(x, y)\partial y.$$

Da nun augenscheinlich auch

$$\Delta_x \partial_y u = \varphi(x+\Delta x, y)\partial y - (x, y)\partial y$$

ist; so ist immer

$$\Delta_x \partial_y u = \partial_y \Delta_x u.$$

Folglich

$$\frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_y \Delta_x u}{\Delta x} = \partial_y\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right).$$

läßt man nun Δx sich der Null nähern, und nimmt die Grän-
zen; so ist, weil bekanntlich immer

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x},\ \mathrm{Lim}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial_x u}{\partial x}$$

ist, offenbar

$$\frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} = \partial_y\left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right) = \frac{\partial_y \partial_x u}{\partial x},$$

da man ∂x immer als constant zu betrachten hat. Dies giebt die merkwürdige Gleichung

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u,$$

d. h. man gelangt zu einerlei Resultat, wenn man eine beliebige Function der beiden unabhängigen veränderlichen Größen x, y zuerst nach x, dann nach y differentiirt, oder die beiden partiellen Differentiationen in umgekehrter Ordnung verrichtet.

Ist z. B. $u = \mathrm{Arc\,tang}\frac{x}{y}$, so findet man

$$\partial_x u = \frac{y}{x^2+y^2}\partial x,\quad \partial_y u = -\frac{x}{x^2+y^2}\partial y;$$

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x \partial y.$$

50. Der vorhergehende Satz läßt sich auch sehr leicht auf Functionen dreier veränderlicher Größen erweitern. Ist nämlich $u = f(x, y, z)$, so erhält man durch successive Anwendung von (49.):

$$\partial_x \partial_y \partial_z u = \partial_x \partial_z \partial_y u = \partial_y \partial_x \partial_z u = \partial_y \partial_z \partial_x u$$
$$= \partial_z \partial_x \partial_y u = \partial_z \partial_y \partial_x u,$$

und dies sind offenbar alle Permutationen, die sich mit den veränderlichen Größen x, y, z vornehmen lassen. Die dritte und fünfte Permutation folgen respective aus der ersten und zweiten, weil nach (49.)

$$\partial_x \partial_y \partial_z u = \partial_y \partial_x \partial_z u,$$
$$\partial_x \partial_z \partial_y u = \partial_z \partial_x \partial_y u$$

ist. Es erhellet leicht, daß man den Satz auf ähnliche Weise auch für Functionen mit vier, fünf und mehrern veränderlichen Größen beweisen könnte; den folgenden Schlüssen gebührt aber, wie man sehen wird, der Vorzug größerer Allgemeinheit.

51. Nehmen wir nämlich überhaupt den Satz für Functionen mit n veränderlichen Größen als richtig an, so läßt sich auf folgende Art leicht zeigen, daß derselbe auch für Functionen mit n + 1 veränderlichen Größen und demnach allgemein gilt, weil seine Richtigkeit vorher schon bei Functionen mit zwei und drei veränderlichen Größen nachgewiesen worden ist. Sey also u eine Function der n + 1 veränderlichen Größen x, y, z, v, w, ..., und

$$\partial_x\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u,\quad \partial_x\partial_v\partial_z\partial_w\partial_y\ldots u$$

seyen zuerst zwei beliebige Permutationen, bei denen die letzte Differentation sich auf dieselbe veränderliche Größe x bezieht. Weil bei der Differentiation nach y, z, v, w, ... die Größe x als constant betrachtet wird, und der Satz nach der Voraussetzung für Functionen mit n veränderlichen Größen gilt; so ist

$$\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u = \partial_v\partial_z\partial_w\partial_y\ldots u;$$

also auch

$$\partial_x\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u = \partial_x\partial_v\partial_z\partial_w\partial_y\ldots u.$$

Sind ferner

$$\partial_x\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u,\quad \partial_v\partial_w\partial_z\partial_x\partial_y\ldots u$$

zwei beliebige Permutationen, bei denen sich auch die letzten Differentiationen auf beliebige verschiedene veränderliche Größen x und v beziehen; so ist, weil der Satz für Functionen mit n veränderlichen Größen gilt, indem bei der Differentiation nach y, z, v, w, ... die Größe x als constant betrachtet wird:

$$\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u = \partial_v\partial_y\partial_z\partial_w\ldots u,$$

und eben so:

$$\partial_w\partial_z\partial_x\partial_y\ldots u = \partial_x\partial_y\partial_z\partial_w\ldots u.$$

Betrachten wir nun, wie es verstattet ist, $\partial_y\partial_z\partial_w\ldots u$ bloß als eine Function von v, x, und setzen

$$\partial_y\partial_z\partial_w\ldots u = F(x, v);$$

so ist nach dem Obigen

$$\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u = \partial_v F(x, v),$$
$$\partial_w\partial_z\partial_x\partial_y\ldots u = \partial_x F(x, v);$$

also

$$\partial_x\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u = \partial_x\partial_v F(x, v),$$
$$\partial_v\partial_w\partial_z\partial_x\partial_y\ldots u = \partial_v\partial_x F(x, v);$$

aber nach (49.)

$$\partial_x\partial_v F(x, v) = \partial_v\partial_x F(x, v);$$

folglich

$$\partial_x\partial_y\partial_z\partial_v\partial_w\ldots u = \partial_v\partial_w\partial_z\partial_x\partial_y\ldots u,$$

wodurch also unser Satz allgemein bewiesen ist.

Daß man in jeder Function mehrerer veränderlichen Größen beliebige dieser Größen als constant betrachten kann, versteht sich von selbst. Auch erhellet leicht, daß man in dem vorhergehenden allgemeinen Satze beliebige successive Differentiationen als sich auf ein und dieselbe veränderliche Größe beziehend betrachten kann, und daß demnach überhaupt der Ausdruck

$$\partial^m{}_x\partial^n{}_y\partial^p{}_z\partial^q{}_v\partial^r{}_w\ldots u$$

ungeändert bleibt, wie man auch die Ordnung der einzelnen Differentiationen verändern mag.

52. Wir wollen nun noch eine allgemeine Regel zur Entwickelung der höhern Differentiale einer jeden Function mehrerer

veränderlicher Größen zu entwickeln suchen, und dabei wieder mit Functionen zweier veränderlicher Größen beginnen. Sey also u eine Function von x und y, so ist nach (47.)

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u .$$

Entwickelt man nun nach und nach das zweite, dritte, vierte u. s. f. Differential; so erhält man:

$$\begin{aligned}
\partial^2 u &= \partial^2{}_x u + \partial_x \partial_y u \\
&\quad + \partial_y \partial_x u + \partial^2{}_y u \\
&= \partial^2{}_x u + 2\partial_x \partial_y u + \partial^2{}_y u \quad (51.) \\
\partial^3 u &= \partial^3{}_x u + 2\partial^2{}_x \partial_y u + \partial_x \partial^2{}_y u \\
&\quad + \partial_y \partial^2{}_x u + 2\partial_y \partial_x \partial_y u + \partial^3{}_y u \\
&= \partial^3{}_x u + 3\partial^2{}_x \partial_y u + 3\partial_x \partial^2{}_y u + \partial^3{}_y u \quad (51.) \\
\partial^4 u &= \partial^4{}_x u + 3\partial^3{}_x \partial_y u + 3\partial^2{}_x \partial^2{}_y u + \partial_x \partial^3{}_y u \\
&\quad + \partial_y \partial^3{}_x u + 3\partial_y \partial^2{}_x \partial_y u + 3\partial_y \partial_x \partial^2{}_y u + \partial^4{}_y u \\
&= \partial^4{}_x u + 4\partial^3{}_x \partial_y u + 6\partial^2{}_x \partial^2{}_y u + 4\partial_x \partial^3{}_y u + \partial^4{}_y u \quad (51.) .
\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, das allgemeine Gesetz, und wie dasselbe allgemein zu beweisen, ist klar. Es ist nämlich allgemein

$$\partial^n u = \partial^n{}_x u + \frac{n}{1} \partial^{n-1}_x \partial_y u + \frac{n(n-1)}{1.2} \partial^{n-2}_x \partial^2{}_y u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \partial^{n-3}_x \partial^3{}_y u + ..$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} \partial^2{}_x \partial^{n-2}_y u + \frac{n}{1} \partial_x \partial^{n-1}_y u + \partial^n{}_y u ,$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze in einer leicht verständlichen jedoch bloß symbolischen Formel:

$$\partial^n u = (\partial_x + \partial_y)^n u .$$

Der Sinn und der Gebrauch dieser Formel zur Entwickelung von $\partial^n u$ wird ohne weitere Erläuterung erhellen.

53. Sey jetzt u allgemein eine Function der n veränderlichen Größen x, y, z, v, w, ...; so ist

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots .$$

Bezeichnen wir ferner das Differential von u, wenn bloß y, z, v, w, ... als veränderlich betrachtet werden, durch δu; so ist

$$\delta u = \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots ;$$

also

$$\partial u = \partial_x u + \delta u .$$

Ist

$$u = p + q + r + s + \ldots ,$$

wo p, q, r, s, ... Functionen von x, y, z, v, ... sind; so ist

$$\begin{aligned}
\partial u &= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots \\
&= \partial_x p + \partial_x q + \partial_x r + \partial_x s + \ldots \\
&\quad + \partial_y p + \partial_y q + \partial_y r + \partial_y s + \ldots \\
&\quad + \partial_z p + \partial_z q + \partial_z r + \partial_z s + \ldots \\
&\quad + \partial_v p + \partial_v q + \partial_v r + \partial_v s + \ldots \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$= \partial_x p + \partial_y p + \partial_z p + \partial_v p + \ldots$$
$$+ \partial_x q + \partial_y q + \partial_z q + \partial_v q + \ldots$$
$$+ \partial_x r + \partial_y r + \partial_z r + \partial_v r + \ldots$$
$$+ \partial_x s + \partial_y s + \partial_z s + \partial_v s + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

folglich auch für Functionen mehrerer veränderlicher Größen:

$$\partial u = \partial p + \partial q + \partial r + \partial s + \ldots$$

Ist $u = ap$, wo a eine constante Größe, p eine Function von $x, y, z, v, \ldots$ bezeichnet, so ist

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots$$
$$= a\partial_x p + a\partial_y p + a\partial_z p + a\partial_v p + \ldots$$
$$= a(\partial_x p + \partial_y p + \partial_z p + \partial_v p + \ldots),$$

also auch für Functionen mehrerer veränderlicher Größen:

$$\partial u = a\partial p .$$

Ferner ist

$$\delta u = \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots ;$$

also

$$\partial_x \delta u = \partial_x \partial_y u + \partial_x \partial_z u + \partial_x \partial_v u + \ldots$$
$$= \partial_y \partial_x u + \partial_z \partial_x u + \partial_v \partial_x u + \ldots \quad (49.);$$

aber

$$\delta \partial_x u = \partial_y \partial_x u + \partial_z \partial_x u + \partial_v \partial_x u + \ldots ;$$

folglich

$$\partial_x \delta u = \delta \partial_x u .$$

Hieraus ergiebt sich ferner leicht nach und nach:

$$\partial^2{}_x \delta u = \partial_x \delta \partial_x u = \delta \partial^2{}_x u ,$$
$$\partial^3{}_x \delta u = \partial_x \delta \partial^2{}_x u = \delta \partial^3{}_x u ,$$
$$\partial^4{}_x \delta u = \partial_x \delta \partial^3{}_x u = \delta \partial^4{}_x u ,$$
$$\partial^5{}_x \delta u = \partial_x \delta \partial^4{}_x u = \delta \partial^5{}_x u ,$$
u. s. f. u. s. f.

also allgemein

$$\partial^n{}_x \delta u = \delta \partial^n{}_x u .$$

Folglich

$$\delta^2 \partial^n{}_x u = \delta \partial^n{}_x \delta u = \partial^n{}_x \delta^2 u ,$$
$$\delta^3 \partial^n{}_x u = \delta \partial^n{}_x \delta^2 u = \partial^n{}_x \delta^3 u ,$$
$$\delta^4 \partial^n{}_x u = \delta \partial^n{}_x \delta^3 u = \partial^n{}_x \delta^4 u ,$$
$$\delta^5 \partial^n{}_x u = \delta \partial^n{}_x \delta^4 u = \partial^n{}_x \delta^5 u ,$$
u. s. f. u. s. f.

Also für jedes m und n:

$$\delta^m \partial^n{}_x u = \partial^n{}_x \delta^m u .$$

Ueberhaupt ist auch

$$\delta \partial^n{}_x \delta^m u = \partial^n{}_x \delta \delta^m u = \partial^n{}_x \delta^{m+1} u .$$

Alle diese Sätze mußten hier eingeschaltet werden, um das Folgende kurz und deutlich entwickeln zu können. Entwickelt man nun mittelst derselben aus der oben bewiesenen Formel

$$\partial u = \partial_x u + \delta u$$

nach und nach $\partial^2 u$, $\partial^3 u$, $\partial^4 u$, ...; so ergiebt sich:

$$\partial u = \partial_x u + \delta u$$
$$\partial^2 u = \partial^2{}_x u + \partial_x \delta u + \delta \partial_x u + \delta^2 u = \partial^2{}_x u + 2\partial_x \delta u + \delta^2 u$$
$$\partial^3 u = \partial^3{}_x u + 2\partial^2{}_x \delta u + \partial_x \delta^2 u + \delta \partial^2{}_x u + 2\delta \partial_x \delta u + \delta^3 u = \partial^3{}_x u + 3\partial^2{}_x \delta u + 3\partial_x \delta^2 u + \delta^3 u$$
$$\partial^4 u = \partial^4{}_x u + 3\partial^3{}_x \delta u + 3\partial^2{}_x \delta^2 u + \partial_x \delta^3 u + \delta \partial^3{}_x u + 3\delta \partial^2{}_x \delta u + 3\delta \partial_x \delta^2 u + \delta^4 u = \partial^4{}_x u + 4\partial^3{}_x \delta u + 6\partial^2{}_x \delta^2 u + 4\partial_x \delta^3 u + \delta^4 u,$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein

$$\partial^n u = \partial^n{}_x u + \frac{n}{1}\partial_x^{n-1}\delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\partial_x^{n-2}\delta^2 u + \ldots \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\partial^2{}_x \delta^{n-2} u + \frac{n}{1}\partial_x \delta^{n-1} u + \delta^n u,$$

oder in einem leicht verständlichen symbolischen Ausdruck:

$$\partial^n u = (\partial_x + \delta)^n u.$$

54. Ist u eine Function zweier veränderlicher Größen x, y, so ist nach (52.)

$$\partial^n u = (\partial_x + \partial_y)^n u.$$

Ist nun u eine Function der drei veränderlichen Größen x, y, z; so ist allgemein

$$\delta^n u = (\partial_y + \partial_z)^n u;$$

folglich nach der in (53.) bewiesenen allgemeinen Formel:

$$\partial^n u = \partial^n{}_x u + \frac{n}{1}\partial_x^{n-1}(\partial_y + \partial_z) u + \frac{n(n-1)}{1.2}\partial_x^{n-2}(\partial_y + \partial_z)^2 u + \ldots \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\partial^2{}_x(\partial_y + \partial_z)^{n-2} u + \frac{n}{1}\partial x(\partial_y + \partial_z)^{n-1} u + (\partial_y + \partial_z)^n u,$$

d. i. nach dem binomischen Lehrsatze, wenn man nur immer den bloß symbolischen Sinn dieser Formeln gehörig festhält:

$$\partial^n u = (\partial_x + \partial_y + \partial_z)^n u.$$

Ist nun ferner u eine Function der vier veränderlichen Größen x, y, z, v; so ist allgemein

$$\delta^n u = (\partial_y + \partial_z + \partial_v)^n u;$$

also nach der in (53.) bewiesenen Formel:

$$\begin{aligned}\partial^n u = \partial^n_x u &+ \frac{n}{1}\partial^{n-1}_x(\partial_y + \partial_z + \partial_v)u \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\partial^{n-2}_x(\partial_y + \partial_z + \partial_v)^2 u \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\partial^2_x(\partial_y + \partial_z + \partial_v)^{n-2} u \\ &+ \frac{n}{1}\partial_x(\partial_y + \partial_z + \partial_v)^{n-1} u \\ &+ (\partial_y + \partial_z + \partial_v)^n u\,,\end{aligned}$$

und folglich wieder nach dem Binomial-Theorem:

$$\partial^n u = (\partial_x + \partial_y + \partial_z + \partial_v)^n u\,.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist also für jede Function u einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen:

$$\partial^n u = (\partial_x + \partial_y + \partial_z + \partial_v + \partial_w + \ldots)^n u\,.$$

Mittelst dieser Formel lassen sich die höhern Differentiale der Functionen mehrerer veränderlicher Größen nach einer schon anderweitig völlig bekannten Regel der Analysis mit der größten Leichtigkeit, wenn man will, bloß mittelst gemeiner Multiplication, entwickeln, und wie wichtig die Reduction der Methoden der Analysis auf ihre möglichst kleinste Anzahl ist, bedarf nicht erst noch einer besondern Erinnerung.

55. Noch bemerken wir, daß, so wie in (53.) einige früher nur für Functionen einer veränderlichen Größe bewiesene Sätze auch für Functionen mehrerer veränderlicher Größen bewiesen worden sind, dies sich auch noch bei manchen andern Sätzen leisten läßt, welches hier bloß an ein Paar leichten Beispielen gezeigt werden soll.

Ist z. B. $u = pq$, wo p und q Functionen von x, y, z, ... sind; so ist

$$\begin{aligned}\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots\\ = \; p\partial_x q + q\partial_x p \\ + p\partial_y q + q\partial_y p \\ + p\partial_z q + q\partial_z p \\ \cdots\cdots \\ = \; p(\partial_x q + \partial_y q + \partial_z q + \ldots) \\ + q(\partial_x p + \partial_y p + \partial_z p + \ldots)\,,\end{aligned}$$

d. i. auch für Functionen mehrerer veränderlicher Größen:

$$\partial u = \partial . pq = p\partial q + q\partial p\,.$$

Für $u = \frac{p}{q}$ ist $qu = p$, also

$$q\partial u + u\partial q = \partial p\,,$$

woraus, wenn man $u = \frac{p}{q}$ setzt, leicht

$$\partial u = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2}$$

folgt.

Ist $u = p^n$, so ist

$$\begin{aligned}\partial u &= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots\\ &= np^{n-1}\partial_x p + np^{n-1}\partial_y p + np^{n-1}\partial_z p + \ldots\\ &= np^{n-1}(\partial_x p + \partial_y p + \partial_z p + \ldots)\end{aligned}$$

d. i.

$$\partial u = np^{n-1}\partial p\ .$$

Für $u = lp$ ist

$$\begin{aligned}\partial u &= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots\\ &= \frac{\partial_x p}{p} + \frac{\partial_y p}{p} + \frac{\partial_z p}{p} + \ldots\\ &= \frac{\partial_x p + \partial_y p + \partial_z p + \ldots}{p},\end{aligned}$$

d. i.

$$\partial u = \frac{\partial p}{p}\ .$$

Eben so ist für $u = e^p$

$$\begin{aligned}\partial u &= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots\\ &= e^p\partial_x p + e^p\partial_y p + e^p\partial_z p + \ldots\\ &= e^p(\partial_x p + \partial_y p + \partial\ p + \ldots)\end{aligned}$$

d. i.

$$\partial u = e^p\partial p\ .$$

Aehnliche Beispiele würden sich leicht mehrere geben lassen.

Ist überhaupt, wenn $p, q, r, s, \ldots$ Functionen von $x, y, z, v, \ldots$ bezeichnen,

$$u = f(p, q, r, s, \ldots);$$

so ist

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots$$

und folglich nach dem in (47.) bewiesenen Satze:

$$\begin{aligned}\partial u = {} & f'_p(p,q,r,\ldots)\partial_x p + f'_q(p,q,r,\ldots)\partial_x q + f'_r(p,q,r,\ldots)\partial_x r + \ldots\\ & + f'_p(p,q,r,\ldots)\partial_y p + f'_q(p,q,r,\ldots)\partial_y q + f'_r(p,q,r,\ldots)\partial_y r + \ldots\\ & + f'_p(p,q,r,\ldots)\partial_z p + f'_q(p,q,r,\ldots)\partial_z q + f'_r(p,q,r,\ldots)\partial_z r + \ldots\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ = {} & f'_p(p,q,r,\ldots)\{\partial_x p + \partial_y p + \partial_z p + \ldots\}\\ & + f'_q(p,q,r,\ldots)\{\partial_x q + \partial_y q + \partial_z q + \ldots\}\\ & + f'_r(p,q,r,\ldots)\{\partial^x r + \partial_y r + \partial_z r + \ldots\}\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

d. i. allgemein

$$\partial u = f'_p(p,q,r,\ldots)\partial p + f'_q(p,q,r,\ldots)\partial q + f'_r(p,q,r,\ldots)\partial r + \ldots$$

Für $u = p^q$ ist z. B.

$$f'_p(p, q) = qp^{q-1},\ f'_q(p, q) = p^q lp\ .$$

Folglich ist in diesem Falle

$$\partial u = qp^{q-1}\partial p + p^q lp\,\partial q\ .$$

Für $u = pq$ ist

$$f'_p(p, q) = q,\ f'_q(p, q) = p\ ;$$

also

$$\partial u = q\partial p + p\partial q\ ,$$

wie schon oben gefunden worden ist.

Für $u = p^{\sin q}$ ist

$$f'_p(p, q) = \sin q . p^{\sin q - 1},\ f'_q(p, q) = p^{\sin q} lp . \cos q\ ;$$

also

$$\partial u = \frac{\sin q\partial p}{p^{1-\sin q}} + p^{\sin q} lp . \cos q\partial q\ .$$

Die Anwendung der obigen allgemeinen Formel ist in keinem Falle Schwierigkeiten unterworfen.

IV. Von der Differentiation der unentwickelten Functionen oder der Gleichungen.

56. Der in (55.) bewiesene allgemeine Satz führt, wie wir sogleich sehen werden, unmittelbar zu den Regeln der Differentiation der Gleichungen. Ist nämlich zwischen den Größen x, y, z, ... v, ... eine Gleichung gegeben, deren allgemeines Symbol

$$u = F(x, y, z, \ldots v, \ldots) = 0$$

seyn mag; so kann man immer jede der Größen x, y, z, ... v, ... als Function der übrigen betrachten. Man kann folglich $v = \varphi(x, y, z, \ldots)$, also auch

$$u = f(x, y, z, \ldots) = 0$$

setzen, und letztere Gleichung wird nun offenbar für jedes beliebige x, y, z, ... gelten, so daß also auch für jedes α, ∂x, ∂y, ∂z, ...

$$f(x + \alpha\partial x, y + \alpha\partial y, z + \alpha\partial z, \ldots) = 0\ ,$$

$$f(x + \alpha\partial x, y + \alpha\partial y, z + \alpha\partial z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) = 0$$

ist. Da nun nach (48.) ∂u die Gränze ist, welcher

$$\frac{f(x + \alpha\partial x, y + \alpha\partial y, z + \alpha\partial z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\alpha}$$

sich nähert, wenn α sich der Null nähert, so ist klar, daß im vorliegenden Falle $\partial u = 0$ ist. Nach dem in (55.) bewiesenen allgemeinen Satze ist aber allgemein

$$\partial u = F'_x(x, y, z, .. v, ..)\partial x + F'_y(x, y, z, .. v, ..)\partial y + F'_z(x, y, z, .. v, ..)\partial z + \ldots$$
$$\ldots + F'_v(x, y, z, \ldots v, \ldots)\partial v + \ldots\ ;$$

also ist im vorliegenden Falle

$$0 = F'_x(x, y, z, .. v ..)\partial x + F'_y(x, y, z, .. v, ..)\partial y + F'_z(x, y, z, .. v, ..)\partial z + ...$$
$$... + F'_v(x, y, z, .. v, ..)\partial v + ...$$

x, y, z, ... sind hier unabhängige veränderliche, ∂x, ∂y, ∂z, ... folglich constante Größen, weshalb also bei der folgenden Differentiation $\partial^2 x = \partial^2 y = \partial^2 z = ... = 0$ zu setzen ist, u. s. f. v dagegen ist von x, y, z, ... abhängig, und die höhern Differentiale von v dürfen also nicht $= 0$ gesetzt werden.

Setzen wir jetzt überhaupt

$$u = F(x, y, z, ...) = 0,$$

ohne zu bestimmen, welche der veränderlichen Größen x, y, z, ... als Function der übrigen betrachtet werden soll; so ist nach dem Obigen allgemein

$$0 = F'_x(x, y, z, ..)\partial x + F'_y(x, y, z, ..)\partial y + F'_z(x, y, z, ..)\partial z + ...,$$

wo nun auch jede beliebige veränderliche Größe als Function der übrigen betrachtet und als solche behandelt werden kann. Nur muß man bemerken, daß die höhern Differentiale der letztern Größen sämmtlich $= 0$ zu setzen sind, welches in Bezug auf die erstere Größe natürlich nicht verstattet ist. Nach dem Obigen ist, wenn man die Größen x, y, z, ... sämmtlich als unabhängige veränderliche Größen behandelt,

$$\partial u = F'_x(x, y, z, ..)\partial x + F'_y(x, y, z, ..)\partial y + F'_z(x, y, z, ..)\partial z + ...;$$

folglich, wenn $u = 0$ ist, immer auch $\partial u = 0$, indem man bei der Differentiation alle veränderliche Größen, von denen u abhängt, als unabhängige veränderliche Größen behandelt. Nach der Differentiation kann man dann ganz beliebig jede veränderliche Größe als Function der übrigen betrachten.

Ist v wieder diese Größe, so erhält man also auf diese Weise immer eine Gleichung zwischen x, y, z, ... ∂x, ∂y, ∂z, ... und v, ∂v. Natürlich ist nun auch ferner auf gleiche Art

$$\partial^2 u = 0,\ \partial^3 u = 0,\ \partial^4 u = 0,\ \partial^5 u = 0, ...,$$

wobei jedoch zu bemerken ist, daß bei der Entwickelung von $\partial^2 u$, $\partial^3 u$, $\partial^4 u$, $\partial^5 u$, ... die höhern Differentiale von x, y, z, ... sämmtlich $= 0$ zu setzen sind, welches aber von den höhern Differentialen von v nicht gilt.

Man habe z. B. die Gleichung

$$u = y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

so ist

$$u'_x = -3ay + 3x^2,\ u'_y = 3y^2 - 3ax;$$

folglich

$$-(ay - x^2)\partial x + (y^2 - ax)\partial y = 0.$$

Betrachten wir nun y als Function von x, so ergiebt sich hieraus unmittelbar

$$\partial y = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\partial x,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Behandeln wir nun ferner y als Function von x, so giebt eine neue Differentiation der Gleichung

$$(y^2 - ax)\partial y - (ay - x^2)\partial x = 0,$$

wo nun ∂x als constant zu betrachten ist, leicht:

$$(y^2 - ax)\partial^2 y + 2y\partial y^2 - a\partial x\partial y - a\partial x\partial y + 2x\partial x^2 = 0,$$

oder

$$(y^2 - ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2a\frac{\partial y}{\partial x} + 2x = 0;$$

also, wenn man den gefundenen Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ substituirt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Hat man zwischen n veränderlichen Größen x, y, z, ... überhaupt m Gleichungen:

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ s = 0, \ldots;$$

so hat man zugleich auch die folgenden m Differentialgleichungen:

$$\partial u = 0,\ \partial v = 0,\ \partial w = 0,\ \partial s = 0, \ldots,$$

mittelst welcher sich immer die Differentiale oder derivirten Functionen von m veränderlichen Größen, die man als Functionen der übrigen n — m betrachtet, bestimmen lassen. Daß überhaupt

$$\partial^\alpha u = 0,\ \partial^\alpha v = 0,\ \partial^\alpha w = 0,\ \partial^\alpha s = 0, \ldots$$

ist, und diese Gleichungen zu der Bestimmung der αten Differentiale oder derivirten Functionen von m veränderlichen Größen, als Functionen der übrigen betrachtet, führen, ist aus dem Vorhergehenden klar.

Das Bisherige wird für alle Fälle, die bei der Differentiation der Gleichungen eintreten können, völlig hinreichend seyn.

57. Noch bemerken wir hier, daß die partiellen Differentialquotienten, welche, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, auch bei der Differentiation der Gleichungen fortwährend in Anwendung kommen, von Euler immer durch Einschließung in Parenthesen bezeichnet worden sind, und auch z. B. Laplace sich dieser Bezeichnung durchgängig bedient hat. Hiernach bezeichnen also z. B.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \ldots$$

dasselbe, was wir oben durch u'_x, u'_y, u'_z, ..., oder durch

$$\frac{\partial_x u}{\partial x},\ \frac{\partial_y u}{\partial y},\ \frac{\partial_z u}{\partial z}, \ldots$$

bezeichnet haben. Man muß jene Bezeichnung kennen, weil sie in Werken häufig vorkommt, die in der Mathematik als classisch betrachtet werden, und von Jedem gelesen werden müssen. In neuern Schriften findet man die Parenthesen häufig weggelassen,

wie es uns scheint, nicht zum Vortheil der Wissenschaft, wenn man nicht eine andere Bezeichnung, wie z. B. die obige von uns gebrauchte, an die Stelle der ältern setzt. Soll u zuerst nach x, dann nach y differentiirt werden, so bezeichnet man durchgängig die Differentialquotienten durch $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, nicht durch $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)$, weil hier keine Zweideutigkeit möglich ist.

58. Einige historische und literarische Bemerkungen mögen diesen Artikel beschließen. Der wichtigste Fortschritt, welchen die Differentialrechnung seit dem Erscheinen des ersten Theils dieses Wörterbuchs gemacht hat, ist ohne alle Widerrede die Bestimmung des Restes oder Fehlers bei der Taylor'schen und Maclaurinschen Reihe für Functionen einer und mehrerer veränderlicher Größen, welchen man begeht, wenn man die Reihe mit einem gewissen Gliede abbricht. Zugleich liegt in dieser Bestimmung ein allgemeines Criterium der Convergenz und Divergenz der Reihe, und sonach die sichere Entscheidung, ob die Reihe überhaupt zur Darstellung des Werthes der entsprechenden Function brauchbar ist oder nicht; oder mit andern Worten, ob dieser Werth der Function im eigentlichen Sinne die Summe der in Rede stehenden Reihe ist oder nicht. Wie wichtig diese Erfindung daher für die gesammte Analysis ist, leuchtet ein. Schon jetzt haben mehrere Theile der Theorie der sogenannten unendlichen Reihen eine gänzliche Umgestaltung erhalten, und viele Resultate, die für völlig allgemein galten, sind in Gränzen eingeschlossen worden, über die hinaus ihre Anwendung unsicher ist. Sowohl gegenwärtiger Artikel, als auch z. B. die Artikel Convergenz der Reihen und Binomischer Lehrsatz in diesen Zusätzen liefern hierher gehörende Beispiele in großer Anzahl. Wir auguriren unbedenklich aus der mehrgenannten wichtigen Erfindung der gesammten Analysis eine ihr bevorstehende vollkommene Umgestaltung. Eintreten wird dieselbe gewiß; wie früh aber, oder wie spät, läßt sich nicht bestimmen; denn noch scheint der Werkmeister zu fehlen, welcher das Gebäude in seiner ganzen Größe und Schönheit aufzuführen die Kraft und den Willen hat. Soll aber etwas Tüchtiges entstehen, so muß der Bau, das sehen wir wohl ein, vom untersten Fundamente an beginnen, und nicht bloß in einem Ausflicken des alten Gebäudes bestehen.

Die erste Bestimmung des Restes der Taylor'schen Reihe verdankt man Lagrange, worüber die Théorie des fonctions analytiques. p. 54. und die Leçons sur le calcul des fonctions p. 88. nachzusehen sind. Lagrange blieb jedoch bei Functionen einer veränderlichen Größe stehen, und die von ihm gewählte Art der Darstellung des Restes war nicht ohne Unbequemlichkeit, so wie auch die Methode, wie er zu derselben gelangte, noch manches zu wünschen übrig ließ. Vervollkommnet ward dieselbe zuerst von Ampère in einer Abhandlung im Jour-

nal de l'école polytechnique. Cah. XIII., und auf Functionen mit jeder beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen ausgedehnt in den Annales de Mathématiques. T. XVII. p. 317. Lagrange hatte bekanntlich bei seiner berühmten Théorie des fonctions analytiques den Zweck, die Theorie des Differentialcalculs durch völlige Ausschließung des Unendlichen und der Betrachtung der Gränzen zu erleichtern und fester zu begründen. Ist denn aber das Unendliche nicht selbst in den unendlichen Reihen enthalten? Völlig eliminirt wird es nur dann, wenn man in jedem Falle, wo man die Reihe auch abbrechen mag, den Rest oder den Fehler bestimmt, und die Reihe nur dann als sogenannte unendliche Reihe zuläßt, wenn der Fehler, indem die Gliederzahl wächst, sich der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben, wenn man nur die Gliederzahl groß genug nimmt, beliebig nahe gebracht werden kann. Soll aber der Fehler im Allgemeinen auf eine völlig strenge und möglichst einfache Weise bestimmt werden, so ist, wie man in neuerer Zeit erkannt hat, die Betrachtung der Gränzen unerläßlich, und so ist es allerdings überaus merkwürdig, daß Lagrange, welcher durch seine Functionen-Theorie die Betrachtung der Gränzen umgehen und vermeiden wollte, durch die ebenfalls von ihm zuerst gegebene Bestimmung des Fehlers bei der Taylor'schen und Maclaurinschen Reihe die Differentialrechnung wieder zu der Betrachtung der Gränzen zurückgeführt hat. Für das wichtigste neuere Werk in dieser Beziehung, worin die Differentialrechnung ganz auf die Lehre von den Gränzen gebaut ist, halten wir unbedenklich das Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal, données a l'école royale polytechnique par Cauchy, wovon bis jetzt der erste Theil (Paris 1823.) erschienen ist, welcher die Differentialrechnung vollständig und einen Theil der Integralrechnung enthält. Dieses Werk sollte von Keinem ungelesen bleiben, welcher die Strenge bei analytischen Untersuchungen liebt. Gegenwärtiger Artikel schließt sich vorzüglich an dieses Werk an. Zweckmäßig wird mit dessen Studium der Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique von demselben Verfasser (Paris. 1821.) verbunden. Die Gränzenmethode ist in ersterem Werke auf einfachere Art angewandt, als in L'Huiliers schon aus dem ersten Theile dieses Wörterbuchs hinlänglich bekannter expositio elementaris principiorum calculi differentialis et integralis. Tubingae. 1795. Vorzüglich gehört endlich noch hierher ein treffliches Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques von Crelle in dessen Journal. Thl. VII. Heft 3 und 4, welches auch in einem besondern Abdruck (Berlin. 1831.) erschienen ist. Die genannten Schriften bilden, wie es mir scheint, den wahren Kern der neuern Literatur der Differentialrechnung. Von andern nenne ich nur noch folgende:

Buzenzeiger's leichte und kurze Darstellung der

Differential-Rechnung. Ansbach. 1809. (Ganz nach Lagrange's Functionentheorie gearbeitet, aber in dieser Beziehung recht empfehlenswerth, auch wegen eines allgemeinen der ganzen Darstellung zum Grunde gelegten Satzes.).

Versuch einer rein algebraischen und dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik angemessenen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen von Crelle. Erster Band. Göttingen. 1813 (ebenfalls ganz nach Lagrange, wegen der vielen neuen Zeichen eine besondere Einarbeitung erfordernd.).

J. T. Mayers vollständiger Lehrbegriff der höhern Analysis. 2 Thle. Göttingen. 1817 u. 18. (Für Solche, die höhere Analysis praktischer Zwecke wegen studiren, recht brauchbar, ohne auf strenge Gründlichkeit Anspruch machen zu dürfen.).

Anfangsgründe der höhern Analysis von Bohnenberger. Tübingen. 1811 (Gehört zu den gründlichsten Schriften unter denen, welche von der Lehre von den Gränzen ausgehen.).

Schweins Theorie der Differenzen und Differentiale. Heidelberg. 1825 (Wegen der vielen eleganten in großer Allgemeinheit ausgeführten Entwickelungen nach hinlänglicher Vorbereitung aus andern Schriften zum Studium ebenfalls sehr zu empfehlen.).

Lubbe, Lehrbuch des höhern Calculs. Berlin. 1825 (In's Französische übersetzt von Kartscher Paris. 1831.).

Mehrere mit vieler Einsicht ausgeführte Untersuchungen enthält: Differenzial- und Differenzen-Calcul von L. Oettinger. Mainz. 1831.

Das ausführlichste Werk ist noch immer:

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par Lacroix. T. I — III. Seconde édition Paris. 1810 — 19. (In den Principien sich an Lagrange anschließend, ohne sich der Zeichen desselben zu bedienen.). Von dem ersten Theile der ältern Ausgabe (1797) hat Grüson eine ungemein schlechte Uebersetzung in zwei Bänden geliefert (Berlin. 1799.).

Als Elementarlehrbücher sind in Frankreich am beliebtesten:

Lacroix, Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral. 2e éd. Paris. 1806. (Uebers. von Baumann) und

Boucharlat, Élémens de calcul différentiel et intégral Paris. 1814. (Uebers. von Göbel. Frkft. 1823.).

Ersteres ist ganz elementar, und beruht auf der Lehre von den Gränzen, ohne auf völlig consequente Durchführung Anspruch machen zu dürfen.

Garnier, Leçons de calcul diff. et int. Paris. 1811 et 1812.

Dubourguet, Traités élémentaires de calcul diff. et int. 2 Vol. Paris. 1810 et 1811.

Eine sich im Wesentlichen ganz an Lagrange anschließende ausführliche Abhandlung von Gergonne: Exposition élémentaire des principes du calcul différential s. in dessen Annales de Math. T. XX. No. VIII u. IX.

Mit der Aufhellung der Principien der Differentialrechnung beschäftigen sich, und sind in dieser Beziehung empfehlenswerth:

E. G. Fischers Untersuchungen über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis. Berlin. 1808. und

Carnot, reflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal. Paris. 1796 (Uebers. von Hauff. Frkft. 1800.).

Obiges Verzeichniß enthält nur einige der wichtigsten, am meisten zu empfehlenden Schriften.

Diacaustica, vergl. den Art. Caustische Flächen und Linien i. d. Z.

Discontinuirliche Functionen (fonctions discontinues) s. Stetige Functionen.

Distanz-Exponenten, s. Combinatorische Analysis (21.).

Divergenz der Reihen, s. Convergenz der Reihen.

Dividuus, kleinster gemeinschaftlicher, s. Theiler (9.).

Dodekadik. Horstig, das arithmetische Duodecimal-System von seiner praktischen Seite dargestellt. Leipzig. 1801.

Doppelpunkt, s. Vielfacher Punkt.

Doppelschnitts-Verhältniß (ratio bissectionalis) ist das Verhältniß zwischen den zwei Verhältnissen, nach welchen eine gerade Linie, in Bezug auf zwei in ihr liegende Punkte als Gränzpunkte, in zwei andern Punkten geschnitten wird. Man denke sich nämlich eine beliebige gerade Linie AB, deren Gränzpunkte A und B sind, und betrachte die Richtung von A nach B als positiv, die entgegengesetzte Richtung als negativ. Ist nun C ein dritter beliebiger Punkt in der in Rede stehenden Linie, so soll AC : CB das Verhältniß seyn, nach welchem AB von C in Bezug auf A, B als Gränzpunkte geschnitten wird, wobei zu bemerken ist, daß dieses Verhältniß nach der verschiedenen Lage von C in Bezug auf A, B positiv und negativ seyn kann. D sey ein vierter Punkt in der in Rede stehenden Linie,

und folglich AD:DB das Verhältniß, nach welchem AB von D in Bezug auf A, B als Gränzpunkte geschnitten wird; so ist das Verhältniß zwischen den Verhältnissen AC : CB und AD : DB, oder das Verhältniß

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

das Doppelschnitts-Verhältniß, nach welchem AB von C und D in Bezug auf A und B als Gränzpunkte geschnitten wird. Mehrere Sätze über solche Verhältnisse hat Möbius in seinem trefflichen Barycentrischen Calcul (Leipzig, 1827.) S. 243 — 265 bewiesen, und deren Anwendung in der Geometrie gezeigt. M. s. auch den Art. Vielecksschnitts-Verhältniß i. d. Z.

Dreieck. Das ebene geradlinige Dreieck hat eine große Menge merkwürdiger Eigenschaften, von denen im Artikel Dreieck im ersten Theile dieses Wörterbuchs schon mehrere bewiesen worden sind. Die Zahl derselben ist aber durch neuere Erfindungen sehr vermehrt worden, und es haben vorzüglich zwei deutsche Mathematiker: Crelle und Feuerbach, um diese einfache Figur sich sehr verdient gemacht. M. s. Crelle: Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks. Berlin, 1816. und Feuerbach: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks. Nürnberg, 1822. Die von diesen beiden Mathematikern gefundenen Sätze hat C. F. A. Jacobi in einer guten Gelegenheitsschrift (De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis. Numburgi, 1825.) gesammelt, systematisch geordnet, zum Theil neu bewiesen, und mit eignen Bemerkungen vermehrt. Auch s. m. Carnot: Geometrie der Stellung, a. d. Franz. von Schumacher Thl. I. u. II. Altona, 1810. Straßnicki: Das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogien dargestellt. Wien, 1827. Metternich: Geometrische Abhandlung über die Theilung des Dreiecks durch drei Linien nach bestimmten Richtungen. Mainz, 1821. Crelle: Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen. Berlin, 1821. Troll: Aufgaben über ebene Dreiecke, worin Summen oder Differenzen von Seiten oder Winkeln gegeben sind. Halle, 1826. Strehlke: Aufgaben üb. das geradlinigte Dreieck. Königsb. 1826; die bekannten Sammlungen geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch und Puissant, die mathematischen Journale und den Artikel Trigonometrie (19.) und Transversale in diesem Wörterbuche, wo man auch noch einige hierher gehörende Schriften angeführt findet. Ueber die Formel für die Area des Dreiecks aus seinen drei Seiten s. m. die besondere Schrift: Ueber die Berechnung der Dreiecksebene aus ihren drei Seiten von J. J. I. Hoffmann. Aschaffenburg, 1813., und von ältern Werken D. Schwenters Geometriae practicae novae et auctae Tractatus II. Nürnberg, 1623. S. 111—118., und C. Cla-

vii **Geometria practica. Lugduni, 1607. p. 158—161.**, wo sich auch ein synthetischer Beweis (s. Thl. I. S. 933.) der Formel findet. Es kann nicht unsere Absicht seyn, in gegenwärtigem Artikel alle neuerlich entdeckten Eigenschaften des Dreiecks zu sammeln, weil dazu ein besonderes Buch erforderlich seyn würde, und diese Sätze, wenn ich mich so ausdrücken darf, wie so manches Andere in der Mathematik, doch eigentlich bloß zum Luxus gehören, ohne daß ich denselben hierdurch ihr wissenschaftliches Interesse im mindesten schmälern, namentlich ihren großen Werth für die Geistes-Gymnastik absprechen will. Nur Einiges des Wichtigern, vielleicht weniger Bekannten, sollen die folgenden Blätter aus diesem großen Reichthume ausheben.

1. Am meisten sind die sogenannten Scheitellinien des Dreiecks untersucht worden, worüber im Artikel Dreieck im ersten Theile die Nummern 13, 14, 15, 16 nachzusehen sind. Nach einer Bemerkung von Gauß, die man in Carnots Geometrie der Stellung. Thl. II. S. 363. findet, läßt sich der Satz, daß die drei von den Spitzen eines Dreiecks auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel, d. i. seine drei Höhenlinien, jederzeit in einem Punkte zusammentreffen (Dreieck. 14.), höchst einfach auf folgende Art beweisen. Sey ABC (Fig. 20.) das gegebene Dreieck; die drei Höhen seyen Aa, Bb, Cc. Zieht man nun durch A, B, C Parallelen mit der Gegenseite des gegebenen Dreiecks, wodurch ein neues Dreieck A'B'C' entsteht, so ist, weil z. B. AA' und BB' Parallelogramme sind, $CA' = AB$, $CB' = AB$, also $CA' = CB'$. Ganz eben so erhellet, daß $BA' = BC'$, $AB' = AC'$ ist, und die drei Höhen des Dreiecks ABC sind folglich drei auf die Seiten des Dreiecks A'B'C' durch deren Mitten errichtete Perpendikel, welche sich nach einem Satze, der schon in den Elementen angetroffen wird, auch im Art. Dreieck (13.) bewiesen ist, in einem Punkte schneiden.

2. Daß die von den Spitzen A, B, C (Fig. 21.) eines Dreiecks ABC nach den Mitten a, b, c der Gegenseiten gezogenen Linien Aa, Bb, Cc sich in einem Punkte schneiden, mag am einfachsten auf folgende Art bewiesen werden.

Sey $Ab = Cb$, $Ba = Ca$. Man ziehe Aa, Bb, welche sich in O schneiden. Zieht man nun CO und verlängert selbige bis zur Seite AB, so ist zu zeigen, daß AB von CO halbirt wird, oder $Ac = Bc$ ist. Nach der Voraussetzung ist $\triangle ABa = \triangle ACa$, $\triangle BOa = \triangle COa$, woraus durch Subtraction $\triangle AOB = \triangle AOC$, und ganz eben so $\triangle AOB = \triangle BOC$, also $\triangle AOC = \triangle BOC$ folgt. Letztere zwei Dreiecke haben einerlei Grundlinie CO, also, in Bezug auf diese Grundlinie, auch gleiche Höhen. Die Höhen der Dreiecke AOC, BOC in Bezug auf CO als Basis sind aber zugleich die Höhen der Dreiecke ACc und BCc in Bezug auf Cc als gemeinschaftliche Grundlinie. Folglich haben auch die letztern zwei Dreiecke einerlei Grundlinie Cc und

gleiche Höhen, und sind also einander gleich, d. i. $\Delta ACc = \Delta BCc$. Nimmt man aber Ac und Bc als Grundlinien dieser Dreiecke an, so haben dieselben einerlei Höhe, und es müssen folglich, da sie einander gleich sind, auch ihre Grundlinien einander gleich, d. i. $Ac = Bc$ seyn, w. z. b. w.

Da, wie wir vorher gesehen haben, $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta BOC$, und, wegen $Ac = Bc$, $Ab = Cb$, $Ba = Ca$, $\Delta AOc = \Delta BOc = \frac{1}{2}\Delta AOB$, $\Delta AOb = \Delta COb = \frac{1}{2}\Delta AOC$, $\Delta BOa = \Delta COa = \frac{1}{2}\Delta BOC$ ist; so ist $\Delta AOc = \Delta BOc = \Delta AOb = \Delta COb = \Delta BOa = \Delta COa$; folglich z. B. $\Delta AOC = 2\Delta AOc$, $CO = 2.cO$, und eben so $BO = 2.bO$, $AO = 2.aO$, oder $Cc = 3.cO$, $Bb = 3.bO$, $Aa = 3.aO$.

Es ist

$$\frac{AO}{Aa} + \frac{BO}{Bb} + \frac{CO}{Cc} = 2,$$

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1,$$

wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt.

3. So wie man den Inhalt eines Dreiecks durch seine drei Seiten darstellen kann, so kann man denselben auch durch seine drei Höhen ausdrücken. Ist nämlich immer ABC das gegebene Dreieck, dessen drei den Winkeln A, B, C gegenüberstehende Seiten wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden, so ist, wenn die durch A, B, C gezogenen Höhen respective p, q, r sind, und Δ den Inhalt des Dreiecks bezeichnet:

$$a = \frac{2\Delta}{p},\ b = \frac{2\Delta}{q},\ c = \frac{2\Delta}{r};$$

also, weil bekanntlich

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

ist:

$$\Delta = \tfrac{4}{4}\Delta^2\sqrt{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)},$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen die reciproken Höhen $= p', q', r'$ setzen:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{(p'+q'+r')(q'+r'-p')(p'+r'-q')(p'+q'-r')}}.$$

Für $p'+q'+r' = 2\sigma$ ergiebt sich leicht:

$$\Delta = \frac{1}{4\sqrt{\sigma(\sigma-p')(\sigma-q')(\sigma-r')}}.$$

Bezeichnen wir die Area eines Dreiecks, dessen Seiten die reciproken Höhen des gegebenen Dreiecks sind, durch Δ', so ist bekanntlich

$$\Delta' = \sqrt{\sigma(\sigma-p')(\sigma-q')(\sigma-r')};$$

folglich immer

$$4\Delta\Delta' = 1 .$$

4. Auch durch die drei von den Spitzen nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Linien läßt sich der Inhalt des Dreiecks ausdrücken. Die Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 21.) seyen jetzt 2a, 2b, 2c, und die durch A, B, C nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Linien seyen α, β, γ. In Fig. 22. ist nun

$$\cos\varphi = \frac{\alpha^2 + a^2 - 4c^2}{2\alpha a}, \ \cos(180^0 - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{\alpha^2 + a^2 - 4b^2}{2\alpha a};$$

$$\alpha^2 + a^2 - 4c^2 = -\alpha^2 - a^2 + 4b^2, \ \alpha^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 .$$

Wir haben also

$$\alpha^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \ a^2 + \alpha^2 = 2b^2 + 2c^2 ;$$
$$\beta^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, \ b^2 + \beta^2 = 2c^2 + 2a^2 ;$$
$$\gamma^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \ c^2 + \gamma^2 = 2a^2 + 2b^2 ;$$

wodurch zugleich die Linien α, β, γ durch die Seiten des Dreiecks ausgedrückt sind. Eliminirt man c aus der ersten und dritten, so wie aus der zweiten und dritten Gleichung, so kommt:

$$\alpha^2 + 2\gamma^2 = 3a^2 + 6b^2, \ \beta^2 + 2\gamma^2 = 6a^2 + 3b^2 ,$$

und hieraus durch Elimination von b:

$$2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 = 9a^2 .$$

Um also a, b, c durch α, β, γ auszudrücken, hat man:

$$a^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{9}, \ b^2 = \frac{2(\alpha^2 + \gamma^2) - \beta^2}{9}, \ c^2 = \frac{2(a^2 + \beta^2) - \gamma^2}{9} .$$

Denkt man sich nun die durch A gehende Höhe y des Dreiecks gezogen, und bezeichnet die durch dieselbe gebildeten Abschnitte der Grundlinie auf der rechten und linken Seite der Höhe durch x und 2a — x, so ist

$$y^2 = 4b^2 - x^2 = 4c^2 - (2a - x)^2 ,$$

woraus leicht

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} ,$$

$$y^2 = 4b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}\right)^2 = \frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{a^2} ;$$

also, weil $\Delta = ay$ ist,

$$\Delta^2 = 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

folgt. Setzt man nun für a, b, c ihre obigen Ausdrücke durch α, β, γ, so wird:

$$4a^2 b^2 = \frac{20\alpha^2\beta^2 + 8\alpha^2\gamma^2 + 8\beta^2\gamma^2 - 8\alpha^4 - 8\beta^4 + 16\gamma^4}{81} ,$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = \frac{2\alpha^2\beta^2 - 10\alpha^2\gamma^2 - 10\beta^2\gamma^2 + \alpha^4 + \beta^4 + 25\gamma^4}{81} ,$$

$$\Delta^2 = \frac{18\alpha^2\beta^2 + 18\alpha^2\gamma^2 + 18\beta^2\gamma^2 - 9\alpha^4 - 9\beta^4 - 9\gamma^4}{81} ,$$

$$= \frac{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{9}$$

$$= \frac{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2)}{9}$$

$$= \frac{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{9}$$

$$= \frac{\{(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2\}\{\gamma^2 - (\alpha-\beta)^2\}}{9}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{9}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{3}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)},$$

oder, wenn wir $\alpha + \beta + \gamma = 2s'$ setzen:

$$\Delta = \tfrac{4}{3}\sqrt{s'(s'-\alpha)(s'-\beta)(s'-\gamma)}.$$

Ist Δ'' der Inhalt des Dreiecks, dessen drei Seiten die von den Spitzen nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Linien α, β, γ sind; so ist

$$\Delta = \tfrac{4}{3}\Delta'', \quad 3\Delta = 4\Delta''.$$

Behält Δ' die ihm in (3.) beigelegte Bedeutung, so ist

$$\Delta = \frac{1}{4\Delta'} = \tfrac{4}{3}\Delta'', \quad \Delta' = \frac{3}{16\Delta''},$$

oder $\Delta'\Delta'' = \frac{3}{16}$, so wie nach (3.) $\Delta\Delta' = \frac{1}{4}$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich auch unmittelbar Ausdrücke für die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der drei Scheitellinien in diesem Falle von den Spitzen des Dreiecks. Ist nämlich O dieser gemeinschaftliche Durchschnittspunkt, so ist nach (2.)

$$OA = \tfrac{2}{3}\alpha, \quad OB = \tfrac{2}{3}\beta, \quad OC = \tfrac{2}{3}\gamma;$$

also

$$OA = \tfrac{2}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$OB = \tfrac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$OC = \tfrac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2};$$

oder, wenn a', b', c' die ganzen Seiten des Dreiecks bezeichnen:

$$OA = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}b'^2 + \tfrac{1}{2}c'^2 - \tfrac{1}{4}a'^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2b'^2 + 2c'^2 - a'^2},$$

$$OB = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}a'^2 + \tfrac{1}{2}c'^2 - \tfrac{1}{4}b'^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2a'^2 + 2c'^2 - b'^2},$$

$$OC = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}a'^2 + \tfrac{1}{2}b'^2 - \tfrac{1}{4}c'^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2a'^2 + 2b'^2 - c'^2}.$$

Nach der in der Figur angewandten Bezeichnung ist nach (2.)

$$OA' = \tfrac{1}{2}OA, \quad OB' = \tfrac{1}{2}OB, \quad OC' = \tfrac{1}{2}OC,$$

woraus sich auch leicht Ausdrücke für OA', OB', OC' ergeben.

5. Man gelangt zu der vorher gefundenen Formel auch auf folgende Art durch eine sehr einfache Construction. Sey ABC (Fig. 23.) das gegebene Dreieck. A', B', C' seyen die Mitten der Seiten, und AA', BB', CC' die von den Spitzen nach den

Mitten der Gegenseiten gezogenen Linien, welche sich in O schneiden (2.). Durch A' ziehe man mit BB' die Parallele A'D, so ist

$$A'D : BB' = A'C : BC = 1 : 2,\ A'D = \tfrac{1}{2}BB'.$$

Macht man nun A''D = A'D und zieht A''B', so entsteht offenbar das Parallelogramm BB'A'A'', in welchem also B'A'' = BA' = A'C, und auch B'A'' der A'C parallel ist. Zieht man A'C', so ist diese Linie offenbar der Linie AB' (welche = ½ AC ist) parallel und gleich, und in den Dreiecken AB'A'', CA'C' sind also zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich, diese Dreiecke folglich congruent, also AA'' = CC'. Man sieht also, daß das Dreieck AA'A'' aus den Seiten $AA' = \alpha$, $A'A'' = BB' = \beta$, $AA'' = CC' = \gamma$ gebildet ist, so daß, wenn wir wie vorher seinen Inhalt $= \Delta''$ setzen,

$$\Delta'' = \tfrac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}$$

ist. Nun ist aber bekanntlich (2.) $A'O = \frac{1}{2}AO$; also auch $B'D = \frac{1}{2}AB'$, $AD = AB' + \frac{1}{2}AB' = \frac{3}{2}AB' = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}AC = \frac{3}{4}AC$; folglich $\Delta AA'D = \frac{3}{4}.\Delta AA'C$. Aber nach dem Obigen und nach der Voraussetzung $\Delta AA'D = \frac{1}{2}\Delta AA'A'' = \frac{1}{2}\Delta''$, $\Delta AA'C = \frac{1}{2}\Delta ABC = \frac{1}{2}\Delta$. Folglich

$$\tfrac{1}{2}\Delta'' = \tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}\Delta,\ \Delta' = \tfrac{3}{4}\Delta,\ \Delta = \tfrac{4}{3}\Delta',$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Delta = \tfrac{1}{3}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)},$$

wie in (4.).

6. Wendet man die so eben gezeigte Construction mehrere Mal hinter einander an, so entsteht eine Figur, wie die in Fig. 24. verzeichnete. Die gleichen Winkel sind in dieser Figur, in welche sich Jeder auch ohne besondere Erläuterung leicht finden wird, durch gleiche Zahlen bezeichnet. Daß man durch diese Construction zunächst immer zwölf, in der Figur schattirte, Dreiecke erhält, welche den ganzen Raum um A ausfüllen, erhellet augenblicklich daraus, weil die Winkel (1) (2) (3) (4) (5) (6) die Summe der Winkel des Dreiecks ABC ausmachen, wie ebenfalls aus der Figur erhellet, folglich

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = 180^\circ$$

ist. Der ganze in der Figur schattirte Raum ist nach (4.) und (5.), wenn wir wieder $\Delta ABC = \Delta$, $\Delta AA'C = \frac{1}{2}\Delta$ setzen,

$$= \tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta + \frac{3^2}{4^2}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta + \frac{3^3}{4^3}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{3^{10}}{4^{10}}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta + \frac{3^{11}}{4^{11}}\cdot\tfrac{1}{2}\Delta$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta\left\{1 + \tfrac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{3^3}{4^3} + \ldots + \frac{3^{11}}{4^{11}}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta.\frac{\frac{3^{12}}{4^{12}} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = \tfrac{1}{2}\Delta.\frac{4^{12} - 3^{12}}{4^{12} - 3.4^{11}}.$$

Denkt man sich die vorhergehende Construction in's Unendliche fortgesetzt, so daß man nämlich mit derselben nicht bloß einen ganzen Umlauf, sondern mehrere hinter einander vollendet, so ist die Area des ganzen auf diese Weise gebildeten Raums

$$= \tfrac{1}{2}\Delta.\left\{1 + \tfrac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{3^3}{4^3} + \frac{3^4}{4^4} + \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta.\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\Delta.\frac{4}{4-3} = 2\Delta,$$

d. h. dem doppelten ganzen gegebenen Dreiecke ABC gleich. Durch diese Construction werden also die Glieder und die Summe einer in's Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihe auf eine sehr einfache Weise geometrisch dargestellt. Das erste Glied dieser Reihe ist $= \frac{1}{2}\Delta$, der Exponent $= \frac{3}{4}$.

7. Wird in Fig. 25. der Winkel A des Dreiecks ABC durch die Linie $Aa = \alpha$ halbirt, so ist, wenn wir die ganzen Seiten des Dreiecks durch a, b, c bezeichnen, nach einem bekannten geometrischen Satze:

$$b:c = a - x:x;$$

$$x = \frac{ac}{b+c}, \quad a - x = \frac{ab}{b+c}.$$

Aber

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \frac{\alpha^2 + c^2 - x^2}{2\alpha c} = \frac{\alpha^2 + b^2 - (a-x)^2}{2\alpha b};$$

folglich, wenn man für x und a — x die gefundenen Ausdrücke setzt:

$$0 = bc(b+c)^2 - \alpha^2(b+c)^2 - a^2bc,$$

und hieraus, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$\alpha^2 = \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2\}}{(b+c)^2} = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2},$$

$$\beta^2 = \frac{ac\{(a+c)^2 - b^2\}}{(a+c)^2} = \frac{ac(a+b+c)(a+c-b)}{(a+c)^2},$$

$$\gamma^2 = \frac{ab\{(a+b)^2 - c^2\}}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

Nach dem Art. Trigonometrie (16.) ist

$$4bc\cos\tfrac{1}{2}A^2 = (a+b+c)(b+c-a),$$
$$4ac\cos\tfrac{1}{2}B^2 = (a+b+c)(a+c-b),$$
$$4ab\cos\tfrac{1}{2}C^2 = (a+b+c)(a+b-c).$$

Folglich

$$\alpha = \frac{2bc\cos\frac{1}{2}A}{b+c}, \quad \beta = \frac{2ac\cos\frac{1}{2}B}{a+c}, \quad \gamma = \frac{2ab\cos\frac{1}{2}C}{a+b};$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{8a^2b^2c^2} = \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Auch ist nach dem Obigen

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2}=\frac{(a+b+c)^3(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2},$$

d. i., wenn wir den Inhalt des Dreiecks durch $\varDelta$ bezeichnen:

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2}=\frac{16(a+b+c)^2\varDelta^2}{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2},$$

$$\varDelta=\frac{\alpha\beta\gamma(a+b)(a+c)(b+c)}{4abc(a+b+c)}.$$

Folglich auch, wenn man nach dem Obigen

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{4abc}=\frac{2abc\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

setzt:

$$\varDelta=\frac{2abc\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{a+b+c},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{(a+b+c)\varDelta}{2abc}.$$

Nach Trigonometrie (10.) ist auch

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)},\quad \frac{b}{a+c}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}(A-C)},\quad \frac{c}{a+b}=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Folglich

$$\alpha=\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{a\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{bc\sin A}{a\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\beta=\frac{2ac\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B}{b\cos\frac{1}{2}(A-C)}=\frac{ac\sin B}{b\cos\frac{1}{2}(A-C)},$$

$$\gamma=\frac{2ab\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{c\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{ab\sin C}{c\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Also auch, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$\alpha=\frac{b\sin C}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{c\sin B}{\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\beta=\frac{c\sin A}{\cos\frac{1}{2}(A-C)}=\frac{a\sin C}{\cos\frac{1}{2}(A-C)},$$

$$\gamma=\frac{a\sin B}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{b\sin A}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Durch Division folgt hieraus:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{b\sin C}{c\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{b\sin C}{a\sin B}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{c\sin A}{a\sin B}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-C)}=\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-C)}.$$

Man sieht hieraus z. B., daß in zwei ähnlichen Dreiecken, in denen α, β, γ und α', β', γ' die die Winkel halbirenden Linien sind,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'},\quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha'}{\gamma'},\quad \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta'}{\gamma'},$$

überhaupt

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha' : \beta' : \gamma'$$

ist.

Fällt man, wie in Fig. 26., auf die drei die Winkel halbirenden Linien von den Spitzen des Dreiecks die Perpendikel AC', BA', CB', AB_1, BC_1, CA_1; so ist

$$AA' = c\cos\tfrac{1}{2}A,\quad AA_1 = b\cos\tfrac{1}{2}A\,;$$
$$BB' = a\cos\tfrac{1}{2}B,\quad BB_1 = c\cos\tfrac{1}{2}B\,;$$
$$CC' = b\cos\tfrac{1}{2}C,\quad CC_1 = a\cos\tfrac{1}{2}C\,;$$

folglich

$$\left.\begin{matrix} AA'.BB'.CC' \\ AA_1.BB_1.CC_1 \end{matrix}\right\} = abc\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\,;$$

also nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{AA'.BB'.CC'}{a+b+c} = \frac{AA_1.BB_1.CC_1}{a+b+c}\,.$$

Durch Verbindung der obigen Gleichungen würde man noch manche andere ihrer Form wegen merkwürdige Ausdrücke finden können. So ist z. B.

$$\frac{\alpha^2(b+c)^2}{bc} = -a^2+b^2+c^2+2bc\,,$$
$$\frac{\beta^2(a+c)^2}{ac} = a^2-b^2+c^2+2ac\,,$$
$$\frac{\gamma^2(a+b)^2}{ab} = a^2+b^2-c^2+2ab\,;$$

also, wenn man addirt:

$$\frac{\alpha^2(b+c)^2}{bc} + \frac{\beta^2(a+c)^2}{ac} + \frac{\gamma^2(a+b)^2}{ab}$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = (a+b+c)^2\,,$$

$$\alpha^2 bc\left\{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\}^2 + \beta^2 ac\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right\}^2 + \gamma^2 ab\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right\}^2$$
$$= (a+b+c)^2\,,$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}\cdot\frac{1}{bc}\left\{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\}^2 + \frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{1}{ac}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right\}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}\cdot\frac{1}{ab}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right\}^2\,.$$

Wir haben oben α, β, γ durch a, b, c dargestellt, überhaupt zwischen diesen sechs Größen drei Gleichungen gefunden. Die umgekehrte Aufgabe, nämlich a, b, c, durch α, β, γ auszudrücken, macht eine weitläufige Elimination nöthig, und die Resultate scheinen sehr complicirt auszufallen.

Um die Abstände des Punktes O von den drei Spitzen des Dreiecks zu finden, suche man zuerst den Halbmesser des in das Dreieck beschriebenen Kreises, welchen wir $=\varrho$ setzen wollen. Für denselben ist offenbar

$$\varrho(a+b+c) = 2\Delta,\ \varrho = \frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Nun ist

$$\varrho = AO.\sin\tfrac{1}{2}A,\ AO = \frac{\varrho}{\sin\frac{1}{2}A};$$

also, wenn man für $\sin\frac{1}{2}A$ seinen bekannten Ausdruck durch die Seiten des Dreiecks setzt, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$AO = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}} = \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}},$$

$$BO = \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}} = \sqrt{\frac{ac(a+c-b)}{a+b+c}},$$

$$CO = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

Also

$$AO+BO+CO = \frac{\sqrt{bc(s-a)} + \sqrt{ac(s-b)} + \sqrt{ab(s-c)}}{\sqrt{s}}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\alpha = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c},\ \beta = \frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c},\ \gamma = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b};$$

also

$$\frac{\alpha}{AO} = \frac{2s}{b+c},\ \frac{\beta}{BO} = \frac{2s}{a+c},\ \frac{\gamma}{CO} = \frac{2s}{a+b}.$$

Folglich

$$\frac{AO}{Aa} + \frac{BO}{Bb} + \frac{CO}{Cc} = \frac{2(a+b+c)}{2s},$$

d. i., weil $a+b+c=2s$ ist:

$$\frac{AO}{Aa} + \frac{BO}{Bb} + \frac{CO}{Cc} = 2.$$

Da nun

$$\frac{Aa}{Aa} + \frac{Bb}{Bb} + \frac{Cc}{Cc} = 3$$

ist, so ergiebt sich augenblicklich durch Subtraction:

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1.$$

Oa, Ob, Oc selbst erhält man, wenn die bekannten AO, BO, CO von den ebenfalls bekannten $Aa=\alpha$, $Bb=\beta$, $Cc=\gamma$ abgezogen werden.

8. Wir wollen nun auch einen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks abc (Fig. 27.) suchen, wenn Aa, Bb, Cc die Linien sind, welche die Winkel des Dreiecks ABC halbiren. Der Radius des in das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises, dessen Mittelpunkt bekanntlich O ist, sey wieder $=\varrho$, so daß also in der Figur $Oa'=Ob'=Oc'=\varrho$ ist. Es ist nun offenbar

$$Oa = \varrho \sec aOa' = \varrho \sec(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C - 90^0 + \tfrac{1}{2}C)$$
$$= \varrho \sec(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - 90^0 - \tfrac{1}{2}(B - C)),$$

d. i., zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$Oa = \varrho \sec\tfrac{1}{2}(B-C),\quad Ob = \varrho \sec\tfrac{1}{2}(A-C),\quad Oc = \varrho \sec\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Fällt man ferner von a, b, c auf Bb, Cc, Aa die Perpendikel aa'', bb'', cc''; so ist offenbar

$$aa'' = Oa.\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \varrho \sec\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}(A+B),$$
$$bb'' = Ob.\sin\tfrac{1}{2}(B+C) = \varrho \sec\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}(B+C),$$
$$cc'' = Oc.\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \varrho \sec\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(A+C);$$

folglich, weil

$$\Delta abc = \tfrac{1}{2}aa''.Ob + \tfrac{1}{2}bb''.Oc + \tfrac{1}{2}cc''.Oa$$

ist:

$$\frac{2\Delta abc}{\varrho^2} = \sec\tfrac{1}{2}(A-C)\sec\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$+ \sec\tfrac{1}{2}(A-B)\sec\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}(B+C)$$
$$+ \sec\tfrac{1}{2}(B-C)\sec\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(A+C).$$

Aber

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin B),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \tfrac{1}{2}(\sin B + \sin C),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-C) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C).$$

Folglich, wenn man sich die Secanten durch die Cosinus dargestellt denkt:

$$\Delta abc = \tfrac{1}{2}\varrho^2 . \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

oder nach Trigonometrie (18.):

$$\Delta abc = \frac{2\varrho^2 \cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}.$$

Nach (7.) ist

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{8abc \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)};$$

folglich

$$\Delta abc = \frac{\alpha\beta\gamma\varrho^2}{4abc \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}.$$

Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung ergiebt sich auf der Stelle wie in (7.):

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\varrho(a+b+c),\quad \varrho = \frac{2\Delta}{a+b+c};$$

folglich

$$\Delta abc = \frac{\alpha\beta\gamma\,\Delta^2}{abc(a+b+c)^2 \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}.$$

Aber, wie leicht erhellet:

$$2\Delta = \alpha(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A = \beta(a+c)\sin\tfrac{1}{2}B = \gamma(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C = \frac{8\Delta^3}{\alpha\beta\gamma(a+b)(a+c)(b+c)};$$

also

$$\Delta abc = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc(a+b+c)^2\Delta}.$$

Ferner ist nach (7.)

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc(a+b+c)^2\Delta} = \frac{2abc\Delta}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Folglich

$$\Delta abc = \frac{2abc\Delta}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Durch einen sehr weitläufigen trigonometrischen Calcul findet Jacobi a. a. O. (p. 15.)

$$\Delta abc = \frac{2\Delta}{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1}.$$

Von der Uebereinstimmung beider Ausdrücke kann man sich durch einfache Rechnung überzeugen.

Nach (7.) ist auch noch

$$\alpha\beta\gamma = \frac{abc\sin A\sin B\sin C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}.$$

Aber

$$2\Delta = ab\sin C = ac\sin B = bc\sin A,$$
$$8\Delta^3 = abc.abc\sin A\sin B\sin C;$$

folglich

$$\alpha\beta\gamma\, abc = \frac{8\Delta^3}{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\, abc\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A-C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}.$$

9. Bezeichnet man die den Seiten a, b, c eines Dreiecks entsprechenden Höhen wie in (3.) wieder durch p, q, r, so findet man leicht

$$p^2 = \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2},$$

$$q^2 = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2a^2-(b^2+a^2-c^2)^2}{4b^2},$$

$$r^2 = \frac{4c^2a^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2} = \frac{4c^2b^2-(c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2},$$

wodurch die Höhen durch die Seiten ausgedrückt sind. Man kann diese Ausdrücke auf bekannte Weise auch leicht in Factoren zerlegen. Um die Seiten durch die Höhen auszudrücken, hat man

$$ap = bq = cr,\ b = \frac{p}{q}a,\ c = \frac{p}{r}a.$$

Nach Trigonometrie (9.) ist nun

$$\sin C^2 = \frac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4a^2b^2},$$

und offenbar

$$p = b\sin C, \quad p^2 = b^2 \sin C^2;$$

also

$$4a^2p^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$
$$= 2a^4p^4\left(\frac{1}{p^2q^2} + \frac{1}{p^2r^2} + \frac{1}{q^2r^2}\right) - a^4p^4\left(\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4}\right)$$
$$4p'^2 = a^2\{2(p'^2q'^2 + p'^2r'^2 + q'^2r'^2) - (p'^4 + q'^4 + r'^4)\},$$

wenn wir die reciproken Höhen durch p', q', r' bezeichnen. Also

$$a = \frac{2p'}{\sqrt{2(p'^2q'^2 + p'^2r'^2 + q'^2r'^2) - (p'^4 + q'^4 + r'^4)}},$$
$$b = \frac{2q'}{\sqrt{2(p'^2q'^2 + p'^2r'^2 + q'^2r'^2) - (p'^4 + q'^4 + r'^4)}},$$
$$c = \frac{2r'}{\sqrt{2(p'^2q'^2 + p'^2r'^2 + q'^2r'^2) - (p'^4 + q'^4 + r'^4)}}.$$

10. Sind in Fig. 28. AA', BB', CC' die drei Höhen des Dreiecks $ABC = \Delta$, so wollen wir nun auch den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C' = \Delta'$ zu bestimmen suchen, indem wir die Seiten dieses Dreiecks durch a', b', c' bezeichnen. Sehr leicht erhellet die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke BAB', CAC'. Daher ist

$$AC : AB = AC' : AB',$$

und folglich offenbar auch $\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$. Also

$$AB : BC = AB' : B'C';$$
$$c : a = c\cos A : a', \quad a' = a\cos A.$$

Folglich

$$a' = a\cos A, \quad b' = b\cos B, \quad c' = c\cos C;$$

oder, wenn man für die Cosinus ihre Ausdrücke durch die Seiten des Dreiecks ABC setzt:

$$a' = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}, \quad b' = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}, \quad c' = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$

Hieraus folgt leicht:

$$a' + b' + c' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2abc}$$
$$= \frac{2ab}{c}\sin C^2 = \frac{8}{abc}\cdot\tfrac{1}{4}a^2b^2\sin C^2 = \frac{8\Delta^2}{abc},$$
$$b' + c' - a' = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc},$$
$$a' + c' - b' = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc},$$
$$a' + b' - c' = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{2abc}.$$

Also

$$16\Delta'^2 = (a' + b' + c')(b' + c' - a')(a' + c' - b')(a' + b' - c')$$
$$= \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2(a^2 + c^2 - b^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2\Delta^2}{a^4b^4c^4},$$

$$\Delta' = \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}\Delta$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot 2\Delta$$

$$= 2\Delta \cos A \cos B \cos C\,,$$

welches lauter sehr einfache und merkwürdige Relationen sind. Nach dem Obigen ist

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}\,;$$

folglich, wenn wir

$$\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{16a^2b^2c^2} = L$$

setzen, bloß in den drei Seiten des gegebenen Dreiecks ausgedrückt:

$$\Delta' = L\sqrt{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}\,.$$

Die Entfernungen des Punktes O von den Spitzen des Dreiecks erhält man leicht auf folgende Art. Es ist

$$AB' = c\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b},\quad AA' = \frac{2\Delta}{a}\,.$$

Aber offenbar

$$AA':AC = AB':AO,\quad AO = \frac{b\,.\,AB'}{AA'}\,.$$

Folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$AO = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4\Delta},\quad BO = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{4\Delta},\quad CO = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4\Delta}\,.$$

Also auch

$$\frac{AO}{AA'} = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{8\Delta^2},\quad \frac{BO}{BB'} = \frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{8\Delta^2},\quad \frac{CO}{CC'} = \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{8\Delta^2}\,.$$

Folglich

$$\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'}$$

$$= \frac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}{8\Delta^2}\,.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$16\Delta^2 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)\,.$$

Folglich

$$\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 2\,,$$

$$\frac{A'O}{AA'} + \frac{B'O}{BB'} + \frac{C'O}{CC'} = 1\,.$$

Auch ist

$$AO\,.\,AA' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}\,,$$

$$BO\,.\,BB' = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}\,,$$

$$CO . CC' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} .$$

Folglich

$$AO . AA' + BO . BB' + CO . CC' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} .$$

11. Es mögen sich nun einige allgemeinere Sätze hier anschließen. Besonders wichtig ist folgender Satz. Wenn in Fig. 29. **Aa**, **Bb**, **Cc** drei beliebige durch einen Punkt **O** und die Spitzen des Dreiecks **ABC** gehende gerade Linien sind, so ist immer

$$Ab . Ca . Bc = Ac . Ba . Cb .$$

Zieht man nämlich durch O mit den Seiten des Dreiecks die Parallelen $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$; so ist

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{O\gamma}{O\alpha'} = \frac{A\beta'}{C\beta} ,$$

$$\frac{Ca}{Ba} = \frac{O\beta}{O\gamma'} = \frac{C\alpha'}{B\alpha} ,$$

$$\frac{Bc}{Ac} = \frac{O\alpha}{O\beta'} = \frac{B\gamma'}{A\gamma} .$$

Aber

$$\frac{A\beta'}{B\alpha} = \frac{AC}{BC}, \frac{C\alpha'}{A\gamma} = \frac{BC}{AB}, \frac{B\gamma'}{C\beta} = \frac{AB}{AC} ;$$

$$\frac{A\beta' . C\alpha' . B\gamma'}{C\beta . B\alpha . A\gamma} = \frac{AB . AC . BC}{AB . AC . BC} = 1 .$$

Folglich nach dem Vorhergehenden offenbar auch

$$\frac{Ab . Ca . Bc}{Cb . Ba . Ac} = \frac{A\beta' . C\alpha' . B\gamma'}{C\beta . B\alpha . A\gamma} = 1 ,$$

$$Ab . Ca . Bc = Ac . Ba . Cb .$$

12. Auch ist immer

$$\sin CAa \sin ABb \sin BCc = \sin BAa \sin CBb \sin ACc .$$

Es ist nämlich

$$\frac{Ca}{AC} = \frac{\sin CAa}{\sin CaA}, \frac{Ba}{AB} = \frac{\sin BAa}{\sin BaA} ;$$

$$\frac{Ab}{BA} = \frac{\sin ABb}{\sin AbB}, \frac{Cb}{BC} = \frac{\sin CBb}{\sin CbB} ;$$

$$\frac{Bc}{CB} = \frac{\sin BCc}{\sin BcC}, \frac{Ac}{CA} = \frac{\sin ACc}{\sin AcC} .$$

Aber nach (11.)

$$\frac{Ca . Ab . Bc}{AC . BA . CB} = \frac{Ba . Cb . Ac}{AB . BC . CA} .$$

Folglich auch

$$\frac{\sin CAa . \sin ABb . \sin BCc}{\sin CaA . \sin AbB . \sin BcC} = \frac{\sin BAa . \sin CBb . \sin ACc}{\sin BaA . \sin CbB . \sin AcC} .$$

Weil aber zwei zu 180° sich ergänzende Winkel jederzeit gleiche Sinus haben, so sind die Nenner dieser beiden Brüche, und folglich ihre Zähler einander gleich, welches die zu beweisende Gleichung giebt.

13. Beide so eben bewiesene Lehrsätze lassen sich auch umkehren. Sind nämlich im Dreieck **ABC** die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** so gezogen, daß

$$Ab.Ca.Bc = Ac.Ba.Cb$$

ist; so schneiden **Aa**, **Bb**, **Cc** sich jederzeit in einem Punkte.

Bb und **Cc** mögen sich in dem Punkte **O** schneiden, und durch denselben eine Linie **AO** gezogen seyn, welche verlängert die Seite **BC** des gegebenen Dreiecks in einem gewissen Punkte **a′** schneide; so ist nach (11.)

$$Ab.Ca'.Bc = Ac.Ba'.Cb.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$Ab.Ca.Bc = Ac.Ba.Cb;$$

folglich durch Division

$$\frac{Ca'}{Ca} = \frac{Ba'}{Ba}, \quad \frac{Ca'}{Ba'} = \frac{Ca}{Ba},$$

und, wenn man nun auf beiden Seiten die Einheit addirt:

$$1 + \frac{Ca'}{Ba'} = 1 + \frac{Ca}{Ba}, \quad \frac{Ba' + Ca'}{Ba'} = \frac{Ba + Ca}{Ba}, \quad \frac{BC}{Ba'} = \frac{BC}{Ba};$$

also **Ba = Ba′**. Folglich fallen die Punkte a und a′, also auch die Linien **Aa**, **Aa′** zusammen, und **Aa**, **Bb**, **Cc**, schneiden sich also, so wie **Aa′**, **Bb**, **Cc** nach der Construction in einem Punkte **O**.

14. Eben so läßt sich leicht zeigen, daß die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** sich in einem Punkte schneiden, wenn dieselben so gezogen sind, daß

$$\sin CAa \sin ABb \sin BCc = \sin BAa \sin CBb \sin ACc$$

ist.

Man mache die Construction ganz wie vorher, so ist nach (12.)

$$\sin CAa' \sin ABb \sin BCc = \sin BAa' \sin CBb \sin ACc.$$

Hieraus und aus der Voraussetzung folgt durch Division

$$\frac{\sin BAa}{\sin BAa'} = \frac{\sin CAa}{\sin CAa'}, \quad \frac{\sin BAa}{\sin CAa} = \frac{\sin BAa'}{\sin CAa'}.$$

Aber

$$\frac{\sin BAa}{\sin BaA} = \frac{Ba}{AB}, \quad \frac{\sin BAa'}{\sin Ba'A} = \frac{Ba'}{AB};$$

$$\frac{\sin CAa}{\sin CaA} = \frac{Ca}{AC}, \quad \frac{\sin CAa'}{\sin Ca'A} = \frac{Ca'}{AC}.$$

Folglich durch Division, weil

$$\sin BaA = \sin CaA, \quad \sin Ba'A = \sin Ca'A$$

ist:

$$\frac{\sin BAa}{\sin CAa} = \frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{AC}{AB}, \quad \frac{\sin BAa'}{\sin CAa'} = \frac{Ba'}{Ca'} \cdot \frac{AC}{AB}.$$

Folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{Ba'}{Ca'} \cdot \frac{AC}{AB}, \quad \frac{Ba}{Ca} = \frac{Ba'}{Ca'},$$

woraus nun der zu beweisende Satz augenblicklich durch eine ganz ähnliche Schlußart wie in (13.) folgt.

15. Aus den vorhergehenden Sätzen ergeben sich nun zum Theil mit der größten Leichtigkeit sieben verschiedene besonders merkwürdige Arten, die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** so zu ziehen, daß dieselben in einem Punkte zusammentreffen.

1) Zieht man die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** so, daß

$$Ab = Cb, \quad Ca = Ba, \quad Bc = Ac$$

ist; dann ist offenbar

$$Ab . Ca . Bc = Ac . Ba . Cb,$$

und **Aa**, **Bb**, **Cc** schneiden sich also nach (13.) in einem Punkte (M. vergl. 2.).

2) Zieht man die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** so, daß die Winkel des gegebenen Dreiecks halbirt werden, so folgt der Satz auf ganz gleiche Art aus (14.).

3) Sind **Aa**, **Bb**, **Cc** auf den Seiten des gegebenen Dreiecks senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke **AbB**, **AcC**; **CaA**, **CbB**; **BcC**, **BaA** offenbar einander ähnlich, und man hat also

$$\frac{Ab}{Ac} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{Ca}{Cb} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{Bc}{Ba} = \frac{BC}{AB};$$

folglich

$$\frac{Ab . Ca . Bc}{Ac . Cb . Ba} = 1,$$

woraus der Satz wieder unmittelbar nach (13.) folgt.

4) Zieht man die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** so, daß

$$Ab = Ac, \quad Bc = Ba, \quad Ca = Cb$$

ist, so ist ebenfalls

$$Ab . Bc . Ca = Ac . Ba . Cb,$$

oder

$$Ab . Ca . Bc = Ac . Ba . Cb,$$

und **Aa**, **Bb**, **Cc** schneiden sich folglich nach (13.) in einem Punkte. Daß **Aa**, **Bb**, **Cc** immer auf die angegebene Art gezogen werden können, ist leicht zu zeigen. Setzen wir nämlich $Ab = Ac = x$, so ist

$$Bc = Ba = c - x, \quad Cb = Ca = b - x;$$

$$Ba + Ca = b + c - 2x = a,$$

$$x = \frac{b+c-a}{2},$$

wodurch die Lage der gesuchten Linien bestimmt ist.

5) Man kann Aa, Bb, Cc auch so ziehen, daß

$$Ab = Ba, \; Bc = Cb, \; Ca = Ac$$

ist, indem dann ebenfalls

$$Ab.Bc.Ca = Ba.Cb.Ac,$$
$$Ab.Ca.Bc = Ac.Ba.Cb$$

ist, die Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** sich folglich in *einem* Punkte schneiden.

Um die Lage der Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** zu finden, setze man

$$Bc = Cb = x, \; Ca = Ac = y, \; Ab = Ba = z;$$

so ist

$$x + y = c, \; z + x = b, \; y + z = a,$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man:

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \; y = \frac{a+c-b}{2}, \; z = \frac{a+b-c}{2}.$$

6) Wir wollen nun die Lage der Linien **Aa**, **Bb**, **Cc** so zu bestimmen suchen, daß sie sich in *einem* Punkte schneiden, und die Winkel **BAa**, **CBb**, **ACc** einander gleich sind. Da Aa, Bb, Cc sich in *einem* Punkte schneiden sollen, so ergiebt sich aus (14.), wenn man einen der genannten einander gleichen Winkel $= x$ setzt, zur Bestimmung von x auf der Stelle die Gleichung

$$\sin x^3 = \sin(A-x)\sin(B-x)\sin(C-x).$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $\sin x^3 \sin A \sin B \sin C$ dividirt:

$$\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$$
$$= \frac{\sin(A-x)}{\sin A \sin x} \cdot \frac{\sin(B-x)}{\sin B \sin x} \cdot \frac{\sin(C-x)}{\sin C \sin x}$$
$$= (\cot x - \cot A)(\cot x - \cot B)(\cot x - \cot C)$$
$$= \cot x^3 - (\cot A + \cot B + \cot C)\cot x^2$$
$$+ (\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C)\cot x$$
$$- \cot A \cot B \cot C.$$

Der Coefficient des dritten Gliedes ist

$$= \cot A(\cot B + \cot C) + \cot B \cot C$$
$$= \cot A \cdot \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} + \cot B \cot C$$
$$= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\cos B \cos C - \cos(B+C)}{\sin B \sin C},$$

weil $A + B + C = 180°$ ist. Entwickelt man nun $\cos(B+C)$, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1.$$

Da nun ferner nach Trigonometrie (18.)

$$\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C + \cot A \cot B \cot C$$
$$= \cot A + \cot B + \cot C$$

ist, so wird obige Gleichung

$$0 = \cot x^3 - (\cot A + \cot B + \cot C)(\cot x^2 + 1) + \cot x\,,$$

oder

$$0 = (\cot x^2 + 1)(\cot x - \cot A - \cot B - \cot C)\,,$$

so daß also die Wurzeln unserer cubischen Gleichung aus den beiden Gleichungen

$$\cot x^2 + 1 = 0,\ \cot x - \cot A - \cot B - \cot C = 0$$

bestimmt werden müssen. Die erste Gleichung giebt $\cot x = \pm\sqrt{-1}$, welches zwei imaginäre Wurzeln sind. Die einzige mögliche Wurzel ist also

$$\cot x = \cot A + \cot B + \cot C\,,$$

und hierdurch ist zugleich der gesuchte Winkel x völlig bestimmt. Nach dem Artikel Trigonometrie (20.) ist, wenn Δ die Area des gegebenen Dreiecks ist,

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\cot A + \cot B + \cot C)}\,.$$

Folglich ist in den drei Seiten des Dreiecks ausgedrückt, da bekanntlich Δ sich in den drei Seiten ausdrücken läßt:

$$\cot x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}\,.$$

Hieraus ergiebt sich auch

$$\frac{\cos x^2}{\sin x^2} = \frac{1 - \sin x^2}{\sin x^2} = \frac{1}{\sin x^2} - 1 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{16\Delta^2}\,,$$

$$\sin x^2 = \frac{16\Delta^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 16\Delta^2}\,.$$

Aber nach (10.)

$$16\Delta^2 = 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)\,.$$

Folglich

$$\sin x = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}\,,$$

oder

$$\sin x = \sqrt{\frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}}\,.$$

Weil

$$\cot x - \cot A = \cot B + \cot C$$

ist, so ist

$$\frac{\sin(A - x)}{\sin A \sin x} = \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C}\,,$$

$$\frac{\sin(A - x)}{\sin x} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a^2}{bc}\,;$$

also

$$\sin(A-x) = \frac{a^2}{bc}\sin x,\ \sin(B-x) = \frac{b^2}{ac}\sin x,\ \sin(C-x) = \frac{c^2}{ab}\sin x\ .$$

Weil nun

$$Ba : Ca = \Delta BAa : \Delta CAa = c\sin x : b\sin(A-x)$$

ist, so ist, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$Ba : Ca = c^2 : b^2,\ a : Ca = b^2 + c^2 : b^2\ ;$$
$$Cb : Ab = a^2 : c^2,\ b : Ab = a^2 + c^2 : c^2\ ;$$
$$Ac : Bc = b^2 : a^2,\ c : Bc = a^2 + b^2 : a^2\ ;$$

folglich

$$Ca = \frac{ab^2}{b^2+c^2},\ Ab = \frac{bc^2}{a^2+c^2},\ Bc = \frac{ca^2}{a^2+b^2}\ ;$$

und auf ähnliche Art:

$$Ba = \frac{ac^2}{b^2+c^2},\ Cb = \frac{ba^2}{a^2+c^2},\ Ac = \frac{cb^2}{a^2+b^2}\ .$$

Folglich

$$Ab . Bc . Ca = Ac . Ba . Cb = \frac{a^3 b^3 c^3}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\ .$$

Auch ist

$$Ba : Aa = \sin x : \sin B\ .$$

Also, wenn man für $\sin x$ seinen obigen Ausdruck und $\sin B = \frac{2\Delta}{ac}$ setzt:

$$Aa = \frac{Ba}{ac}\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} = \frac{c}{b^2+c^2}\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}\ .$$

Die Ausdrücke von **Bb** und **Cc** ergeben sich hieraus von selbst. Auch erhellet leicht, daß die Dreiecke **BaA**, **BaO** einander ähnlich sind. Daher ist

$$Oa : Ba = Ba : Aa,\ Oa = \frac{Ba^2}{Aa}\ ;$$

d. i.

$$Oa = \frac{a^2 c^3}{(b^2+c^2)\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}\ .$$

Aus der Aehnlichkeit derselben Dreiecke folgt

$$BO : Ba = AB : Aa,\ BO = c\frac{Ba}{Aa}\ ,$$

d. i. nach dem Obigen

$$BO = \frac{ac^2}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}\ .$$

Es ist also

$$c . AO = \frac{b^2 c^2}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}\ ,$$

$$a . BO = \frac{a^2 c^2}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}\ ,$$

$$b . CO = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}\ .$$

Folglich

$$c.AO + a.BO + b.CO = \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} .$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\frac{Oa}{Aa} = \frac{a^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} ,$$
$$\frac{Ob}{Bb} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} ,$$
$$\frac{Oc}{Cc} = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} ;$$

folglich

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1 .$$

Da

$$\frac{Aa}{Aa} + \frac{Bb}{Bb} + \frac{Cc}{Cc} = 3$$

ist, so ist

$$\frac{AO}{Aa} + \frac{BO}{Bb} + \frac{CO}{Cc} = 2$$

Auch ist nach dem Obigen

$$\frac{Oa}{Aa} = \left(\frac{Ba}{Aa}\right)^2 = \frac{\sin x^2}{\sin B^2} ,$$
$$\frac{Ob}{Bb} = \left(\frac{Cb}{Bb}\right)^2 = \frac{\sin x^2}{\sin C^2} ,$$
$$\frac{Oc}{Cc} = \left(\frac{Ac}{Cc}\right)^2 = \frac{\sin x^2}{\sin A^2} .$$

Folglich

$$\frac{\sin x^2}{\sin A^2} + \frac{\sin x^2}{\sin B^2} + \frac{\sin x^2}{\sin C^2} = 1 ,$$
$$\operatorname{cosec} A^2 + \operatorname{cosec} B^2 + \operatorname{cosec} C^2 = \operatorname{cosec} x^2 ,$$
$$\operatorname{cosec} x = \sqrt{\operatorname{cosec} A^2 + \operatorname{cosec} B^2 + \operatorname{cosec} C^2} ,$$

mittelst welcher Formel sich also x auch aus den drei Winkeln des Dreiecks finden läßt.

7) Man kann endlich auch noch annehmen, daß die Winkel **CAa**, **ABb**, **BCc** einander gleich seyn sollen. Dieser Fall gestattet eine ganz ähnliche Behandlung, wie der vorhergehende. Setzen wir einen der gleichen Winkel $= z$, so findet man ganz eben so, wie vorher,

$$\cot z = \cot A + \cot B + \cot C ,$$

so wie auch

$$\sin(A - z) = \frac{a^2}{bc} \sin z .$$

Nun ist

$$Ba : Ca = \triangle BAa : \triangle CAa = c \sin(A - z) : b \sin z ,$$

d. i., zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$Ba:Ca = a^2:b^2,\quad Ba:Ba+Ca = a^2:a^2+b^2;$$
$$Cb:Ab = b^2:c^2,\quad Cb:Cb+Ab = b^2:b^2+c^2;$$
$$Ac:Bc = c^2:a^2,\quad Ac:Ac+Bc = c^2:a^2+c^2;$$

also

$$Ba = \frac{a^3}{a^2+b^2},\quad Cb = \frac{b^3}{b^2+c^2},\quad Ac = \frac{c^3}{a^2+c^2};$$
$$Ca = \frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad Ab = \frac{bc^2}{b^2+c^2},\quad Bc = \frac{ca^2}{a^2+c^2}.$$

Sonst bietet dieser Fall keine weitere besondere Eigenthümlichkeit dar.

16. Wir werden nachher wieder auf die Scheitellinien des Dreiecks zurückkommen, und wollen jetzt nur erst ein Paar specielle Sätze und Aufgaben, welche ebenfalls mit der Theorie dieser Linien in Verbindung stehen, hier einschalten. Wenn durch die Spitzen des Dreiecks **ABC** (Fig. 30.) drei beliebige Linien **Aa**, **Bb**, **Cc**, und durch einen beliebigen Punkt **O** mit denselben die Parallelen $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ gezogen werden, so ist immer

$$\frac{O\alpha}{Aa} + \frac{O\beta}{Bb} + \frac{O\gamma}{Cc} = 1.$$

Man fälle von **A**, **B**, **C** und **O** auf die Seiten des Dreiecks die Perpendikel **AA'**, **BB'**, **CC'**, **OA''**, **OB''**, **OC''**, so ist, wenn Δ die Area des Dreiecks bezeichnet, offenbar

$$BC.OA'' + AC.OB'' + AB.OC'' = 2\Delta.$$

Aber

$$BC = \frac{2\Delta}{AA'},\quad AC = \frac{2\Delta}{BB'},\quad AB = \frac{2\Delta}{CC'};$$

folglich

$$\frac{OA''}{AA'} + \frac{OB''}{BB'} + \frac{OC''}{CC'} = 1.$$

Weil aber offenbar $\Delta O\alpha A'' \backsim \Delta AaA'$, $\Delta O\beta B'' \backsim \Delta BbB'$, $\Delta O\gamma C'' \backsim \Delta CcC'$ ist; so ist

$$\frac{OA''}{AA'} = \frac{O\alpha}{Aa},\quad \frac{OB''}{BB'} = \frac{O\beta}{Bb},\quad \frac{OC''}{CC'} = \frac{O\gamma}{Cc};$$

folglich

$$\frac{O\alpha}{Aa} + \frac{O\beta}{Bb} + \frac{O\gamma}{Cc} = 1.$$

Ist **ABC** ein gleichseitiges Dreieck, so ist **AA' = BB' = CC'**, folglich

$$OA'' + OB'' + OC'' = AA',$$

d. i. die Summe der drei von irgend einem Punkte in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks auf dessen Seiten gefällten Perpendikel ist immer der Höhe des Dreiecks gleich.

Wie man sich, wenn der Punkt **O** außerhalb des Dreiecks fällt, zu verhalten hat, wird leicht erhellen.

17. In der Ebene des Dreiecks ABC (Fig. 31.) den Punkt O so zu bestimmen, daß die Summe OA + OB + OC ein Minimum wird.

Man nehme B als Anfang, BC als Axe der Abscissen an, und bezeichne die Coordinaten des Punktes O durch x, y; die Coordinaten des Punktes A seyen f, h; so ist, wenn wir OA + OB + OC = s setzen:

$$s = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+y^2} + \sqrt{(f-x)^2+(h-y)^2}.$$

Entwickelt man nun, da s eine Function zweier unabhängigen veränderlichen Größen ist, die partiellen Differentialquotienten, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} - \frac{f-x}{\sqrt{(f-x)^2+(h-y)^2}},$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} - \frac{h-y}{\sqrt{(f-x)^2+(h-y)^2}}.$$

Soll nun ein Minimum Statt finden, so muß bekanntlich

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = 0$$

seyn. Dies giebt, wenn man die obigen algebraischen Ausdrücke geometrisch darstellt:

$$\frac{BO'}{OB} - \frac{CO'}{OC} - \frac{OO''}{OA} = 0, \quad \frac{OO'}{OB} + \frac{OO'}{OC} - \frac{AO''}{OA} = 0,$$

oder

$$\sin BOO' - \sin COO' - \sin OAO'' = 0,$$
$$\cos BOO' + \cos COO' - \cos OAO'' = 0;$$

oder

$$\sin BOO' - \sin COO' - \cos AOO'' = 0,$$
$$\cos BOO' + \cos COO' - \sin AOO'' = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen den Winkel AOO'', so erhält man

$$\cos(AOO'' + BOO') + \cos(AOO'' - COO') = 0.$$

Aber

$$AOO'' + BOO' = 270^\circ - AOB, \quad COO' = 90^\circ - COO''.$$

Also

$$\cos(270^\circ - AOB) + \cos(AOO'' + COO'' - 90^\circ) = 0,$$
$$\cos(270^\circ - AOB) + \cos(AOC - 90^\circ) = 0,$$
$$-\sin AOB + \sin AOC = 0,$$
$$\sin AOB = \sin AOC, \quad AOB = AOC.$$

Eliminirt man aus den beiden obigen Gleichungen COO', so wird

$$\sin(BOO' + COO') - \cos(AOO'' - COO') = 0,$$
$$\sin BOC - \cos(AOC - 90^\circ) = 0,$$
$$\sin BOC - \sin AOC = 0,$$
$$\sin BOC = \sin AOC, \quad BOC = AOC.$$

Also

$$AOB = AOC = BOC \,.$$

Der Punkt O muß folglich eine solche Lage haben, daß die drei Winkel AOB, AOC, BOC einander gleich sind, und demnach jeder $= 120^\circ$ ist.

Soll sich der Punkt O auf die angegebene Weise bestimmen lassen, so darf, wie leicht erhellet, kein Winkel des gegebenen Dreiecks $> 120^\circ$ seyn, indem z. B. für den Winkel A

$$BOC = BAO + CAO + ABO + ACO \,,$$

d. i.

$$A + ABO + ACO = 120^\circ$$

ist.

Durch Construction findet man den Punkt O sehr leicht, wenn man nach einer bekannten Elementar-Aufgabe über zwei beliebigen Seiten des gegebenen Dreiecks als Sehnen zwei Kreissegmente beschreibt, deren jedes einen Winkel von 120° faßt. Der Durchschnittspunkt der Bogen dieser Segmente, wenn es einen solchen giebt, ist der gesuchte Punkt.

Die Summe s findet man auf folgende Art aus den Seiten des gegebenen Dreiecks. Da nämlich $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\,\mathrm{chord}\, 60^\circ = -\frac{1}{2}$ ist; so ist

$$OA^2 + OB^2 + OA.OB = AB^2 = c^2 \ (1)$$
$$OC^2 + OA^2 + OC.OA = AC^2 = b^2 \ (2)$$
$$OB^2 + OC^2 + OB.OC = BC^2 = a^2 \ (3) \,.$$

Ferner ist

$$OA.OB.\sin AOB + OC.OA.\sin COA + OB.OC.\sin BOC$$
$$= 2\Delta ABC = 2\Delta \,,$$

d. i., weil $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - (\frac{1}{2}\,\mathrm{chord}\, 60^\circ)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist:

$$OA.OB + OC.OA + OB.OC = \frac{4\Delta}{\sqrt{3}} = \tfrac{4}{3}\Delta\sqrt{3} \,,$$

$$3\{OA.OB + OC.OA + OB.OC\} = 4\Delta\sqrt{3} \,.$$

Addirt man dies zu der Summe der Gleichungen (1), (2), (3), und dividirt durch 2, so erhält man auf der Stelle

$$s = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\Delta\sqrt{3}\}} \,.$$

Da man nun Δ durch die Seiten ausdrücken kann, so ist auch s durch a, b, c ausgedrückt. Die Linien OA, OB, OC selbst werden auf folgende Art erhalten. Subtrahirt man (3) von (2), so wird

$$OA^2 - OB^2 + OC(OA - OB) = b^2 - a^2 \,,$$
$$(OA - OB)(OA + OB + OC) = b^2 - a^2 \,,$$
$$OA - OB = \frac{b^2 - a^2}{s} \,,$$

und eben so

$$OA - OC = \frac{c^2 - a^2}{s};$$

auch ist

$$OA - OA = 0;$$

also durch Addition

$$3OA - s = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{s}.$$

Folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$OA = \frac{s^2 + b^2 + c^2 - 2a^2}{3s} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\Delta\sqrt{3}}},$$

$$OB = \frac{s^2 + a^2 + c^2 - 2b^2}{3s} = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\Delta\sqrt{3}}},$$

$$OC = \frac{s^2 + a^2 + b^2 - 2c^2}{3s} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\Delta\sqrt{3}}}.$$

18. Wir kehren nun noch einmal zu den in (11.) und (12.) bewiesenen allgemeinen Sätzen zurück, indem wir diese Sätze aus einigen, so viel wir wissen, noch nicht bekannten sehr allgemeinen Relationen ableiten wollen, die mit vieler Leichtigkeit auch noch zu andern Resultaten führen. Sey in Fig. 32. $AA'A''$ das gegebene Dreieck, und AB, $A'B'$, $A''B''$ seyen drei beliebige in einem Punkte sich schneidende Linien. Man setze $A'A'' = a$, $A''A = a'$, $AA' = a''$; $AB = \alpha$, $A'B' = \alpha'$, $A''B'' = \alpha''$; $A'B = \varrho$, $A''B' = \varrho'$, $AB'' = \varrho''$, und bezeichne die einzelnen Winkel so, wie in der Figur geschehen ist.

In den Dreiecken AOA' und AOB'' ist, wie sogleich erhellen wird:

$$AO : a'' = \sin\Theta'_1 : \sin(\Theta + \Theta'_1),$$

$$AO : \varrho'' = \sin\varphi'' : \sin(\varphi'' - \Theta);$$

folglich durch Division

$$1 : \frac{a''}{\varrho''} = \frac{\sin\Theta'_1}{\sin\varphi''} : \frac{\sin(\Theta + \Theta'_1)}{\sin(\varphi'' - \Theta)},$$

und hieraus, zugleich mit gehöriger Verwechslung der Buchstaben:

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{\sin\varphi \sin(\Theta' + \Theta''_1)}{\sin\Theta''_1 \sin(\varphi - \Theta')},$$

$$\frac{a'}{\varrho'} = \frac{\sin\varphi' \sin(\Theta'' + \Theta_1)}{\sin\Theta_1 \sin(\varphi' - \Theta'')},$$

$$\frac{a''}{\varrho''} = \frac{\sin\varphi'' \sin(\Theta + \Theta'_1)}{\sin\Theta'_1 \sin(\varphi'' - \Theta)}.$$

Aber

$$\frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\sin\Theta}{\sin A'},\quad \frac{\varrho'}{\alpha'} = \frac{\sin\Theta'}{\sin A''},\quad \frac{\varrho''}{\alpha''} = \frac{\sin\Theta''}{\sin A};$$

folglich durch Multiplication

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{\sin\varphi \sin\Theta \sin(\Theta' + \Theta''_1)}{\sin A' \sin\Theta''_1 \sin(\varphi - \Theta')},$$

$$\frac{a'}{\alpha'} = \frac{\sin\varphi' \sin\Theta' \sin(\Theta'' + \Theta_1)}{\sin A'' \sin\Theta_1 \sin(\varphi' - \Theta'')},$$
$$\frac{a''}{\alpha''} = \frac{\sin\varphi'' \sin\Theta'' \sin(\Theta + \Theta'_1)}{\sin A \sin\Theta'_1 \sin(\varphi'' - \Theta)};$$

oder

$$\frac{a \sin A'}{\alpha \sin\varphi} = \frac{\sin\Theta \sin(\Theta' + \Theta''_1)}{\sin\Theta''_1 \sin(\varphi - \Theta')},$$
$$\frac{a' \sin A''}{\alpha' \sin\varphi'} = \frac{\sin\Theta' \sin(\Theta'' + \Theta_1)}{\sin\Theta_1 \sin(\varphi' - \Theta'')},$$
$$\frac{a'' \sin A}{\alpha'' \sin\varphi''} = \frac{\sin\Theta'' \sin(\Theta + \Theta'_1)}{\sin\Theta'_1 \sin(\varphi'' - \Theta)}.$$

Aber

$$\alpha \sin\varphi = a' \sin A'', \quad a \sin A' = a' \sin A;$$
$$\alpha' \sin\varphi' = a'' \sin A, \quad a' \sin A'' = a'' \sin A';$$
$$\alpha'' \sin\varphi'' = a \sin A', \quad a'' \sin A = a \sin A'';$$
$$\frac{\alpha \sin\varphi}{a \sin A'} = \frac{\sin A''}{\sin A}, \quad \frac{\alpha' \sin\varphi'}{a' \sin A''} = \frac{\sin A}{\sin A'}, \quad \frac{\alpha'' \sin\varphi''}{a'' \sin A} = \frac{\sin A'}{\sin A''};$$

und daher durch Multiplication aus dem Obigen:

$$1 = \frac{\sin A'' \sin\Theta \sin(\Theta' + \Theta''_1)}{\sin A \sin\Theta''_1 \sin(\varphi - \Theta')} = \frac{\sin A'' \sin\Theta \sin(\Theta' + \Theta''_1)}{\sin A \sin\Theta''_1 \sin(\Theta + \Theta'_1)},$$
$$1 = \frac{\sin A \sin\Theta' \sin(\Theta'' + \Theta_1)}{\sin A' \sin\Theta_1 \sin(\varphi' - \Theta'')} = \frac{\sin A \sin\Theta' \sin(\Theta'' + \Theta_1)}{\sin A' \sin\Theta_1 \sin(\Theta' + \Theta''_1)},$$
$$1 = \frac{\sin A' \sin\Theta'' \sin(\Theta + \Theta'_1)}{\sin A'' \sin\Theta'_1 \sin(\varphi'' - \Theta)} = \frac{\sin A' \sin\Theta'' \sin(\Theta + \Theta'_1)}{\sin A'' \sin\Theta'_1 \sin(\Theta'' + \Theta_1)};$$

oder auch

$$1 = \frac{\sin\Theta \sin A'' \sin A'OA''}{\sin\Theta''_1 \sin A \sin AOA'},$$
$$1 = \frac{\sin\Theta' \sin A \sin AOA''}{\sin\Theta_1 \sin A' \sin A'OA''},$$
$$1 = \frac{\sin\Theta'' \sin A' \sin AOA'}{\sin\Theta'_1 \sin A'' \sin AOA''}.$$

Es ist aber auch

$$\Theta = \varphi - A', \quad \Theta' = \varphi' - A'', \quad \Theta'' = \varphi'' - A;$$
$$\Theta_1 = A - \Theta = A + A' - \varphi = 180^0 - (A'' + \varphi),$$
$$\Theta'_1 = A' - \Theta' = A' + A'' - \varphi' = 180^0 - (A + \varphi'),$$
$$\Theta''_1 = A'' - \Theta'' = A'' + A - \varphi'' = 180^0 - (A' + \varphi'');$$
$$\varphi - \Theta' = \varphi - \varphi' + A'' = A'' + \varphi - \varphi',$$
$$\varphi' - \Theta'' = \varphi' - \varphi'' + A = A + \varphi' - \varphi'',$$
$$\varphi'' - \Theta = \varphi'' - \varphi + A' = A' + \varphi'' - \varphi;$$
$$\Theta' + \Theta''_1 = \varphi' + A - \varphi'' = A + \varphi' - \varphi'',$$
$$\Theta'' + \Theta_1 = \varphi'' + A' - \varphi = A' + \varphi'' - \varphi,$$
$$\Theta + \Theta'_1 = \varphi + A'' - \varphi' = A'' + \varphi - \varphi'.$$

Folglich

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{\sin\varphi \sin(A + \varphi' - \varphi'')}{\sin(A' + \varphi'') \sin(A'' + \varphi - \varphi')},$$

$$\frac{a'}{\varrho'} = \frac{\sin\varphi' \sin(A'+\varphi''-\varphi)}{\sin(A''+\varphi)\sin(A+\varphi'-\varphi'')},$$
$$\frac{a''}{\varrho''} = \frac{\sin\varphi'' \sin(A''+\varphi-\varphi')}{\sin(A+\varphi')\sin(A'+\varphi''-\varphi)};$$

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{\sin\varphi \sin(\varphi-A')\sin(A+\varphi'-\varphi'')}{\sin A' \sin(A'+\varphi'')\sin(A''+\varphi-\varphi')},$$
$$\frac{a'}{\alpha'} = \frac{\sin\varphi' \sin(\varphi'-A'')\sin(A'+\varphi''-\varphi)}{\sin A'' \sin(A''+\varphi)\sin(A+\varphi'-\varphi'')},$$
$$\frac{a''}{\alpha''} = \frac{\sin\varphi'' \sin(\varphi''-A)\sin(A''+\varphi-\varphi')}{\sin A \sin(A+\varphi')\sin(A'+\varphi''-\varphi)};$$

$$1 = \frac{\sin A \sin(\varphi''+A')\sin(\varphi-\varphi'+A'')}{\sin A'' \sin(\varphi-A')\sin(\varphi'-\varphi''+A)},$$
$$1 = \frac{\sin A' \sin(\varphi+A'')\sin(\varphi'-\varphi''+A)}{\sin A \sin(\varphi'-A'')\sin(\varphi''-\varphi+A')},$$
$$1 = \frac{\sin A'' \sin(\varphi'+A)\sin(\varphi''-\varphi+A')}{\sin A' \sin(\varphi''-A)\sin(\varphi-\varphi'+A'')};$$

und demnach durch Multiplication:

$$\frac{aa'a''}{\varrho\varrho'\varrho''} = \frac{\sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''}{\sin(A+\varphi')\sin(A'+\varphi'')\sin(A''+\varphi)},$$
$$\frac{aa'a''}{\alpha\alpha'\alpha''} = \frac{\sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''}{\sin A \sin A' \sin A''} \cdot \frac{\sin(\varphi-A')\sin(\varphi'-A'')\sin(\varphi''-A)}{\sin(A+\varphi')\sin(A'+\varphi'')\sin(A''+\varphi)},$$
$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\varrho\varrho'\varrho''} = \frac{\sin A \sin A' \sin A''}{\sin(\varphi-A')\sin(\varphi'-A'')\sin(\varphi''-A)},$$
$$1 = \frac{\sin(\varphi+A'')\sin(\varphi'+A)\sin(\varphi''+A')}{\sin(\varphi-A')\sin(\varphi'-A'')\sin(\varphi''-A)}.$$

Aber

$$\varphi + A'' = 180^\circ - \Theta_1, \quad \varphi - A' = \Theta;$$
$$\varphi' + A = 180^\circ - \Theta'_1, \quad \varphi' - A'' = \Theta',$$
$$\varphi'' + A' = 180^\circ - \Theta''_1, \quad \varphi'' - A = \Theta''.$$

Folglich

$$1 = \frac{\sin\Theta_1 \sin\Theta'_1 \sin\Theta''_1}{\sin\Theta \sin\Theta' \sin\Theta''},$$
$$\sin\Theta \sin\Theta' \sin\Theta'' = \sin\Theta_1 \sin\Theta'_1 \sin\Theta''_1,$$
$$\sin\Theta \sin\Theta' \sin\Theta'' = \sin(A-\Theta)\sin(A'-\Theta')\sin(A''-\Theta''),$$

welches der in (12.) bewiesene Satz ist.

Ferner ist

$$a - \varrho : a' = \sin\Theta_1 : \sin\varphi,$$
$$a' - \varrho' : a'' = \sin\Theta'_1 : \sin\varphi',$$
$$a'' - \varrho'' : a = \sin\Theta''_1 : \sin\varphi'';$$

folglich

$$\frac{(a-\varrho)(a'-\varrho')(a''-\varrho'')}{aa'a''} = \frac{\sin\Theta_1 \sin\Theta'_1 \sin\Theta''_1}{\sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''}$$
$$= \frac{\sin(A+\varphi')\sin(A'+\varphi'')\sin(A''+\varphi)}{\sin\varphi \sin\varphi' \sin\varphi''};$$

also nach dem Obigen durch Multiplication:

$$\frac{(a-\varrho)(a'-\varrho')(a''-\varrho'')}{\varrho\varrho'\varrho''}=1\,,$$

$$(a-\varrho)(a'-\varrho')(a''-\varrho'')=\varrho\varrho'\varrho''\,,\;\left(\frac{a}{\varrho}-1\right)\left(\frac{a'}{\varrho'}-1\right)\left(\frac{a''}{\varrho''}-1\right)=1\,,$$

welches der in (11.) bewiesene Satz ist.

Sollten die Linien AB, A'B', A''B'' z. B. so gezogen werden, daß sie sich in einem Punkte schneiden, und die Winkel Θ, Θ', Θ'' einander gleich sind (vergl. 15. 6.); so erhält man aus der oben bewiesenen Relation

$$1=\frac{\sin A\sin\Theta'\sin(\Theta''+\Theta_1)}{\sin A'\sin\Theta_1\sin(\varphi_1'-\Theta'')}\,,$$

weil $\Theta=\Theta'=\Theta''$ ist, sogleich:

$$1=\frac{\sin A\sin\Theta\sin(\Theta+A-\Theta)}{\sin A'\sin(A-\Theta)\sin(A''+\Theta-\Theta)}\,,$$

d. i.

$$1=\frac{\sin A'\sin A''}{\sin A}\cdot\frac{\sin(A-\Theta)}{\sin A\sin\Theta}=\frac{\sin A'\sin A''}{\sin(A'+A'')}(\cot\Theta-\cot A)\,,$$

$$\cot\Theta-\cot A=\frac{\sin A'\cos A''+\cos A'\sin A''}{\sin A'\sin A''}$$

$$=\cot A''+\cot A'\,,$$

$$\cot\Theta=\cot A+\cot A'+\cot A''\,,$$

wie a. a. O. Man sieht hieraus, wie leicht dieser merkwürdige Ausdruck aus unsern obigen allgemeinen Relationen folgt. Aus den beiden andern der obigen entsprechenden Relationen ergiebt sich ganz derselbe Werth von $\cot\Theta$. Bestimmt man also $\cot\Theta$ oder Θ auf diese Weise, so sind die drei in Rede stehenden Relationen, also, wie aus dem Obigen folgt, auch die Gleichung

$$\sin\Theta\sin\Theta'\sin\Theta''=\sin\Theta_1\sin\Theta'_1\sin\Theta''_1$$

erfüllt, und die Linien AB, A'B', A''B'' schneiden sich also in einem Punkte (14.). Sollen die Linien AB, A'B', A''B'' so gezogen werden, daß sie sich in einem Punkte schneiden, und die Winkel AOA' = A'OA'' = AOA'' = 120° sind, so hat man nach dem Obigen die Gleichungen:

$$1=\frac{\sin\Theta\sin A''}{\sin\Theta''_1\sin A}=\frac{\sin\Theta\sin A''}{\sin(A''-\Theta'')\sin A}\,,$$

$$1=\frac{\sin\Theta'\sin A}{\sin\Theta_1\sin A'}=\frac{\sin\Theta'\sin A}{\sin(A-\Theta)\sin A'}\,,$$

$$1=\frac{\sin\Theta''\sin A'}{\sin\Theta'_1\sin A''}=\frac{\sin\Theta''\sin A'}{\sin(A'-\Theta')\sin A''}\,;$$

$$\frac{\sin(A''-\Theta'')}{\sin A''}=\cos\Theta''-\cot A''\sin\Theta''=\frac{\sin\Theta}{\sin A}\,,$$

$$\frac{\sin(A-\Theta)}{\sin A}=\cos\Theta-\cot A\sin\Theta=\frac{\sin\Theta'}{\sin A'}\,,$$

$$\frac{\sin(A'-\Theta')}{\sin A'} = \cos\Theta' - \cot A' \sin\Theta' = \frac{\sin\Theta''}{\sin A''}.$$

Es ist aber auch

$$\Theta + A' - \Theta' = 60^\circ,$$
$$\Theta' + A'' - \Theta'' = 60^\circ,$$
$$\Theta'' + A - \Theta = 60^\circ;$$

also z. B. $\Theta' = \Theta + A' - 60^\circ$, und folglich

$$\cos\Theta - \cot A \sin\Theta = \frac{\sin(\Theta + A' - 60^\circ)}{\sin A'},$$

$$\sin A' \cos\Theta - \sin A' \cot A \sin\Theta$$
$$= \sin\Theta \cos(A'-60^\circ) + \cos\Theta \sin(A'-60^\circ),$$

$$\sin A' - \sin A' \cot A \operatorname{tang}\Theta = \cos(A'-60^\circ) \operatorname{tang}\Theta + \sin(A'-60^\circ),$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\sin A' - \sin(A'-60^\circ)}{\cot A \sin A' + \cos(A'-60^\circ)}$$
$$= \frac{\sin A \{\sin A' - \sin(A'-60^\circ)\}}{\cos A \sin A' + \sin A \cos(A'-60^\circ)}$$
$$= \frac{\sin A \{\sin A' + \cos(A'+30^\circ)\}}{\cos A \sin A' + \sin A \sin(A'+30^\circ)}.$$

Auch ist

$$1 + \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sin A'(\cos A + \sin A) + \sin A\{\cos(A'-60^\circ) - \sin(A'-60^\circ)\}}{\cos A \sin A' + \sin A \cos(A'-60^\circ)},$$

$$1 - \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sin A'(\cos A - \sin A) + \sin A\{\cos(A'-60^\circ) + \sin(A'-60^\circ)\}}{\cos A \sin A' + \sin A \cos(A'-60^\circ)};$$

oder

$$1 + \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sin A' \cos(45^\circ - A).\sqrt{2} + \sin A \cos(A'-15^\circ).\sqrt{2}}{\cos A \sin A' + \sin A \cos(A'-60^\circ)},$$

$$1 - \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sin A' \sin(45^\circ - A).\sqrt{2} + \sin A \sin(A'-15^\circ).\sqrt{2}}{\cos A \sin A' + \sin A \cos(A'-60^\circ)}.$$

Aber

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \Theta) = \frac{1 - \operatorname{tang}\Theta}{1 + \operatorname{tang}\Theta}.$$

Also

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \Theta) = \frac{\sin A' \sin(45^\circ - A) + \sin A \sin(A'-15^\circ)}{\sin A' \cos(45^\circ - A) + \sin A \cos(A'-15^\circ)}.$$

Berechnet man zwei Hülfswinkel ψ und ψ' aus den Formeln:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin A \sin(A'-15^\circ)}{\sin A' \sin(45^\circ - A)}, \quad \operatorname{tang}\psi' = \frac{\sin A \cos(A'-15^\circ)}{\sin A' \cos(45^\circ - A)};$$

so ist

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \Theta) = \operatorname{tang}(45^\circ - A)\frac{1 + \operatorname{tang}\psi}{1 + \operatorname{tang}\psi'}$$
$$= \operatorname{tang}(45^\circ - A)\frac{\cos\psi'(\cos\psi + \sin\psi)}{\cos\psi(\cos\psi' + \sin\psi')}$$
$$= \operatorname{tang}(45^\circ - A)\frac{\cos\psi' \cos(45^\circ - \psi)}{\cos\psi \cos(45^\circ - \psi')}.$$

Es ist auch

$$\frac{\tang\psi}{\tang\psi'} = \tang(A'-15^\circ)\cot(45^\circ-A),$$

$$\tang\psi = \tang\psi'\cot(45^\circ-A)\tang(A'-15^\circ),$$

$$\tang\psi' = \tang\psi\tang(45^\circ-A)\cot(A'-15^\circ).$$

Hat man Θ, so ergeben sich Θ' und Θ'' unmittelbar aus den Formeln

$$\Theta' = \Theta + A' - 60^\circ,\ \Theta'' = \Theta - A + 60^\circ.$$

Man hat hierbei überhaupt (17.) zu vergleichen.

19. Sehr viele merkwürdige Eigenschaften bieten auch die Kreise dar, von denen die Seiten eines Dreiecks berührt werden, deren es, wie man durch eine einfache geometrische Betrachtung sich leicht überzeugt, jederzeit vier giebt, einen innern und drei äußere. In Fig. 33. ist ABC das gegebene Dreieck, O der Mittelpunkt des innern berührenden Kreises. Die Mittelpunkte der drei äußern Kreise sind O′, O″, O‴, und es erhellet leicht, daß O′, O″, O‴, die Spitzen eines Dreiecks O′O″O‴ sind, dessen Seiten die Außenwinkel des gegebenen Dreiecks halbiren. Die berührenden Kreise selbst sollen im Folgenden der Kürze wegen bloß durch ihre Mittelpunkte bezeichnet werden. Die Halbmesser der Kreise, O, O′, O″, O‴ seyen respective ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ'''. Die Area des Dreiecks sey immer $=\Delta$. Es ist immer

$$\varrho(a+b+c) = 2\Delta,\ \varrho = \frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Also

$$\varrho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},$$

oder

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises sey r, so ist offenbar, da der Centriwinkel jederzeit doppelt so groß ist wie der Peripheriewinkel auf demselben Bogen,

$$r = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}.$$

Aber bekanntlich

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Also

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Folglich

$$2r\varrho = \frac{abc}{2s} = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Auch ist

$$r(\sin A + \sin B + \sin C) = s.$$

Aber (Trigonometrie. 18.)

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Also

$$4r\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = s,$$

wo immer s den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet. Also auch

$$r = \tfrac{1}{4}s\sec\tfrac{1}{2}A\sec\tfrac{1}{2}B\sec\tfrac{1}{2}C.$$

Nach dem Obigen ist

$$\varDelta = \varrho s,\ \varrho = \frac{abc}{4rs}.$$

Also

$$\varDelta = \frac{abc}{4r}.$$

Sind h, h′, h″ die auf die Seiten a, b, c gefällten Perpendikel, so ist

$$hh'h'' = \frac{8\varDelta^3}{abc}.$$

Folglich

$$hh'h''\varDelta = \frac{2\varDelta^3}{r},$$

$$hh'h'' = \frac{2\varDelta^2}{r},\ \varDelta = \sqrt{\tfrac{1}{2}rhh'h''}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$abc = 8r^3\sin A\sin B\sin C.$$

Also

$$\varDelta = 2r^2\sin A\sin B\sin C.$$

Folglich auch

$$\varrho s = 4r\varrho\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = 2r^2\sin A\sin B\sin C,$$

$$\frac{2\varrho}{r} = \frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C} = 8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\frac{\varrho}{r} = 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C;$$

oder nach Trigonometrie (18.)

$$\frac{\varrho}{r} = \cos A + \cos B + \cos C - 1,\ \frac{\varrho + r}{r} = \cos A + \cos B + \cos C.$$

Also auch nach dem Obigen

$$\varrho + r = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C}s.$$

Auch ist nach dem Obigen

$$r\varrho(\sin A + \sin B + \sin C) = \varrho s = \varDelta;$$

also

$$\frac{\varDelta}{r\varrho} = \sin A + \sin B + \sin C,$$

oder nach Trigonometrie (18.)

$$\frac{\varDelta}{4r\varrho} = \cos\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}B.\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Nach dem Obigen ist

$$\Delta = 2r^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{s^2 \sin A \sin B \sin C}{8 \cos \frac{1}{2}A^2 \cos \frac{1}{2}B^2 \cos \frac{1}{2}C^2},$$

d. i.

$$\Delta = s^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C.$$

Auch ist

$$\Delta = \varrho s = 4r\varrho \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C = \frac{abc \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{s};$$

also

$$\Delta^2 = abcs \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C,$$

d. i.

$$\Delta = \sqrt{abcs \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C}.$$

Auch ist

$$s^3 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C = abc \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{abc \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}A \operatorname{tang} \frac{1}{2}B \operatorname{tang} \frac{1}{2}C}},$$

$$abc = \frac{s^3 \operatorname{tang} \frac{1}{2}A \operatorname{tang} \frac{1}{2}B \operatorname{tang} \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}.$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Summe der Seiten aus ihrem Producte finden, und umgekehrt, wenn nur noch die Winkel des Dreiecks als bekannt angenommen werden. Sind also a, b, c; a', b', c' die Seiten zweier ähnlichen Dreiecke und $abc = p$, $a + b + c = 2s$, $a'b'c' = p'$, $a' + b' + c' = 2s'$; so ist immer $\frac{s^3}{p} = \frac{s'^3}{p'}$, $p's^3 = ps'^3$, oder auch, wenn wir die ganzen Seitensummen durch **S** und **S'** bezeichnen, $p'S^3 = pS'^3$, $S\sqrt[3]{p'} = S'\sqrt[3]{p}$.

Wir wollen nun noch die Entfernung des Mittelpunkts des eingeschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises zu bestimmen suchen. Sey daher in Fig. 34. **O** der Mittelpunkt des eingeschriebenen, O' der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises, also $AO' = A'O' = r$, wobei wir **A'O'** auf **BC** senkrecht annehmen. Ferner sey auch $OD = \varrho$ auf **AC** senkrecht. A'O' halbirt den Bogen **BC**. **AO** halbirt den Winkel **BAC**, verlängert also auch den Bogen **BC**. Daher ist **AOA'** eine gerade Linie, **AO'A'** ein gleichschenkliges Dreieck. Zieht man **A'C**, so ist $BCA' = BAA' = \frac{1}{2}A$, $OCA' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$. Aber offenbar auch $COA' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$. Also $A'C = A'O$. Im gleichschenkligen Dreieck **AO'A'** ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze, wenn OO' auf AA' senkrecht ist,

$$\begin{aligned} A'O^2 &= OO'^2 + A'O'^2 = OO^2 + A'O'^2 - Oo'^2 \\ &= OO^2 + (A'O' + OO')(A'O' - OO') \\ &= OO^2 + A'O.AO = OO^2 + A'C.AO. \end{aligned}$$

Die Dreiecke **AOD**, **A'Ca** sind offenbar einander ähnlich; also

$$A'a : A'C = DO : AO;$$

aber, wie ebenfalls leicht erhellet:

$$A'a : A'C = A'C : A'B';$$

folglich

$$A'C : A'B' = DO : AO,$$
$$A'C . AO = A'B' . DO = 2r\varrho .$$

Also nach dem Obigen

$$r^2 = OO^2 + 2r\varrho,\ OO^2 = r^2 - 2r\varrho,\ OO = \sqrt{r(r-2\varrho)} .$$

Einen analytischen Beweis dieser merkwürdigen Formel s. Trigonometrie (21.).

Wir kehren nun wieder zu den drei Kreisen, welche das Dreieck außerhalb berühren, zurück. Es ist offenbar

$$a = \varrho' \tang \{90^0 - \tfrac{1}{2}(180^0 - B)\} + \varrho' \tang \{90^0 - \tfrac{1}{2}(180^0 - C)\}$$
$$= \varrho'(\tang \tfrac{1}{2}B + \tang \tfrac{1}{2}C) .$$

Folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$\varrho' = \frac{a}{\tang \frac{1}{2}B + \tang \frac{1}{2}C} = \frac{a \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(B+C)} = \frac{a \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A},$$
$$\varrho'' = \frac{b}{\tang \frac{1}{2}C + \tang \frac{1}{2}A} = \frac{b \cos \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}(C+A)} = \frac{b \cos \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}B},$$
$$\varrho''' = \frac{c}{\tang \frac{1}{2}A + \tang \frac{1}{2}B} = \frac{c \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{c \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}C} .$$

Aber nach Trigonometrie (16.)

$$\frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A} = \frac{\sqrt{s(s-b)(s-c)}}{a\sqrt{s-a}} = \frac{\Delta}{a(s-a)} .$$

Folglich

$$\varrho = \frac{\Delta}{s},\ \varrho' = \frac{\Delta}{s-a},\ \varrho'' = \frac{\Delta}{s-b},\ \varrho''' = \frac{\Delta}{s-c};$$
$$\varrho\varrho'\varrho''\varrho''' = \Delta^2,\ \Delta = \sqrt{\varrho\varrho'\varrho''\varrho'''} .$$

Nach dem Obigen ist also auch

$$\varrho\varrho'\varrho''\varrho''' = abc \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C .$$

Auch folgt aus dem Obigen unmittelbar

$$\varrho'\varrho''\varrho''' = abc \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C .$$

Folglich auch

$$\varrho = s \tang \tfrac{1}{2}A \tang \tfrac{1}{2}B \tang \tfrac{1}{2}C .$$

Ferner ist auch nach Trigonometrie (16.)

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= s(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = s(s-a)\tang \tfrac{1}{2}A ;$$

also

$$\varrho' = s \tang \tfrac{1}{2}A,\ \varrho'' = s \tang \tfrac{1}{2}B,\ \varrho''' = s \tang \tfrac{1}{2}C .$$

Folglich

$$\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = s(\tang \tfrac{1}{2}A + \tang \tfrac{1}{2}B + \tang \tfrac{1}{2}C - \tang \tfrac{1}{2}A \tang \tfrac{1}{2}B \tang \tfrac{1}{2}C).$$

Aber, weil $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^0$ ist,

$$\tang \tfrac{1}{2}A + \tang \tfrac{1}{2}B = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B} = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\tfrac{1}{2}C^2 + \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{1 + (\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C)\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{1 + \{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\}\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{1 + \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C + \sec\tfrac{1}{2}A\sec\tfrac{1}{2}B\sec\tfrac{1}{2}C\,.$$

Folglich

$$\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = s\sec\tfrac{1}{2}A\sec\tfrac{1}{2}B\sec\tfrac{1}{2}C\,.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\sec\tfrac{1}{2}A\sec\tfrac{1}{2}B\sec\tfrac{1}{2}C = \frac{4r}{s}\,.$$

Folglich

$$\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho = 4r,\quad r = \frac{\varrho' + \varrho'' + \varrho''' - \varrho}{4}\,.$$

Auch ist

$$\varrho'\varrho''\varrho''' = s^3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\,.$$

Nach dem Obigen aber

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{\Delta}{s^2}\,.$$

Also

$$\varrho'\varrho''\varrho''' = s\Delta,\quad \Delta = \frac{\varrho'\varrho''\varrho'''}{s}\,.$$

Auch ist nach dem Obigen

$$\varrho' - \varrho = \frac{\Delta}{s-a} - \frac{\Delta}{s} = \frac{a\Delta}{s(s-a)} = a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\,.$$

Folglich

$$\varrho' - \varrho = a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A,\quad \varrho'' - \varrho = b\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B,\quad \varrho''' - \varrho = c\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\,;$$

$$(\varrho' - \varrho)(\varrho'' - \varrho)(\varrho''' - \varrho) = abc\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\,,$$

d. i. nach dem Obigen

$$(\varrho' - \varrho)(\varrho'' - \varrho)(\varrho''' - \varrho) = \frac{abc\Delta}{s^2}\,,$$

oder

$$(\varrho' - \varrho)(\varrho'' - \varrho)(\varrho''' - \varrho) = \frac{4r\Delta^2}{s^2}\,,$$

$$\sqrt{(\varrho' - \varrho)(\varrho'' - \varrho)(\varrho''' - \varrho)} = \frac{2\Delta}{s}\sqrt{r}\,.$$

Auch ist $\Delta^2 = \varrho^2 s^2$. Folglich

$$(\varrho' - \varrho)(\varrho'' - \varrho)(\varrho''' - \varrho) = 4r\varrho^2\,,$$

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - 1\right)\left(\frac{\varrho''}{\varrho} - 1\right)\left(\frac{\varrho'''}{\varrho} - 1\right) = \frac{4r}{\varrho}\,.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{4r}{\varrho} = \frac{\varrho' + \varrho'' + \varrho'''}{\varrho} - 1\,.$$

Also ist immer

$$\frac{\varrho'+\varrho''+\varrho'''}{\varrho}-1=\left(\frac{\varrho'}{\varrho}-1\right)\left(\frac{\varrho''}{\varrho}-1\right)\left(\frac{\varrho'''}{\varrho}-1\right).$$

Entwickel man das Product auf der rechten Seite, so erhält man die merkwürdige Gleichung:

$$\varrho'\varrho''\varrho'''=\varrho(\varrho'\varrho''+\varrho'\varrho'''+\varrho''\varrho''').$$

Also ist auch immer

$$\frac{\varrho(\varrho'^2+\varrho''^2+\varrho'''^2)+2\varrho'\varrho''\varrho'''}{\varrho}=(\varrho'+\varrho''+\varrho''')^2,$$

$$\frac{\varrho'\varrho''\varrho'''}{\varrho}=\tfrac{1}{2}\{(\varrho'+\varrho''+\varrho''')^2-(\varrho'^2+\varrho''^2+\varrho'''^2)\}.$$

Mehrere Relationen dieser Art aufzusuchen, würde uns hier zu weit führen.

Der Inhalt des Dreiecks $O'O''O'''$ sey $=\Delta'$, so ist offenbar

$$\Delta'=\Delta+\tfrac{1}{2}(a\varrho'+b\varrho''+c\varrho'''),$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Delta'=\Delta\left\{1+\frac{a}{2(s-a)}+\frac{b}{2(s-b)}+\frac{c}{2(s-c)}\right\}$$

$$=\Delta.\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\Delta.\frac{s(s-a)(s-b)+s(s-a)(s-c)+a(s-b)(s-c)}{2(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei man sich das doppelte erste Glied des Zählers in zwei Theile zerlegt, und diese Theile mit dem vierten und dritten Gliede des Zählers vereinigt denkt. Ferner ergiebt sich leicht

$$\Delta'=\Delta.\frac{\left\{\begin{matrix}s(s-a)(s-b)+s(s-a)(s-c)\\ +sa(s-b)\quad-\quad ac(s-b)\end{matrix}\right\}}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\Delta.\frac{s^2(s-b)+s^3-(a+c)s^2+abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\Delta.\frac{2s^3-(a+b+c)s^2+abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)},$$

d. i., weil $a+b+c=2s$ ist:

$$\Delta'=\frac{abc\Delta}{2(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Aber

$$\frac{\Delta^2}{s}=(s-a)(s-b)(s-c).$$

Also

$$\Delta'=\frac{abcs}{2\Delta}=\frac{abc(a+b+c)}{4\Delta},$$

oder, bloß in den drei Seiten ausgedrückt:

$$\Delta'=\tfrac{1}{2}abc\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{abc}{\Delta}=4r.$$

Folglich

$$\Delta' = 2rs = r(a + b + c),$$

eine sehr einfache Formel für Δ'.

Noch verschiedene andere Bemerkungen über die vier in Rede stehenden Kreise s. m. in Crelle's mathem. Aufsätzen. I. Berlin. 1821. S. 165.

20. Sey jetzt wieder in das Dreieck ABC (Fig. 35.) ein Kreis beschrieben, und O dessen Mittelpunkt. Ferner seyen in die Räume $Ab\alpha c$, $Ca\gamma b$, $Bc\beta a$ drei Kreise beschrieben, welche je zwei Seiten des Dreiecks ABC und den in dasselbe beschriebenen Kreis berühren. $0, 0', 0''$ seyen die Mittelpunkte dieser Kreise, und $\varrho, \varrho', \varrho''$ die Halbmesser derselben. Der Halbmesser des, in das Dreieck beschriebenen Kreises sey jetzt $= r$. Es ist offenbar

$$r = AO.\sin\tfrac{1}{2}A,\ AO = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}A},\ A\alpha = \frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}r.$$

Ferner ist

$$\overline{n\alpha} = A\alpha.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}r,$$

und, wenn man sich n0 gezogen denkt, offenbar

$$\overline{0\alpha} = \varrho = \overline{n\alpha}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(90^0 - \tfrac{1}{2}A) = \overline{n\alpha}.\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{4}A).$$

Aber

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{4}A) = \frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Folglich

$$\varrho = \left(\frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}\right)^2.r = r\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{4}A)^2 = r\left(\frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{1+\sin\frac{1}{2}A}\right).$$

Da man r und $\sin\frac{1}{2}A$ durch die Seiten des gegebenen Dreiecks ausdrücken kann, so würde man auch ϱ leicht durch die Seiten darstellen können. Die analogen Formeln für ϱ' und ϱ'' lassen sich leicht entwickeln. Ferner erhält man leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \frac{r-\varrho}{r+\varrho},\ \cos\tfrac{1}{2}A = \frac{2\sqrt{r\varrho}}{r+\varrho},\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \frac{r-\varrho}{2\sqrt{r\varrho}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{r-\varrho'}{r+\varrho'},\ \cos\tfrac{1}{2}B = \frac{2\sqrt{r\varrho'}}{r+\varrho'},\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{r-\varrho'}{2\sqrt{r\varrho'}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{r-\varrho''}{r+\varrho''},\ \cos\tfrac{1}{2}C = \frac{2\sqrt{r\varrho''}}{r+\varrho''},\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{r-\varrho''}{2\sqrt{r\varrho''}}.$$

Mittelst der in Trigonometrie (18.) bewiesenen Relationen würden sich hieraus mehrerer Relationen zwischen $r, \varrho, \varrho', \varrho''$ und den Winkeln des Dreiecks ableiten lassen. Nach Goniometrie (56.) ist

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = 1,$$

also immer

$$\frac{(r-\varrho)(r-\varrho')}{4r\sqrt{\varrho\varrho'}} + \frac{(r-\varrho)(r-\varrho'')}{4r\sqrt{\varrho\varrho''}} + \frac{(r-\varrho')(r-\varrho'')}{4r\sqrt{\varrho'\varrho''}} = 1,$$

$$(r-\varrho)(r-\varrho')\sqrt{\varrho''}+(r-\varrho)(r-\varrho'')\sqrt{\varrho'}+(r-\varrho')(r-\varrho'')\sqrt{\varrho}=4r\sqrt{\varrho\varrho'\varrho''},$$

$$0=(\sqrt{\varrho}+\sqrt{\varrho'}+\sqrt{\varrho''})r^2$$
$$-\{(\varrho'+\varrho'')\sqrt{\varrho}+(\varrho+\varrho'')\sqrt{\varrho'}+(\varrho+\varrho')\sqrt{\varrho''}+4\sqrt{\varrho\varrho'\varrho''}\}r$$
$$+\varrho'\varrho''\sqrt{\varrho}+\varrho\varrho''\sqrt{\varrho'}+\varrho\varrho'\sqrt{\varrho''}.$$

Mittelst dieser quadratischen Gleichung läßt sich z. B. r aus ϱ, ϱ', ϱ'' finden.

Es ist offenbar

$$a=r(\cot\tfrac{1}{2}B+\cot\tfrac{1}{2}C)=\frac{r\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}=\frac{r\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C};$$

also

$$a=\frac{2r(r+\varrho')(r+\varrho'')\sqrt{r\varrho}}{(r+\varrho)(r-\varrho')(r-\varrho'')},$$

$$b=\frac{2r(r+\varrho)(r+\varrho'')\sqrt{r\varrho'}}{(r-\varrho)(r+\varrho')(r-\varrho'')},$$

$$c=\frac{2r(r+\varrho)(r+\varrho')\sqrt{r\varrho''}}{(r-\varrho)(r-\varrho')(r+\varrho'')},$$

wodurch die Seiten des Dreiecks a, b, c aus r, ϱ, ϱ', ϱ'' gefunden werden können.

Ueber die Malfattische Aufgabe s. m. den Artikel Anwendung der Analysis auf die Geometrie (24.) i. d. Z.

Duodecimal-System, s. Dodekadik.

Einige Berichtigungen.

S. 112. Z. 8. steht $\Delta+$ zu hoch.
— 174. — 3. st. 22. s. m. 23.
— 176. — 10. st. $\frac{1}{2-3}$ s. m. $\frac{1}{n-3}$.
— 288. — 14. v. u. st. s'_{n+1} s. m. s'_{n+1}.
— 369. — 15. v. u. streiche man m. am Ende der Zeile.
— 408. zwischen Z. 15. u. 16. ist noch einzuschalten Charakteristik eingehüllter Flächen, s. Einhüllende Curven und Flächen (11.) i. d. Z.
— 450. Z. 3. v. u. hätte statt auf Mittel (11.) auch auf Differentialrechnung (28.) i. d. Z. verwiesen werden können.
— 455. — 19. v. u. st. $\frac{13}{2}$ s. m. $\frac{13}{3}$.
— 513. zwischen Z. 11. u. 12. eine Reihe Punkte.
— 527. Z. 16. v. u. st. $a_{n-1}.\frac{1}{2n-1}$ s. m. $a_{\nu-1}.\frac{1}{2\nu-1}$.
— 610. — 5. v. u. tilge man = am Ende der Zeile.

Einige nachträgliche Berichtigungen zum fünften Theile.

S. 35. Z. 10. v. u. st. X l. m. $X\partial x$.
— — — 8. v. u. hinter i schalte man $= \partial x$ ein.
— 36. — 1. streiche man Summen der.
— — — 2. st. X l. m. $X\partial x$.
— — — 14. st. X l. m. $X\partial x$.
— — — 6. v. u. st. vou l. m. von; st. des ersten X l. m. $X\partial x$, st. des zweiten X l. m. x.
— 37. — 6. st. X l. m. $X\partial x$.
— 159. — 9. st. uur l. m. nur.
— 161. — 8. v. u. st. $a-b-c+d$ l. m. $c-b-a+d$.
— 173. — 16. st. $\cos\frac{1}{2}a$ l. m. $\cos\frac{1}{2}\alpha$.
— 212. — 2. hinter schon schalte man 1808 ein.
— 227. Bei der Aufgabe in (76.) ist auch $\sin c = \frac{\tan b}{\tan \beta}$, wodurch c unmittelbar aus b und β gefunden wird.
— 330. Z. 17. st. Trignnometrie l. m. Trigonometrie.
— 424. — 2. v. u. füge man hinter Zahl bei: oder der kleinere negativ.
— 425. Am Ende von Num. 10. ist zu bemerken: Für $\varphi = 19$ wird die kleinere der obigen Gränzen negativ. Also kann man auch $\varphi = 19$, $z = 0$ setzen. Dies giebt $x = 2$, $y = 5$, $z = 0$.
— 511. Z. 3. v. u. st. Artt l. m. Art.
— 600. — 6. st. des ersten x l. m. x, y, z ....
— 663. — 3. v. u. st. Differentialquotienten l. m. Differentials und Z. 2. v. u. füge man der Formel hinten ∂x als Factor bei.
— 679. — 15. füge man der Formel hinten ∂x als Factor bei, und Z. 19. l. m. Differentials st. Differentialquotienten.
— 717. — 3. v. u. st. $\frac{\partial^3 y}{\partial t^2} +$ l. m. $\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} =$.
— 718. — 3. l. m. in der Formel $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2$ st. $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$.
— 719. — 3. st. $\frac{\partial^2 x}{\partial x^4}$ l. m. $\frac{\partial^2 x^2}{\partial x^4}$.
— 772. — 10. st. quod l. m. quot.
— 773. — 3. st. welcher l. m. welchen.
— 804. — 4. v. u. l. m. im Zähler — statt des ersten +.
— 829. — 13. zwischen $\angle$ EDG $\angle$ E'D'G' l. m. =.
— 851. oben st. Vielctiger l. m. Vieleckiger.
— 891. Z. 15. st. e^{-t^2} l. m. $e^{-t^2}\partial t$.
— 997. — 8. st. denn l. m. dann.
— 1173. — 7. st. arc l. m. ars.

Tab. I.

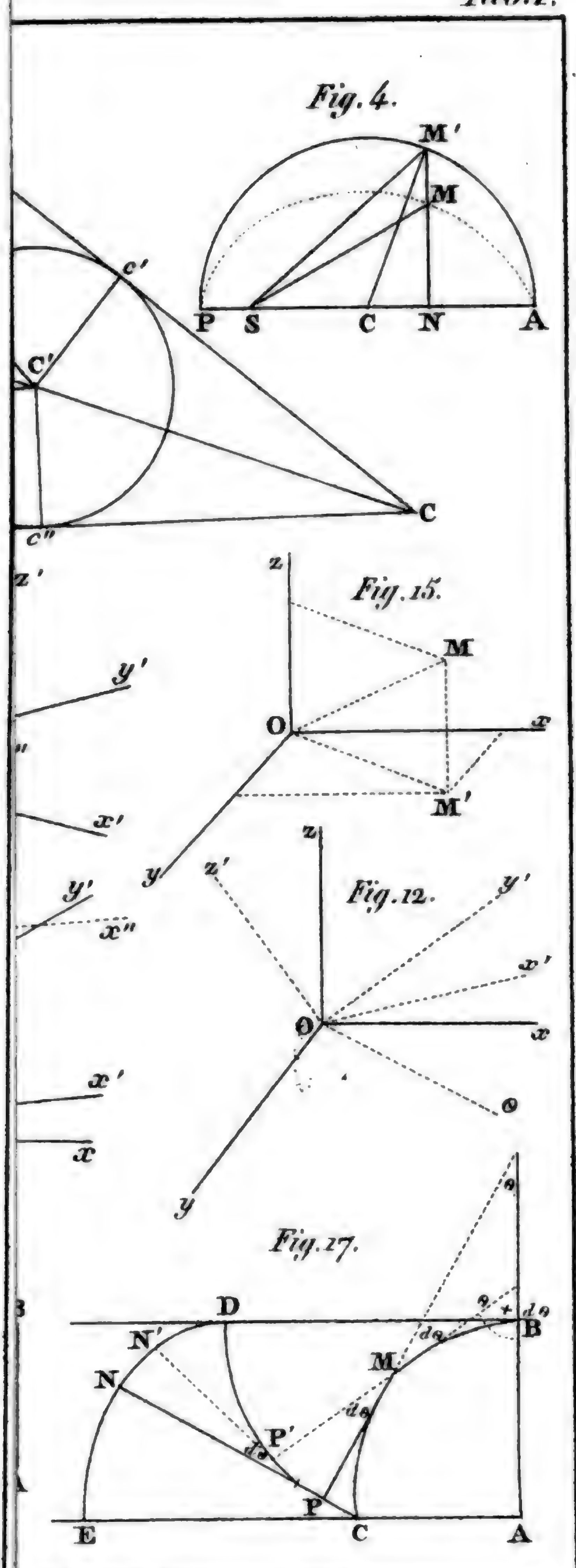
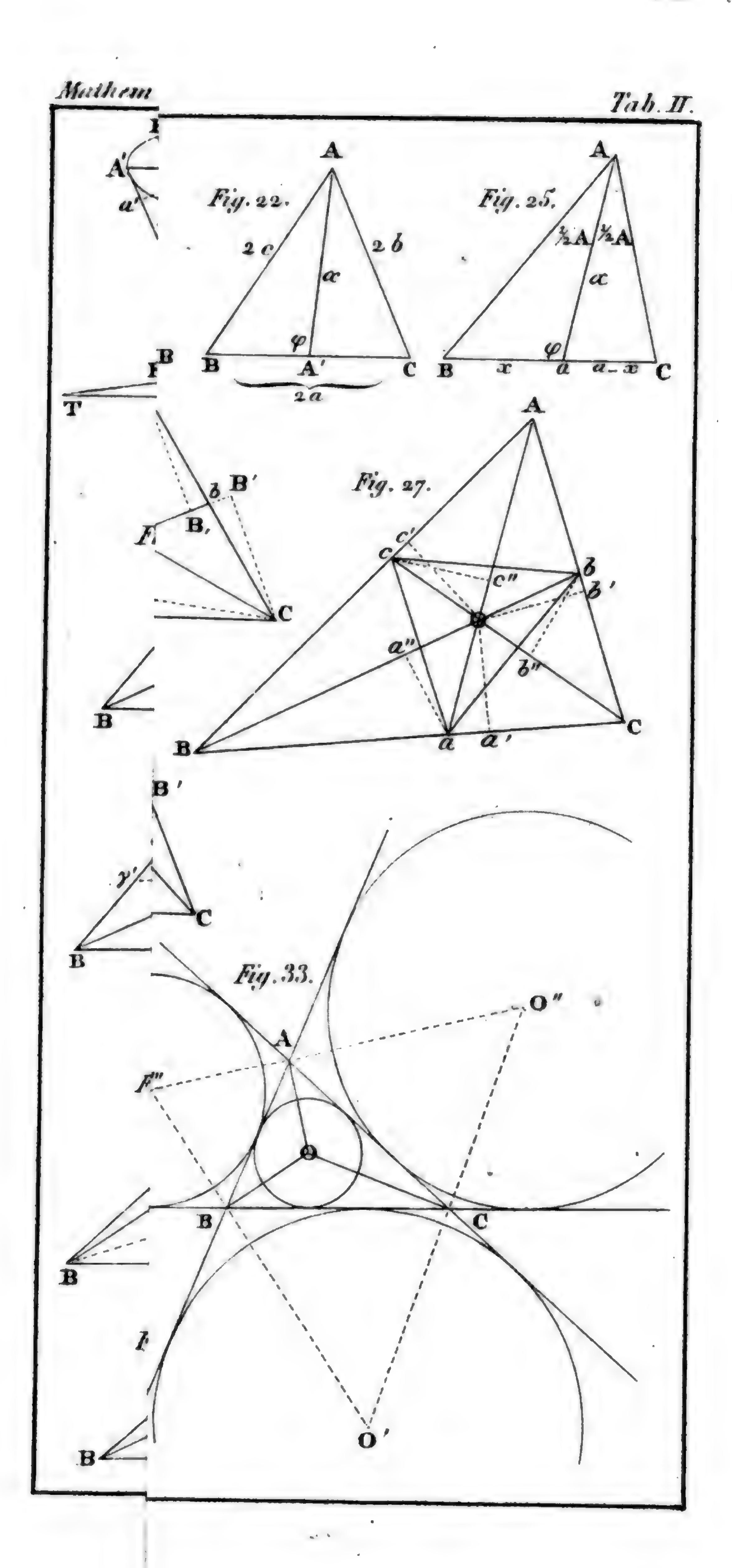


Fig. 4.
M'
M
P
S
C
N
A
c'
C'
C
c''
z'
y'
x'
y'
x''
x'
x
Fig. 15.
z
M
O
x
M'
y
Fig. 12.
z
z'
y'
x'
O
x
y
Fig. 17.
D
N'
N
M
B
P'
P
E
C
A


Mathem
Tab. II.
Fig. 22.
A
2 c
2 b
α
φ
B
A'
C
2 a
Fig. 25.
A
½A
½A
α
φ
B
x
a
a-x
C
Fig. 27.
A
c'
c
c"
b
b'
a"
b"
B
a
a'
C
Fig. 33.
O"
A
F"
O
B
C
O'

JW

